

ЕКСТРЕМАЛНИ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Румяна Несторова, Враца

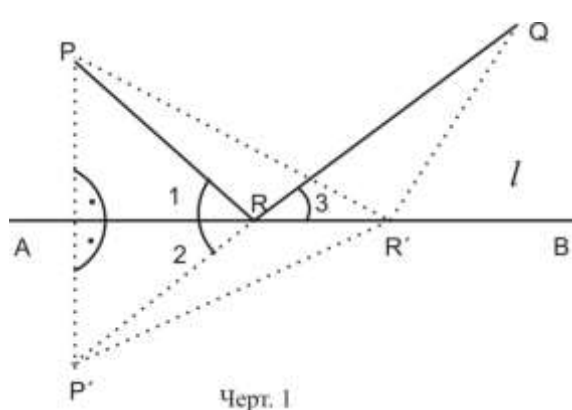
Настоящата статия е опит да се запознаят изявените ученици по математика от 7. клас с някои основни екстремални геометрични задачи. От съществуващите различни методи за решаване на тези задачи, са използвани достъпни за учениците методи, съобразени с изучаваното от тях учебно съдържание в ЗП и СИП.

Повод за разработката е опитът да се обосноват изводите от [5] не само за размери на фигурите в естествени числа. Темата е подходяща за извънкласните форми на работа по математика. Изложението се базира на изученото за симетрични фигури, уравнения, неравенства, рационални изрази и основните геометрични фигури.

Най-общо казано при екстремалните задачи в геометрията, от всички фигури с дадено свойство се търси тази геометрична фигура, която има максимална или минимална стойност на лицето, периметъра, обема, повърхнината и др. В т. нар. изопериметрични екстремални задачи, от всички фигури от определен вид с даден периметър се търси тази, с максимално лице.

В началото актуализираме теоретично и с подходящи примери определението за симетрични точки спрямо дадена права: Две точки A и B са симетрични спрямо дадена права a , когато правата минава през средата на отсечката AB и е перпендикулярна на нея.

Продължаваме с добре известната задача на Херон: Дадени са права l и две точки P и Q от едната страна на l (P и Q не лежат на l). Да се намери точка R от правата l , за която сборът от разстоянията PR и RQ е най-малък.



Черт. 1

Решение: Нека P' е симетричната точка на точката P относно l (черт. 1). Правата $P'Q$ пресича l в търсената точка R . Ще докажем, че за тази точка R сборът $PR + RQ$ е най-малък. Ако R' е произволна точка от l , различна от R , то $PR = P'R$ и $PR' = P'R'$ (R и R' са точки от симетралата l на

отсечката PP'). Следователно $PR' + R'Q = P'R' + R'Q$, а

$PR + RQ = P'R + RQ = P'Q$, но $P'R' + R'Q > P'Q$ (неравенство на триъгълника) или $PR' + R'Q > PR + RQ$, което трябваше да докажем.

Извод: Намерената точка R от l в задачата на Херон е такава, че RP и RQ образуват равни ъгли с l .

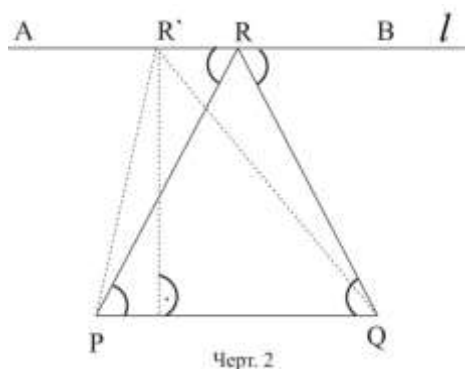
Действително от черт. 1 се вижда, че $\angle 2 = \angle 3$ (върхни) и $\angle 1 = \angle 2$ (триъгълник $PP'R$ е равнобедрен с основа PP'), откъдето $\angle 1 = \angle 3$.

Този извод всъщност е следното познато **правило от физиката**: Ако светлинен лъч, излизащ от точка A , след отразяване в огледало g минава през точката B , то ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение, при което дължината на изминатия път е най-малка (т.нар. екстремно свойство на светлинните лъчи).

Ако l е брегът на река и някой трябва да стигне от обект P до обект Q по най-бързия начин, като по пътя си напълни съд с вода от l , той би се сблъскал по същество точно със задачата на Херон. Друга редакция на тази задача е следната: Нека P и Q са селища, разположени от едната страна на железопътна линия l . Да се определи мястото на гара R на l така, че сборът от разстоянията PR и RQ да е най-малък. До формулирането на задачата на Херон води и задачата за светлинния лъч: Точките A и B лежат в една и съща полуравнина относно правата g . Светлинен лъч, който минава през A се отразява от g и след отразяването си минава през B . Постройте точката M на g , в която се отразява лъчът.

С помощта на задачата на Херон лесно се решават следващите две задачи:

Задача 1. Измежду всички триъгълници с дадени лице S и страна $c = PQ$ да се намери този, за който сборът на другите две страни a и b е най-малък.



