



Георг Фердинанд Лудвиг Филип Кантор (3.III.1845-6.I.1918)

РУМЯНА НЕСТОРОВА, гр.ВРАЦА

През 2018 г. се навършиха 100 години от смъртта на немския математик Г. Кантор, комуто дължим фундаментални резултати, оказали голямо въздействие върху математиката.

Роден е в Санкт-Петербург. Баща му още като младеж емигрира в Русия. Заможното търговско семейство през 1856 г. се преселва в Германия. По характер Георг е чувствителен, впечатлителен и лесно възбудим. Ето защо, по-късно в моменти на силно творческо напрежение, от една страна, и резките нападки от повечето негови съвременници срещу създадената от него теория на множествата, от друга, напълно го сломяват духом. Бащата забелязва рано изявените му математически способности и желанието му да се посвети на математиката, но въпреки това го заставя да следва инженерство. Съзнавайки грешката си, накрая отстъпва и разрешава на сина си да изучава математика. Колко голяма е радостта на Георг разбираме от следните няколко реда:

„Скъпи татко!... Сега съм щастлив, като виждам, че не Ви огорчавам, следвайки своите чувства при избора на професията си... Цялата ми душа, цялото ми същество живее в моето призвание...”.

И Георг започва следването си по математика в Цюрих през 1862г., но на следващата година се връща в Берлин поради смъртта на баща си и завършва Берлинския университет през 1867 г. със защита на дисертация. Темата на дисертацията е от теорията на числата. Написана е с голям математически усет и талант, но все още е далеч от новите идеи, с които по-късно той изненадва своите съмишленици и става световноизвестен. Учители на Кантор са Кумер и Вайерщрас — организатори на първия в Германия университетски курс по чиста математика. По-късно учи и при Кронекер. Дружбата и сътрудничеството между Кантор и неговия учител Вайерщрас продължават до последните години на Вайерщрас. Уважението и възхищението, които Кантор изпитва към него са истински, а не формални, за което съдим от писмото му до С. Ковалевска

— член на комисията по случай чествуването на 70-годишния юбилей на Вайерщрас.

„Хале. 30.XII.1884 г....според мен е необходимо да се състави за публикуване такова обръщение, в което огромните заслуги на Вайерщрас да намерят възможно най-достойно и пълно изразяване..."

На самото тържество по случай 70-годишния юбилей на Вайерщрас сред присъстващите, наред с Шварц, Линдеман, Килинг, Томе, Дюбоа, е и Кантор, за да го поздрави лично и му предаде подаръци от името на организационния комитет. Той е и сред групата от предимно млади математици като Митаг-Лефлер, Волтер. Шварц, Хурвиц, Хетнер и С. Ковалевска, събрала се около Вайерщрас в края на юли 1888 г. във Вернигероде (Швейцария). Между тези представители на една и съща наука се водят много интересни разговори, така че тези срещи са изключително полезни и необходими за творческата работа на Кантор. Отношенията между Кантор и Кронекер не се развиват така плодотворно. Кронекер не одобрява идеите му, не се ограничава само с критиката им, а прибегва и до остри лични нападки.

Известно време след завършване на следването си Кантор е учител в девическа гимназия. През 1869 г. получава покана за частен доцент по математика в стария немски университет в Хале, където той по-късно още съвсем млад става професор и работи почти до края на живота си. Един епизод от живота му, преразказан от шведския математик Енстрьом в писмо до С. Ковалевска показва тънкото чувство за хумор на Кантор. Известно време той чете лекции, свързани с философските трудове на Лайбниц (за времето си Лайбниц е учудващо многостранен, автор е на многобройни научни трудове, в това число и философски). Отначало слушателите са 25, после броят им намалява до трима, двама и накрая до един, но и този последен привърженик се извинява, казвайки, че е много зает и си отива. За радост на своята жена, Кантор ѝ обещава никога повече да не чете лекции по философия.

Научното творчество на Кантор започва с публикации от 1870 г. и продължава до 1897 г., като най-плодотворен е периодът от 1874 г. до 1884 г.. По своите философски възгледи Кантор е идеалист. Значително внимание, особено в последния период на живота си, отделя на въпроси от теологията. Неговите религиозно-философски възгледи можем да си

обясним с епохата, в която живее и твори, и с влиянието на Аристотел, Платон и схоластиците. От школата на схоластиците той възприема идеала за строгост, стремежа към най-точно обосноваване на мисълта, което съвсем не ограничава математическото му въображение, напирателната фантазия и стремежа към откривателство. По терминологията на Г. Кантор, непротиворечивата структура на математическите понятия е само едната страна на въпроса за реалността на математическите понятия, а другата страна на този въпрос е съответствието между математическите понятия и процесите на реалния свет. Според Кроне-кер съществуването на математически обекти се доказва чрез построяването им или чрез изчисления. В противовес на Кронекер Кантор прокарва идеята „Същността на математиката е в нейната свобода“. Построяването на всякакви логически непротиворечиви абстрактни математически системи, чиято същност се решава чрез сравняването им с процеси от действителността, е основният смисъл на неговата идея. Плодотворността на тези мисли се потвърждава от развитието на математиката на XX век, наситена с много примери на приложение на възникнали нови абстрактни математически теории в различни области като физика, техника, лингвистика и др. Идеите му и създаденото от него предполагат признание, което той не получава преживе.

