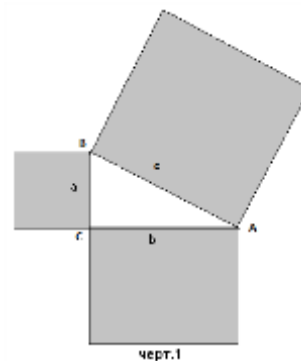


Едно обобщение на теоремата на Питагор в извънкласната работа по математика

Румяна Несторова, Враца

Един от предстоящите нови моменти в посока на практическа приложимост на математиката и развиване на ключови компетентности, полезни за живота, е усвояването на Питагорова теорема без доказателство, като илюстрация на действия със степени в 6. клас и работа с формули. Питагоровата теорема е една от най-популярните математически теореми. Учениците имат знания за правоъгълен триъгълник и елементите му, а много от доказателствата на теоремата са напълно по възможностите им. В статията са разгледани теоремата на Питагор, обобщението ѝ за произволен триъгълник и примерни техни приложения. Подходяща е за изявени ученици по математика в 7. и 8. клас.

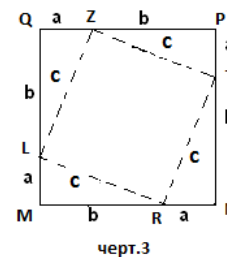
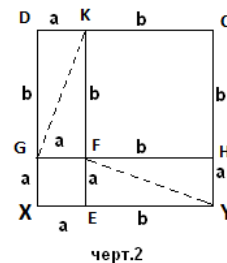


Да започнем със самото твърдение на Питагоровата теорема:

Нека върху катетите $BC = a$, $AC = b$ и хипотенузата $AB = c$ на **правоъгълен** $\triangle ABC$ **външно** за триъгълника са построени **квадрати**.

Лицето на квадрата, построен върху хипотенузата c на правоъгълен триъгълник $\triangle ABC$ е равно на сумата от лицата на квадратите, построени върху катетите a и b на правоъгълния триъгълник, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$ /черт.1/.

Доказателство: Построяваме два еднакви квадрата със страни, равни на $a+b$. Първият квадрат разделяме на два квадрата съответно със страни a и b и два еднакви правоъгълника със страни a и b , които от своя страна разделяме чрез един от диагоналите на правоъгълни триъгълници, еднакви на дадения /черт.2/. Вторият квадрат разделяме на четири правоъгълни триъгълници с катети a , b и хипотенуза c , еднакви на дадения, и един квадрат със страна c /черт.3/.



Тогава $S_{XYCD} = S_{XEFG} + S_{FHCK} + 4S_{\triangle ABC} = a^2 + b^2 + 2ab$, а $S_{MNPQ} = S_{LRTZ} + 4S_{\triangle ABC} = c^2 + 2ab$. Но $S_{XYCD} = S_{MNPQ}$, откъдето следва, че $a^2 + b^2 = c^2$, с което теоремата е доказана.

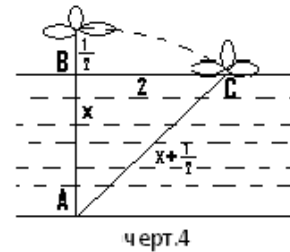
Питагоровата теорема се използва при решаването на голям брой задачи. Ще разгледаме няколко задачи от древността, формулирани в малко изменен вид, първата от които ще решим, а останалите предлагаме за самостоятелна работа.

Задача за лотоса: Половин фут над езеро тихо цветът на лотоса стоял. Поривът на вятъра го потопил на два фута встрани от мястото, където лотосът растял (фут – стара британска мярка за дължина, около 30,48 см). Каква е дълбочината на езерото?

Решение: Да означим с x ($x > 0$) дълбочината на езерото (черт.4). Тогава дължината на лотоса е $x + \frac{1}{2}$. От Питагорова теорема за $\triangle ABC$ следва

равенството $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$, откъдето намираме

$x = 3\frac{3}{4}$, т.е. дълбочината на езерото е $3\frac{3}{4}$ фута.



