

ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ОТ ФОРМУЛИ НА ВИЕТ ЗА КОРЕНИТЕ НА УРАВНЕНИЯ ОТ ТРЕТА И ПО-ВИСОКА СТЕПЕН

Румяна Несторова, Враца

Формулите на Виет за корените на уравнението

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ са (1)}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_k + \dots + x_{n-k+1} \dots x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right.$$

В училище те са доказани за корените на квадратното уравнение ($n = 2$). Ще докажем формулите на Виет за корените на уравнение от трета степен ($n = 3$).

Доказателство: Ако x_1, x_2 и x_3 са нулите на полинома

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_3 \neq 0, \text{ то } a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Rightarrow$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_3 x^3 - a_3 (x_1 + x_2 + x_3) x^2 + a_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) x - a_3 x_1 x_2 x_3,$$

$$\text{откъдето следват равенствата (2)} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{array} \right.$$

Аналогично се доказват формулите на Виет за корените на уравнението $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$ при $n > 3$.

Степенните сборове (3) $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ на корените на уравнението $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$ могат да бъдат представени чрез $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и $x_1x_2x_3$, които са симетрични полиноми на x_1, x_2 и x_3 .

Очевидно **(4)** $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

Тъй като x_1, x_2 и x_3 са корени на уравнението $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, то

(5) $a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0$, $a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = 0$ и $a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = 0$.

Събираме почленно равенствата (5) и като вземем предвид (2), (3) и (4) получаваме:

$$a_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_1(x_1 + x_2 + x_3) + 3a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$S_3 = -\frac{a_2}{a_3}S_2 - \frac{a_1}{a_3}S_1 - 3\frac{a_0}{a_3} = (x_1 + x_2 + x_3)S_2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)S_1 + 3x_1x_2x_3, \text{ т.е.}$$

(6) $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2x_3$.

Умножаваме първото от равенствата (5) с x_1^{n-3} , второто с x_2^{n-3} , а третото с x_3^{n-3} , събираме почленно и като вземем предвид (2) и (3), получаваме зависимостта за последователно намиране на степенните сборове:

$$a_3(x_1^n + x_2^n + x_3^n) + a_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1}) + a_1(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + x_3^{n-2}) + a_0(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3}) = 0 \Rightarrow$$

$$S_n = -\frac{a_2}{a_3}S_{n-1} - \frac{a_1}{a_3}S_{n-2} - \frac{a_0}{a_3}S_{n-3} = (x_1 + x_2 + x_3)S_{n-1} - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)S_{n-2} + x_1x_2x_3S_{n-3}, \text{ т.е. при}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ и } n > 3$$

(7) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n =$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1}) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + x_3^{n-2}) + x_1x_2x_3(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3}).$$

Като използвате формулите на Виет за корените на уравнения от трета и по-висока степен, решете следните задачи:

Задача 1. Намерете зависимостта за последователно намиране на $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ ($n \in \mathbb{N}$) и пресметнете $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k = 1, 2, 3, 4$ чрез коефициентите на уравнението:

а) $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$ ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$)

б) $x^3 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{Z}$)

Задача 2. Нека x_1, x_2 и x_3 са нулите на полинома $F(x) = x^3 - 5x + 2$. Пресметнете $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Задача 3.

а) Нека x_1, x_2 и x_3 са корените на уравнението $x^3 - x - a = 0$ и $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Определете стойностите на параметъра a , за които $S_6 \geq S_5$.

б) Нека x_1, x_2, x_3 и x_4 са корените на уравнението

$x^4 + (a+1)x^3 + \left(a^2 + \frac{1}{2}a + 1\right)x^2 + 2x - 5 = 0$ и $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Определете стойностите на параметъра a , за които $S_2 < 0$.

Задача 4. Нека x_1, x_2 и x_3 са корените на уравнението $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$.

Съставете уравнение, корените на което са $y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_1 + x_3}{x_2}$ и $y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$.

Задача 5. Намерете стойността на параметъра a в уравнението $x^3 - 12x^2 + ax - 60 = 0$, за която корените на уравнението изпълняват условието $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

Задача 6. Намерете стойността на параметъра a в уравнението $2x^3 - 12x^2 + 6x + a = 0$, за която корените на уравнението са членове на аритметична прогресия.