Преди всичко Кантор е известен като създател на неаксиоматичната обща теория на множествата, до която стига при изследвания върху тригонометрични редове, някои въпроси от анализа и в резултат на преосмисляне на натрупаните знания до този момент. Понятието множество е основно в нея, а впоследствие — изобщо в съвременната математика, защото се използва в почти всички нейни раздели. При много въпроси се разглежда някаква съвкупност от елементи като едно цяло. За математическото описание на такива съвкупности именно се използва понятието множество. По думите на Кантор, „множеството е много, мислено от нас като едно“ (понякога на шега Кантор казва, че „си представя множеството като пропаст“). Разбира се, за строго определение на това понятие не става дума и такова определение не се дава, защото според Кантор понятието множество е изходно (първично), на основата на което се строят останалите математически понятия и

твърдения. Множествата, състоящи се от краен брой елементи, се наричат крайни, а останалите — безкрайни, но и безкрайните множества, от своя страна, са с различен характер относно безкрайността си. До този извод Кантор стига, обръщайки особено внимание на взаимно еднозначните съответствия между две множества*. Оказва се, че множеството на рационалните положителни числа може да се постави във взаимно еднозначно съответствие с множеството на всички естествени числа. Дедекинд, чиито математически идеи са близки до тези на Кантор, успява да покаже, че има взаимно еднозначно съответствие между алгебричните и естествените числа (алгебрични числа се наричат корените на алгебрични уравнения с цели коефициенти, останалите числа се наричат трансцендентни). Реалните числа (числовият континуум) и точките от една права се намират също във взаимно еднозначно съответствие, взаимно еднозначно съответствие има и между точките на всеки две отсечки с произволни дължини, между множеството точки върху числовата ос и множеството точки от всеки краен неин интервал. По-учудващ е фактът, че може да се установи взаимно еднозначно съответствие между точките върху една права и точките в един квадрат или в един куб. Самият Кантор трудно вярва на получения резултат. Той пише на Дедекинд „Аз го виждам, но не вярвам в това " Множествата, между които може да се установи взаимно еднозначно съответствие, се наричат равномощни. За множеството на естествените числа и равномощните на него множества се казва, че са изброими, защото елементите им могат да бъдат подредени в редица и номерирани. На 7.XII.1983 г. Кантор прави твърде важното откритие, че множеството на всички реални числа е неизброимо и дава остроумно неконструктивно доказателство на този факт. Кантор различава два вида безкрайности: потенциална (произхождаща от крайна величина при неограничено нарастване или намаляване чрез граничен преход) и актуална (например множеството на естествените числа $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, взето като завършена цялост).

За периода от 1879 г. до 1884 г. Кантор систематично излага принципите на своето учение в различни съчинения, публикации в известното международно математическо списание „Акта математика" с

*Вж. статията „Две теореми на Кантор" на стр. 7 от сп „Математика", бр. 5, 1988 г.

главен редактор Митаг-Лефлер, а през 1883 г. е издаден знаменитият му труд „Основи на общото учение за многообразието" с обобщаващ характер относно получените резултати. Идеята за безкрайното не е нова и занимава човечеството още от времето на Зенон. с тази идея се свързват имената на много видни учени и мислители. Ето защо Кантор скромно и философски заявява:

„Отлично знам, че разглежданата от мен тема е била през всички времена обект на най-различни мнения и тълкувания и че нито математиците, нито философите са стигнали тук до пълно единодушие. Затова съм твърде далеч от мисълта, че мога да кажа последната дума в един толкова труден, сложен и всеобхватен въпрос за безкрайността. Но тъй като многогодишните занимания с този проблем ме доведоха до определени убеждения и тъй като в понататъшния ход на моите работи тези убеждения не бяха разколебани, а само се затвърдиха, счетох за свое задължение да ги систематизирам и публикувам."

Идеите на Кантор разтърсват съвременниците му, защото са смели и в разрез с многовековните традиции. Самият Кантор в писмо до С. Ковалевска от 7.XII.1884 г. с възторжен тон говори за създадената от него теория, за възможни нейни приложения в аритметиката и космологията, за философското ѝ значение:

„Ако вече крайните типове множества имат неизразима прелест за всеки, който е способен да възприеме законите на вечните истини..., то още по-голяма степен в удовлетворяването на този научен интерес представляват типовете безкрайни множества." А ето и мнението на Хаусдорф (писател, математик и ученик на Кантор) „Безсмъртната заслуга на Кантор се състои в това, че той се осмели да стъпи в областта на безкрайното..." Големият немски математик на XX век Хилберт заявява, че „теорията на трансфинитните числа е най-достойното за възхищение цвете на математическия дух и въобще едно от най-висшите постижения на чисто умствената човешка дейност; висше проявление на математически гений; рай, от който никой не трябва ни гони".