Задача за тополата: На брега на една река растяла самотна тополя. Силен вятър прекършил нейния ствол и върхът ѝ докоснал отсрещния бряг. Колко е била висока тополата, ако останалата част от ствола е висока 3 фута, а реката е широка 4 фута? Отг.8 фута

Задачата за водоема: В центъра на водоем със страна 10 м расте камъш, върхът на който се намира на 1 м над водата. Ако се издърпа камъшат към брега, то върхът му ще стигне точно брега. Каква е дълбочината на водоема и дължината на камъша? Отг. 12м, 13м

Задача за бамбука: Височината на бамбук е 10 м. Прекършили го по такъв начин, че върхът му допрял земята на разстояние 3 м от корена. Каква е височината му след прекършването? Отг.4,55м

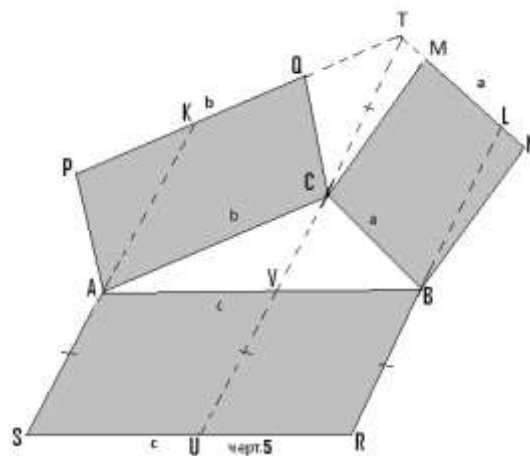
Задача за двамата пътешественици: Двама пътешественици тръгнали от едно и също място в различни посоки. Единият от тях тръгнал на изток със скорост 3 км / ч, а другият - на юг със скорост 5 км / ч. След като изминал 10 км, вторият

тръгнал на североизток, докато срещнал първият. Какъв път е изминал всеки от тях? Отг. 18,75 км, 31,25 км.

Задача на известния ирански математик Ал Каши (XIV в.): Три лакътя над водата стърчи отвесно забито копие. Вятърът отклонил върха му пет лакътя настрани и той стигнал до повърхността на водата, без да се отмести другият край. Каква е дължината на копието? Отг. $2\frac{2}{3}$.

Има ли аналог теоремата на Питагор за произволен триъгълник? Какви са условията за валидността ѝ в общия случай? Отговор на този въпрос ни дава едно обобщение на теоремата на Питагор, известно като **теорема на Пап Александрийски** (III в. от н.е.):

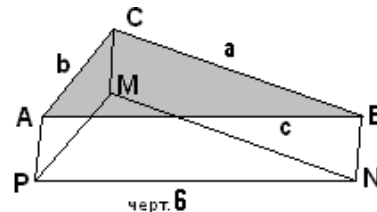
Нека върху страните BC , AC и AB на **произволен** $\triangle ABC$ **външно** за триъгълника са построени **успоредниците** $BCMN$, $CAPQ$ и $ABRS$, а правите MN и PQ се пресичат в точката T . Ако отсечката TC е успоредна и равна на страната AS на успоредника $ABRS$, то лицето на успоредника $ABRS$ е равно на сумата на лицата на успоредниците $BCMN$ и $CAPQ$, т.е. $S_{ABRS} = S_{BCMN} + S_{CAPQ}$ /черт.5/.