Задача 7. Намерете стойността на параметъра a в уравнението $2x^3 - 7x^2 + 7x + a = 0$, за която корените на уравнението са членове на геометрична прогресия.

Задача 8. Намерете стойността на параметъра λ в уравнението $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + \lambda x - 3 = 0$, за която корените x_1 и x_2 на уравнението изпълняват условието $x_1 x_2 = 3$.

Задача 9. Намерете стойностите на параметрите a и b в уравнението $x^4 + 6x^3 + 8x^2 + ax + b = 0$, ако три от корените на уравнението са членове на аритметична прогресия, а четвъртият е равен на тяхната сума.

Задача 10. Решете системата:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -1 \\ x_1 x_2 x_3 = -2 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 x_2 x_3 = 24 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 29 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Отговори, упътвания и кратки решения

1. а) Съгласно (7) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = -\frac{a_2}{a_3} S_{n-1} - \frac{a_1}{a_3} S_{n-2} - \frac{a_0}{a_3} S_{n-3}$, където $n \in \mathbb{N}$ и $n > 3$.

От (2) следва $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$. От (2) и (4) получаваме

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{a_3}\right) = \frac{a_2^2 - 2a_1 a_3}{a_3^2}.$$

От (2) и (6) следва, че

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) + 3x_1 x_2 x_3 =$$

$$= \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 3\left(-\frac{a_2}{a_3}\right)\left(\frac{a_1}{a_3}\right) + 3\left(-\frac{a_0}{a_3}\right) = \frac{-a_2^3 + 3a_1 a_2 a_3 - 3a_0 a_3^2}{a_3^3}. \text{ За изразяване на } S_4 \text{ ще}$$

използваме (7) при $n = 4$ и намерените степенни сборове S_k за $k = 1, 2$ и 3 :

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -\frac{a_2}{a_3} S_3 - \frac{a_1}{a_3} S_2 - \frac{a_0}{a_3} S_1 = \frac{a_2^4 - 4a_1 a_2^2 a_3 + 4a_0 a_2 a_3^2 + 2a_1^2 a_3^2}{a_3^4}.$$

б) От $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = p$ и $a_0 = q$ и резултатите, получени в условие а), следва $S_1 = 0, S_2 = -2p, S_3 = -3q, S_4 = 2p^2$ и $S_n = -pS_{n-2} - qS_{n-3}$, където $n \in \mathbb{N}$ и $n > 3$.

2. От $p = -5$ и $q = 2$ и резултатите, получени в задача 1 б), следва

$$S_2 = -2p = 10, S_3 = -3q = -6 \text{ и } S_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -pS_3 - qS_2 = 5 \cdot (-6) - 2 \cdot 10 = -50.$$

3. а) От изводите в задача 1 б) и задача 2, следва че

$$S_6 \geq S_5 \Leftrightarrow 2 + 3a^2 \geq 5a \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2 \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, \infty).$$

б) Използваме, че
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(a+1) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a^2 + \frac{1}{2}a + 1 \end{cases}, \text{откъдето}$$

следва $S_2 < 0 \Leftrightarrow a^2 - a + 1 > 0$, което е изпълнено за всяко $a \in (-\infty, \infty)$.

4. Формулите на Виет за корените на даденото уравнение са

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Търсим уравнение от вида $y^3 - ky^2 + mx - n = 0$, където
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = k \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = m \\ y_1y_2y_3 = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} = \frac{-1 - x_1}{x_1} + \frac{-1 - x_2}{x_2} + \frac{-1 - x_3}{x_3} = -3 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$n = y_1y_2y_3 = \left(\frac{x_2 + x_3}{x_1}\right) \left(\frac{x_1 + x_3}{x_2}\right) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_3}\right) = \frac{(-1 - x_1)(x_1^2 - \frac{3}{2})}{\frac{1}{2}} = -(2x_1^3 + 2x_1^2 - 3x_1 - 1) + 2 = 0 + 2 = 2,$$