Л. Витгенщайн (друг съвременник на Кантор):

„...ако някой може да вижда в нея рай за математиците, защо друг да не може да вижда в нея шега?... тя е очевидно математика... Но как е

възможно да имаме понятие и да не сме наясно по неговото приложение?”

Особено рязко отрицателна позиция заемат учителят му Кронекер и приятелят му Шварц В очите на Кронекер Кантор е еретик. В резултат на забележките на хапливия Кронекер Кантор рухва напълно и търси убежище в болница за душевноболни, а знаменитият му съмишленик Вайерщрас със сълзи настоява да се пенсионира и да замине от Берлин. В лагера на противниците е и Поанкаре, френски математик от първа величина, който заявява: „Канторизмът е болест, от която математиката ще трябва да се лекува.”

Кои са причините за тези коренно противоположни мнения по въпроса? Дали само ограничеността, късогледството и ужасът от безкрайното? Основната причина е в логическите противоречия и парадокси, открити в началото на XX век в Канторовата теория от самия Кантор. Бурали-Форти, Бери, Ришар, Ръсел и др. Това от своя страна, довежда до възникването на различни течения в областта на обосноваването на математиката: формализъм (предвождан от Хилберт), логицизъм (популяризиран от Ръсел) и интуиционизъм (основан от Брауер). През 1908 г. Цермело дава първата система от аксиоми на теорията на множествата, усъвършенствана по-късно от Френкел, в която обичайните парадокси вече не са налице. В тази насока работят също Сколем, Нойман, Гьодел и др. Постепенно теорията на множествата се усъвършенства чрез поставянето ѝ на аксиоматична основа. Непротиворечивостта на въведената система от аксиоми е едно необходимо условие за недопускане на логически противоречия и избягване на парадокси. Необходимо е още да се покаже пълнотата на системата от аксиоми, т. е., че системата аксиоми е достатъчна за доказване верността или неверността на всяко твърдение в дадената теория. През 1931 г. Гьодел доказва валидността на така неречената теорема за непълнотата, с която се обяснява съществуването на твърдения, които нито могат да бъдат доказани със средствата и в рамките на самата теория, нито могат да бъдат опровергани. Самата непротиворечивост на въведената система от аксиоми в теорията на множествата е едно такова твърдение През 1963 г. Пол Кoen установява, че хипотезата на Кантор за континуума е друго такова твърдение.

Постепенно всички оценяват важността на теорията на множествата. Тя има реален принос в теорията на реалните функции и анализа, топологията и логиката, теорията на вероятностите и икономиката, абстрактната алгебра и лингвистиката, теорията на трансцендентните числа и други математически дялове. В началото на XX век цялата математика (в това число и училищната) се преустройва на теоретико-множествена и аксиоматична основа. Тази задача си поставят и група френски математици. Те публикуват редица трудове под псевдонима Н. Бурбаки.

Ще спрем до тук с въпросите от теорията на множествата, които проследяваме без претенции за чистота и строгост. Разбира се, това съвсем не е всичко, с което се занимава математикът Кантор! Тук трябва да споменем за аритметичното дефиниране на понятието „ирационално число“, много сродно с това на Вайерщрас и Мере, и еквивалентно на геометричната дефиниция на Дедекинд. На тази основа те изграждат съвременната теория на реалните числа — важна крачка в развитието на математиката.

Интересен въпрос, върху който работят Ойлер и Голдбах, е, че: „всяко четно число, по-голямо от 2, е сума на две прости числа“, от което пък следва, че „всяко нечетно число, по-голямо от 5, е сума на три прости числа“. С този въпрос се занимават мнозина, включително и Кантор, който проверява твърдението за всички четни числа от 4 до 1000. Така той дава своя принос при решаване задачата на Голдбах — Ойлер.

С името на Кантор са свързани много математически термини: Канторова теорема, наредено и напълно наредено множество, производно и съвършено множество, навсякъде гъсто множество и т. н.

Кантор е първият президент на Немското математическо дружество (1890-1893), инициатор е на свикването на I международен математически конгрес в Цюрих. Всичко това свидетелства за голямата му обществена ангажираност.

Непоносимото натоварване изтощава и без това слабата нервна система на учения. Творческите му сили постепенно угасват и на 06.01.1918 г. той умира в психиатрична клиника в Хале, недоживял триумфа на своите идеи. Животът на Кантор е потвърждение на думите му:

„Онова, което човек желае да направи, онова, към което чувства вътрешен тласък, то непременно ще бъде свършено!“