Доказателство: Продължаваме отсечката TC до пресичането ѝ със страната AB в точка V и със страната SR в точка U . Страните AS и BR продължаваме до пресичане на PQ и MN съответно в точките K и L . От условието $TC \parallel AS$ и $TC = AS$, следва че $S_{TKAC} = S_{ASUV}$ (успоредниците имат равни основи и равни височини). Аналогично $S_{TKAC} = S_{ACQP}$ (успоредниците имат една и съща основа и равни височини). Следователно $S_{ACQP} = S_{ASUV}$. С аналогични разсъждения установяваме, че $S_{TCBL} = S_{BVUR}$ и $S_{TCBL} = S_{MCBN}$, откъдето следва, че $S_{MCBN} = S_{BVUR}$. Тогава $S_{ABRS} = S_{ASUV} + S_{BVUR} = S_{BCMN} + S_{CAPQ}$, с което теоремата е доказана.

Приложни задачи:

1. На страните на BC и AC на $\triangle ABC$ към вътрешността на триъгълника са построени успоредниците $BCMN$ и $CAPM$.



черт. 6

Да се докаже, че лицето на успоредника $APNB$

е равно на сумата от лицата на успоредниците $BCMN$ и $CAPM$.

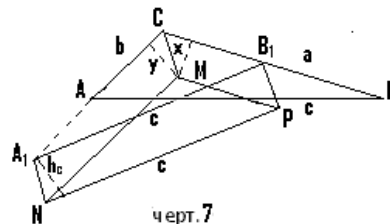
Решение: От условието, че $CAPM$ е успоредник следва, че $CM \parallel AP$ и $CM = AP$ /черт. 6/. На лъчите $PA \rightarrow$, $MC \rightarrow$ и $NB \rightarrow$ построяваме отсечките AP_1 , CM_1 и BN_1 , такива, че $AP_1 = AP$, $CM_1 = CM$ и $BN_1 = BN$. От $CM_1 = CM$, $CM \parallel AP$ и $CM = AP$ следва, че $CM_1 \parallel AP$ и $CM_1 = AP$. Тогава от обобщението на теоремата на Питагор следва, че $S_{APNB} = S_{CAPM_1} + S_{BCM_1N_1}$. Но тъй като успоредниците BCM_1N_1 и CAP_1M_1 по построение са съответно еднакви на успоредниците $BCMN$ и $CAPM$, то $S_{BCM_1N_1} = S_{BCMN}$ и $S_{CAP_1M_1} = S_{CAPM}$. Тогава $S_{APNB} = S_{CAPM_1} + S_{BCM_1N_1} = S_{CAPM} + S_{BCMN}$, с което задачата е решена.

2. Точка M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Ако x и y са разстоянията от M съответно до правите BC и AC , то докажете неравенството $ax + by \leq c \cdot CM$.

Решение: На страните на BC и AC на $\triangle ABC$ към вътрешността на триъгълника построяваме успоредниците $BCMN$ и $CAPM$, където M е дадената произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ /черт.6/. От доказаното в задача 1. следва, че (1) $S_{APNB} = S_{CAPM} + S_{BCMN}$. Но (2) $S_{CAPM} = b \cdot y$, $S_{BCMN} = a \cdot x$ и $S_{APNB} = c \cdot h_c$. Тъй като $h_c \leq AP = CM$, то (3) $S_{APNB} = c \cdot h_c \leq c \cdot AP = c \cdot CM$. От (1), (2), (3) следва исканото твърдение $ax + by \leq c \cdot CM$ (h_c - височина на успоредника $APNB$).

3. Точка M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Ако x и y са разстоянията от M съответно до правите BC и AC , то докажете неравенството $ay + bx \leq c \cdot CM$.

Решение: На лъча $CA \rightarrow$ намираме точка A_1 , такава, че $CA_1 = a$ и построяваме успоредника A_1CMN , а на лъча $CB \rightarrow$ намираме точка B_1 , такава, че $CB_1 = b$ и построяваме успоредника B_1CMP (черт.7). Но $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$ и следователно $A_1B_1 = c$. От теоремата



черт. 7

на Пап Александрийски за $\triangle A_1 B_1 C$ следва, че $S_{A_1 N P B_1} = S_{C A_1 N M} + S_{B_1 C M P} \Leftrightarrow$

$$ax + by = c \cdot h_c \leq c \cdot A_1 N = c \cdot CM \quad (h_c - \text{височина на успоредника } A_1 N P B_1).$$

4. Точка M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ и лице S .