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{x_2 + x_3}{x_1}\right) \left(\frac{x_1 + x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{x_2 + x_3}{x_1}\right) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_3}\right) + \left(\frac{x_1 + x_3}{x_2}\right) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_3}\right) = \frac{\left(x_3^3 - \frac{3}{2}x_3\right) + \left(x_2^3 - \frac{3}{2}x_2\right) + \left(x_1^3 - \frac{3}{2}x_1\right)}{x_1x_2x_3} = \\ &= \frac{S_3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(-4 + \frac{3}{2}\right) = -5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{търсеното уравнение е } y^3 - 5x - 2 = 0.$$

5. Формулите на Виет за корените на уравнението са

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ x_1x_2x_3 = 60 \end{cases}$$

Съгласно условието $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$. От $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1x_2x_3 = 60 \\ x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 4 \text{ и } x_3 = 3,$

откъдето $a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 47$.

6. Съгласно формулите на Виет за корените на уравнението

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

От условието $x_1 = x - d, x_2 = x, x_3 = x + d$ и равенствата $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

и $d = \pm 3$. Следователно $x_1 = -1, x_2 = 2 \text{ и } x_3 = 5$ или $x_1 = 5, x_2 = 2 \text{ и } x_3 = -1$ и

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 20.$$

7. Съгласно формулите на Виет за корените на уравнението

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{7}{2} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

От условието $x_1 = \frac{x}{q}, x_2 = x, x_3 = xq$ и равенствата $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3,5 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3,5 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ и

$q = 2$ или $q = \frac{1}{2}$. Следователно $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \text{ и } x_3 = 2$ или $x_1 = 2, x_2 = 1 \text{ и } x_3 = \frac{1}{2}$ и

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2.$$

8. От формулите на Виет за корените на уравнението следва, че

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -6 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\lambda \\ x_1x_2x_3x_4 = -3 \end{cases} \text{ . От } x_1x_2x_3x_4 = -3 \text{ и } x_1x_2 = 3 \Rightarrow x_3x_4 = -1.$$

Тогава $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 2 \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -8 \end{cases}.$

Следователно $(x_1 + x_2)$ и $(x_3 + x_4)$ са корени на уравнението $x^2 - 2x - 8 = 0$ и тъй като $x_1x_2 = 3$, $x_3x_4 = -1$, то $x_1 + x_2 = 4$ и $x_3 + x_4 = -2$. Оттук

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\lambda \Rightarrow \lambda = 10.$$

9. Формулите на Виет за корените на уравнението са

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 8 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -a \\ x_1x_2x_3x_4 = b \end{cases} \text{ . По условие } x_1 = x - d, x_2 = x, x_3 = x + d, x_4 = 3x.$$

Тогава от равенството $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -6 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$, а от равенството

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 8 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2. \text{ Следователно}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3, x_4 = -3 \text{ или } x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -3. \text{ Оттук}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = b \Leftrightarrow b = -9 \text{ и } x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -a \Leftrightarrow 6 = -a \Rightarrow a = -6.$$

10. а) Съгласно (2) задачата е равносилна на задачата за решаване на уравнението $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Делителите на $a_0 = 2$ са $\pm 1, \pm 2$. По схемата на Хорнер определяме, че корените на уравнението са $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$, откъдето решенията на системата са $(-1, 1, 2); (-1, 2, 1); (1, -1, 2); (1, 2, -1); (2, -1, 1)$ и $(2, 1, -1)$.

б) От (2) и (4) следва

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 x_2 x_3 = 24 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 29 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 x_2 x_3 = 24 \\ 29 = 9^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 26 \\ x_1 x_2 x_3 = 24 \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. По схемата на Хорнер определяме кои от делителите на $a_0 = -24$ са корени на уравнението: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$. Решенията на системата са $(2, 3, 4); (2, 4, 3); (3, 2, 4); (3, 4, 2); (4, 2, 3)$ и $(4, 3, 2)$.

в) От (2),(4) и (6) следва

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 x_2 x_3 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и решенията на системата са $(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}); (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \mp \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Литература:

1. Георги Паскалев, Здравка Паскалева, Полиноми, изд. „Архимед”, София, 2000г., стр. 35.