Решение: Можем да считаме, че триъгълникът е зададен със страната c и височината h към нея, защото $S = \frac{ch}{2}$. Задачата се свежда до намирането на точка R , за която разстоянието от R до PQ е равно на дадената височина h и такава, че сборът $a + b$ е минимален (черт. 2). От първото условие

следва, че R трябва да лежи върху права $l \parallel PQ$ и отстояща от нея на разстояние h . От второто условие следва, че $\angle ARP = \angle BRQ$ (съгласно извода от задачата на Херон). Но $\angle ARP = \angle RPQ$, $\angle BRQ = \angle RQP$ (кръстни) и следователно триъгълник PQR е равнобедрен ($a = b$).

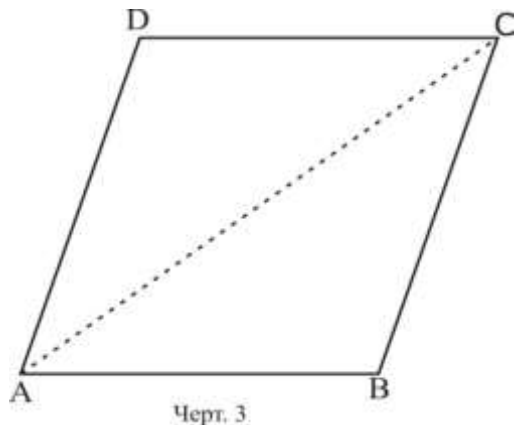
Извод 1. От всички триъгълници с дадени страна и лице най-малък периметър има равнобедреният (с основа дадената страна).

Задача 2. От всички триъгълници с дадени страна c и сбор $a + b = m$ на другите две страни да се намери този, който има най-голямо лице (Задача 2 е обратна на Задача 1).

Решение: Ще докажем, че условието се удовлетворява от равнобедрения триъгълник с основа c , за който $a = b = \frac{m}{2}$. В Задача 1 установихме, че този триъгълник има минимална стойност на $a + b$ за лицето си S . Всеки друг триъгълник със страна c и същото лице S има по-голяма стойност на сумата $a + b$. Освен това всеки триъгълник със страна c и лице, по-голямо от това на разглеждания равнобедрен триъгълник, също има по-голяма стойност на $a + b$. Следователно всеки друг триъгълник със същите стойности на $a + b$ и c трябва да има по-малко лице. С това доказваме, че при дадени c и $a + b$ равнобедреният триъгълник има максимално лице. Но при задаването на страната c и сборът $a + b$ на другите две страни е определен периметърът на триъгълника, откъдето следва:

Извод 2. От всички триъгълници с дадени страна и периметър най-голямо лице има равнобедреният (с основа дадената страна).

Задача 3. Измежду всички успоредници с дадени диагонал и лице да се намери този, който има най-малък периметър.



Решение: Знаем, че всеки диагонал разделя успоредника на два триъгълника с обща страна и лице $S = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Да построим диагонала AC. За $\triangle ABC$ със страна AC и лице S периметърът ще бъде минимален при $AB = BC$ съгласно Извод 1 (черт. 3). Аналогично, за $\triangle ACD$ със страна AC и лице S периметърът ще

бъде минимален при $AD = DC$. Следователно P_{ABCD} е минимален, ако $AB = BC = CD = AD$, т.е. успоредникът $ABCD$ е ромб.

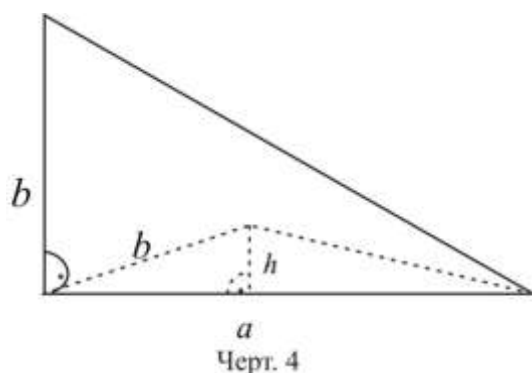
Извод 3. От всички успоредници с дадени диагонал и лице, най-малък периметър има ромбът.

Задача 4. Измежду всички успоредници с дадени диагонал и периметър да се намери този, с най-голямо лице.

Решение: Чрез разсъждения аналогични на разсъжденията в решението на Задача 3 и като използваме Извод 2, доказваме, че търсеният успоредник е ромб.

Извод 4. От всички успоредници с дадени диагонал и периметър най-голямо лице има ромбът.

Задача 5. Измежду всички триъгълници с дадени две страни a и b да се намери този, който има най-голямо лице.



Решение: Да разгледаме триъгълник със страни a и b , както е показано на черт. 4. Ако h е височината към страната a , то лицето на триъгълника е $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (h - перпендикуляр, b - наклонена, следователно $h < b$). Произведението $\frac{a \cdot h}{2}$ очевидно приема максимална стойност, когато h е най-голяма, а това е така, когато

h съвпада с b , т.е. когато триъгълникът е правоъгълен. Решението е правоъгълният триъгълник с катети a и b . Максималното лице е $\frac{a \cdot b}{2}$.