Да се докаже неравенството $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 4S$.

Решение: От решението на задача 2. следват неравенствата $ax + by \leq c \cdot CM$, $by + cz \leq a \cdot AM$ и $ax + cz \leq b \cdot BM$, където x , y и z са разстоянията от M съответно до правите BC , CA и AB . Събираме почленно тези неравенства и получаваме, че $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 2(ax + by + cz) = 4\left(\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}\right)$. Но $\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S$, откъдето следва, че $a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \geq 4S$.

5. Точка M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$. Ако x , y и z са разстоянията от M съответно до правите BC , CA и AB , то докажете неравенството $MA \cdot MB \cdot MC \geq (x + y)(y + z)(z + x)$.

Решение: Нека страните в $\triangle ABC$ са $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ ($a > 0, b > 0, c > 0$). От решението на задача 2. следват неравенствата (1) $ax + by \leq c \cdot CM$, (2) $by + cz \leq a \cdot AM$ и (3) $ax + cz \leq b \cdot BM$, а от решението на задача 3. следват неравенствата (4) $ay + bx \leq c \cdot CM$, (5) $bz + cy \leq a \cdot AM$ и (6) $az + cx \leq b \cdot BM$ ($x > 0, y > 0, z > 0, MA > 0, MB > 0, MC > 0$). Събираме почленно неравенствата (1) и (4), в резултат на което получаваме $\left(\frac{a+b}{2}\right)(x+y) \leq c \cdot CM$, но $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (неравенство между средно геометрично и средно аритметично), откъдето следва че (7) $\sqrt{ab}(x+y) \leq c \cdot CM$. Аналогично се доказва, че (8) $\sqrt{bc}(y+z) \leq a \cdot AM$ и (9) $\sqrt{ac}(x+z) \leq b \cdot BM$. Умножаваме почленно неравенствата (7), (8), (9) и след опростяване получаваме $MA \cdot MB \cdot MC \geq (x+y)(y+z)(z+x)$.

6. (Теорема на Ердьош) Точка M е произволна вътрешна точка за $\triangle ABC$. Ако x , y и z са разстоянията от M съответно до правите BC , CA и AB , то докажете неравенството $MA + MB + MC \geq 2x + 2y + 2z$.

Доказателство: От решението на задача 3. следват неравенствата: (1)

$$ay + bx \leq c \cdot CM \Leftrightarrow \frac{a}{c} \cdot y + \frac{b}{c} \cdot x \leq CM; \quad (2) \quad bz + cy \leq a \cdot AM \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a} \cdot y \leq AM \quad \text{и} \quad (3)$$

$$az + cx \leq b \cdot BM \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot z + \frac{c}{b} \cdot x \leq BM. \quad \text{Събираме почленно неравенствата (1), (2), (3) и}$$

получаваме $MA + MB + MC \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cdot x + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot y + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot z \geq 2x + 2y + 2z$. За доказване

на теоремата използвахме неравенството $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ за всяко $m > 0$ и $n > 0$.

Разработката на темата допълва и разширява изучаваното в училище учебно съдържание по математика, а като нейно продължение може да се разгледат някои интересни и достъпни за учениците свойства на питагоровите и диофантовите триъгълници.

В заключение искам да изкажа благодарност на г-н Емил Карлов за дадените ми полезни насоки във връзка с материала.

Литература:

1. Е. Солаков, К. Чимев, Питагорова теорема, изд. "Наука и изкуство", София, 1967г..
2. И.Ф.Шарыгин, Задачи по геометрии, изд. "Наука", Москва, 1986г., стр.84 и стр.208.
3. Сборник статии по математика за работа с талантиливи ученици, МГ-Ямбол, 1998г..
4. Сп. "Математически форум", бр.1, 2001г.