

ДОКАЗВАНЕ НА НЯКОИ НЕРАВЕНСТВА С ПОМОЩТА НА МЕТОДА НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ

Румяна Несторова, Враца

В четивото за 6. и 7. клас “Що е математическа индукция” (сп. “Математика плюс”, бр.3/1998 г.) е разгледан един важен метод за доказване на математически твърдения от типа “равенство” за естественото число n , както и приложенията му в задачи за делимост. В настоящото четиво **за 6. и 7. клас** ще разгледаме **математическата индукция** като метод за доказване на някои математически **неравенства**.

Припомняме, че ако трябва да установим верността на някакво математическо твърдение T при n по – голямо или равно на m (n и m са естествени числа) чрез метода на математическата индукция, то:

- 1) Проверяваме верността на твърдението T за естественото число $n = m$.
- 2) Допускаме верността на твърдението T за естественото число $n = k > m$.
- 3) Доказваме чрез горното предположение верността на твърдението T и за естественото число $n = k + 1$.

Проверката в стъпка 1) наричаме **база на индукцията**, а допускането в стъпка 2) – **индуктивно предположение**.

Аналогично, ако трябва да се докаже верността на неравенството $f(n) > 0$ при n по – голямо или равно на m (n и m са естествени числа) чрез метода на математическата индукция, то:

- 1) Проверяваме верността на неравенството при $n = m$.
- 2) Допускаме верността на неравенството при $n = k$ ($k > m$, k е естествено число).
- 3) Доказваме чрез 2) верността на неравенството при $n = k + 1$.

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число $n > 2$ е вярно неравенството $2^n > 2.n + 1$.

Доказателство: При $n = 3$ неравенството $2^n > 2.n + 1$ е вярно, защото неравенството $2^3 > 2.3 + 1$. Да допуснем, че неравенството е вярно за $n = k$, т.е. $2^k > 2.k + 1$ ($k > 3$, k е естествено число).

Ще докажем верността на неравенството при $n = k + 1$, т.е. ще докажем, че $2^{k+1} > 2.(k + 1) + 1 = 2.k + 3$. Тъй като $2^{k+1} = 2^k.2$ и $2^k > 2.k + 1$ съгласно

индуктивното предположение, то

$$2^{k+1} = 2^k.2 > (2.k + 1).2 = 4.k + 2 = (2.k + 3) + (2.k - 1). \text{ Но } 2.k - 1 > 0, \text{ тъй като } k > 3.$$

Следователно $2^{k+1} = 2^k.2 > (2.k + 3) + (2.k - 1) > 2.k + 3$.

С това доказахме верността на неравенството $2^n > 2.n + 1$ за всяко естествено число $n > 2$.

Задача 2. (за самостоятелна работа) Да се докаже, че

а) за всяко естествено число $n > 2$ е вярно неравенството $\frac{1}{2^{n-1} - 1} < \frac{1}{2}$;

б) ако n е естествено число и $n > 1$, то $3.n^2 > 2.n + 1$ (само за 7 клас);

в) ако n е естествено число и $n > 1$, то $3^n > 3.n$.

Задача 3. Да се докаже, че $\frac{1.3.5.....(2.n - 1)}{2.4.6.....2.n} > \frac{1}{2^n}$ за всяко естествено число $n > 1$.

Доказателство: При $n = 2$ неравенството е вярно, защото $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$. Допускаме, че

е вярно неравенството $\frac{1.3.5.....(2.k - 1)}{2.4.6.....2.k} > \frac{1}{2^k}$, т.е. при $n = k$ (k е естествено число,

$k > 2$). Ще докажем, че неравенството е вярно и при $n = k + 1$, т.е. ще докажем,

че $\frac{1.3.5.....(2.(k + 1) - 1)}{2.4.6.....2.(k + 1)} > \frac{1}{2^{k+1}}$. След използване на индукционното

предположение, получаваме $\frac{1.3.5.....(2.k + 1)}{2.4.6.....(2.k + 2)} =$

$$= \frac{1.3.5.....(2.k+1)}{2.4.6.....(2.k+2)} = \frac{1.3.5.....(2.k-1).(2.k+1)}{2.4.6.....2.k.(2.k+2)} > \frac{1}{2^k} \cdot \frac{(2.k+1)}{(2.k+2)}.$$

Но $\frac{(2.k+1)}{(2.k+2)} > \frac{k+1}{2.k+2} = \frac{1}{2}$. Следователно $\frac{1.3.5.....(2.k+1)}{2.4.6.....(2.k+2)} > \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}$. С това исканото неравенство е доказано за всяко естествено $n > 1$.

Задача 4. Да се докаже верността на неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + + \frac{1}{3.n+1} > 1 \text{ за всяко естествено число } n.$$

Доказателство: При $n=1$ неравенството е вярно, защото $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.

Допускаме, че $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + + \frac{1}{3.k+1} > 1$ ($n=k$, k е естествено число).

Ще докажем, че $\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + + \frac{1}{3.(k+1)+1} > 1$ ($n=k+1$). Нека

$$S_{k+1} = \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + + \frac{1}{3.(k+1)+1} \text{ и } S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + + \frac{1}{3.k+1}.$$

$$\text{Тогава } S_{k+1} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3.k+2} + \frac{1}{3.k+3} + \frac{1}{3.k+4} = S_k + \frac{2}{(3.k+2).(3.k+3).(3.k+4)}.$$

Следователно $S_{k+1} > S_k$, защото $\frac{2}{(3.k+2).(3.k+3).(3.k+4)} > 0$. Но $S_k > 1$ от където и $S_{k+1} > 1$, с което задачата е решена.

Задача 5. (за самостоятелна работа) Да се докаже верността на неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + + \frac{1}{2.n} > \frac{1}{2} \text{ за всяко естествено число } n > 1.$$

Задача 6. Докажете, че за всяко естествено число $n > 1$ е вярно неравенството

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} \text{ (само за 7 клас).}$$

Доказателство: При $n=2$ неравенството е вярно: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Да предположим, че то е вярно при $n=k$ ($k > 2$, k е естествено число), т.е

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < \frac{k-1}{k}$. Ще докажем верността на неравенството при $n = k + 1$. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &< \frac{k-1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k-1) \cdot (k+1)^2 + k}{k \cdot (k+1)^2} = \\ &= \frac{(k^2 - 1) \cdot (k+1) + k}{k \cdot (k+1)^2} = \frac{k^3 + k^2 - k - 1 + k}{k \cdot (k+1)^2} = \frac{k^3 + k^2 - 1}{k \cdot (k+1)^2} < \frac{k^3 + k^2}{k \cdot (k+1)^2} = \frac{k}{k+1}, \end{aligned}$$

задачата е решена.

Задача 7. (за самостоятелна работа) Докажете, че за всяко естествено число $n > 3$ е вярно неравенството: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{2n-1}{n}$, (където $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

Задача 8. (за самостоятелна работа) Да се докаже, че за всяко естествено число $n > 1$ е изпълнено неравенството $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (само за 7 клас).

Някои от предложените неравенства могат да бъдат доказани и по други начини. Методът на математическата индукция е основен и в същото време достъпен за усвояване. За съжаление той не е толкова популярен, но може би на вас, читателите на yM+, ще ви стане любим и ще може да се възползвате от неговите възможности във вашите занимания.

Литература:

1. В.Панделиева и Ил.Цветкова, Четиво за 6. и 7. клас “Що е математическа индукция”, сп. “Математика плюс”, бр.3, 1998 г., стр.64.
2. А.Василевский, Методы решения задач, изд. „Вышэйшая школа”, Минск, 1974г., стр.42.