Извод 5. От всички триъгълници с дадени страни a и b най-голямо лице има правоъгълният (с катети a и b).

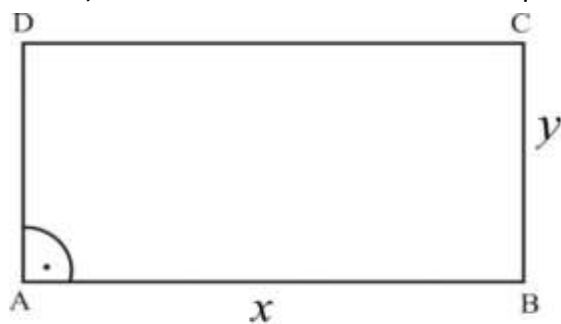
Задача 6. Измежду всички успоредници с дадени страни a и b да се намери този, който има най-голямо лице.

Решение: Нека $ABCD$ е успоредник със страни $AB = DC = a$ и $BC = AD = b$. Да построим диагонала AC (черт. 3). Триъгълник ABC със страни $AB = a$ и $BC = b$ има максимално лице $S = \frac{a \cdot b}{2}$ при $\angle B = 90^\circ$. /съгл. Задача 5/. Аналогично, $\triangle ACD$ със страни $DC = a$ и $AD = b$ има максимално лице $S = \frac{a \cdot b}{2}$ при $\angle D = 90^\circ$.

Тъй като $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$, то лицето на успоредника ще бъде максимално при $\angle B = \angle D = 90^\circ$, откъдето следва и $\angle D = \angle C = 90^\circ$. Следователно успоредникът ABCD е правоъгълник. Максималното лице $S = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = ab$.

Извод 6. От всички успоредници с дадени страни a и b най-голямо лице има правоъгълникът със страни a и b .

Задача 7. Измежду всички правоъгълници с даден периметър да се намери този, който има най-голямо лице.



Черт. 5

Решение: Нека ABCD е правоъгълник, $AB = DC = x$, $BC = AD = y$ и $P_{ABCD} = 2(x+y) = 2p$ (черт. 5). Лицето $S_{ABCD} = x \cdot y$ (променлива величина), а $x+y = p$ (константа). Да въведем следните означения: $m = \frac{x+y}{2}$ (т.нар. средно аритметично на x и y) и $d = \frac{x-y}{2}$. Следователно $x = m+d$ и $y = m-d$.

Тогава $S_{ABCD} = x \cdot y = (m+d)(m-d) = m^2 - d^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - d^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - d^2$.

Но $d^2 \geq 0$. Следователно $S_{ABCD} = x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{p^2}{4}$. Лицето ще бъде максимално само ако $d = 0$, т.е. когато $x = y$ ($AB = DC = BC = AD$).

Извод 7. От всички правоъгълници с даден периметър най-голямо лице има квадратът.

Задача 8. Измежду всички правоъгълници с дадено лице да се намери този, който има най-малък периметър.

Решение: В Задача 7 доказахме, че $S_{ABCD} = x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{p^2}{4}$ (черт. 5). Това неравенство дава оценка не само за стойността на лицето S , но и за величината $p = x+y$. $P_{ABCD} = 2p$ е минимален само при достигане на равенството, което е налице при $d = 0$, т.е. при $x = y$ ($AB = DC = BC = AD$).

Извод 8. От всички правоъгълници с дадено лице най-малък периметър има квадратът.

За самостоятелна работа предлагаме доказателството на следващите две твърдения.

Задача 9. От всички успоредници с даден периметър най-голямо лице има квадратът.

Упътване: При решаването използваме изводите 6 и 7.

Задача 10. От всички успоредници с дадено лице най-малък периметър има квадратът.

Упътване: В решаването използваме изводите 6 и 8.

Предложените задачи са предпоставка за разглеждане на различни равнинни и пространствени варианти на екстремални геометрични задачи и приложенията им в по-горен курс.

Литература

- [1] Р. Курант, Х.Робинс, Що е математика, София, „Наука и изкуство“, 1995.
- [2] О. Мушкарров, Л. Стоянов. Екстремални задачи в геометрията, София, „Народна просвета“, 1989.
- [3] Э. С. Беляева, В. М. Монахов. Экстремальные задачи. Москва, „Просвещение“, 1977.
- [4] Г. Ганчев, Н. Райков. Геометрия за 8 клас, София, „Просвета“, 1994.
- [5] Д. Раковска. Най-най-най (четиво за 4 и 5 клас), Математика плюс, бр. 1, 1995, стр. 41-43.
- [6] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика за 8 клас, София, „Анубис“, 1977.
- [7] З. Запрянов, И. Димовски, А. Лангов, В. Михайлов, З. Новакова. Математика за 6 клас на СОУ, София, „Д. Убенова“, 1995.