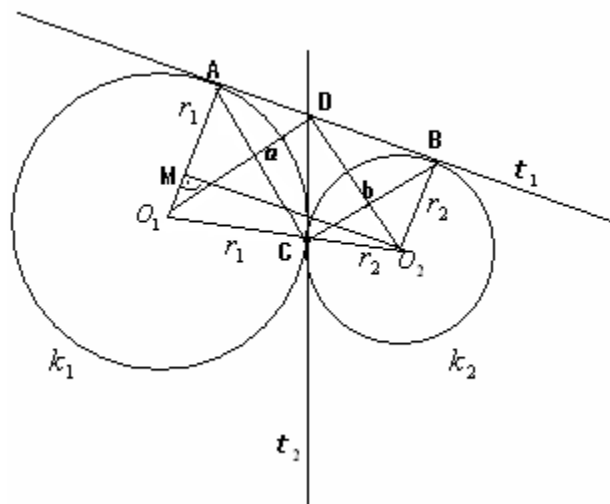


ЗАДАЧИ ЗА ИЗЧИСЛЕНИЯ ОТ ОКРЪЖНОСТ

Румяна Несторова, гр.Враца

В училище задачите по физика, за разлика от математическите задачи, се решават параметрично и накрая в получения буквен израз за търсената величина се замества с дадените по условие конкретни числови данни. За тази цел учениците трябва да имат много добри умения за преобразуване на изрази. Ще разгледаме десет изчислителни задачи за окръжност, в които стойностите на дадените величини не са числови, а параметрични. Разработката е подходяща за ученици от гимназиален етап с повишен интерес към математиката. Решаването на задачите ще разшири и подобри уменията им за преобразуване на рационални и ирационални изрази, получени в задължителната подготовка.

Задача 1. Две окръжности k_1 и k_2 с радиуси съответно r_1 и r_2 се допират външно в точката C , а правата AB е тяхна обща външна допирателна ($A \in k_1$; $B \in k_2$). Намерете радиусите r_1 и r_2 , ако $AC=a$ и $BC=b$.



Решение: Нека $k_1(O_1; r_1 > 0)$, $k_2(O_2; r_2 > 0)$ са дадените окръжности и $r_1 > r_2$, а правата $t_1 = AB$ е тяхна обща външна допирателна. По условие $k_1 \cap k_2 = C$, $AC=a$, $BC=b$ ($a > 0, b > 0$). По Питагорова

теорема от правоъгълния $\triangle ACB$ намираме $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ако

$O_2M \perp O_1A$ ($M \in O_1A$), то в правоъгълния $\triangle O_1O_2M$ от теоремата на Питагор

следва $O_2M^2 = O_1O_2^2 - O_1M^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \Rightarrow O_2M = 2\sqrt{r_1r_2}$. Тъй като

MO_2BA - правоъгълник, то $AB = O_2M \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{r_1r_2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{4} = r_1r_2$ (1). Нека

правата $t_2 = CD$ ($D \in AB$) е общата вътрешна допирателна на k_1 и k_2 в точката C .

От $CD = AD = DB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$ и $\triangle O_1DO_2 \sim \triangle ACB$ (I признак) $\Rightarrow \frac{O_1O_2}{AB} = \frac{CD}{h_{AB}}$

и тъй като височината към хипотенузата $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ в правоъгълния $\triangle ACB$ с

катети $AC=a$, $BC=b$ е $h_{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, то $\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \Rightarrow$

$r_1 + r_2 = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab}$ (2). От (1) и (2) следва, че r_1 и r_2 са корени на квадратното

уравнение $r^2 - \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab} \cdot r + \frac{a^2 + b^2}{4} = 0$ с дискриминанта $D = \frac{(a^2 - b^2)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{4a^2 b^2} \Rightarrow$

$$r_{1,2} = \frac{\frac{(a^2 + b^2)}{2ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \pm \frac{|a^2 - b^2|}{2ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{a}{2b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \text{ и } r_2 = \frac{b}{2a} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Задача 2. Две окръжности с радиуси a и b се допират външно.

Намерете радиуса на окръжността, вписана в криволинейния триъгълник, заключен между окръжностите и тяхната обща външна допирателна.

Решение:

Нека $k_1(O_1; r_1 = a > 0)$ и

$k_2(O_2; r_2 = b > 0)$ са дадените

окръжности и $a > b$, а правата t

е тяхна обща външна

допирателна. Означаваме

$k_1 \cap k_2 = F$, $k_1 \cap t = T_1$, $k_2 \cap t = T_2$,

$k_3(O_3; r > 0)$ - окръжността, вписана в криволинейния $\Delta T_1 F T_2$. Ако

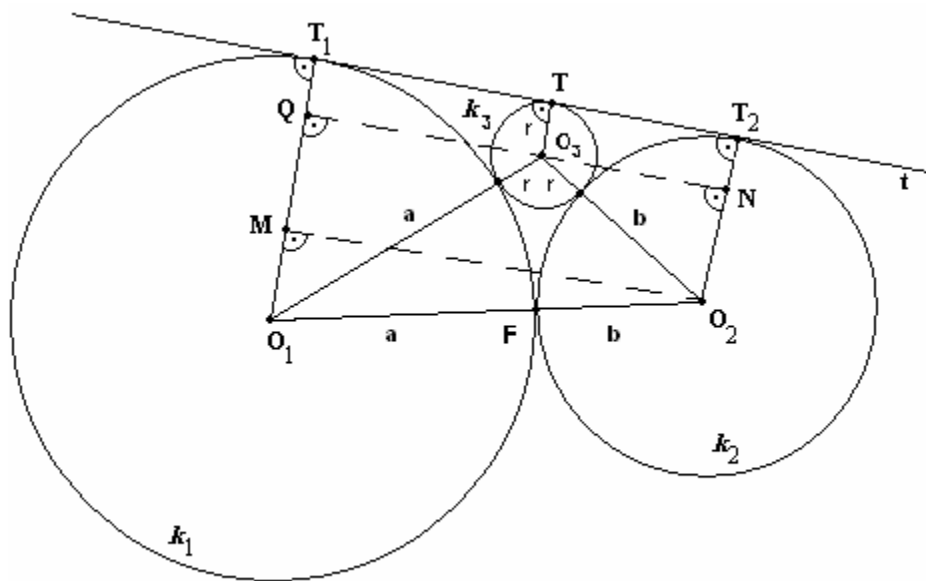
$O_2 M \perp O_1 T_1$ ($M \in O_1 T_1$), то в правоъгълния $\Delta O_1 O_2 M$ от теоремата на Питагор

следва $O_2 M^2 = O_1 O_2^2 - O_1 M^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2 \Rightarrow O_2 M = 2\sqrt{ab}$. От правоъгълника

$MO_2 T_2 T_1$ намираме $T_1 T_2 = O_2 M = 2\sqrt{ab} \Rightarrow T_1 T + T T_2 = 2\sqrt{ab}$, където $T = k_3 \cap t$. Нека

$O_3 Q \perp O_1 T_1$ ($Q \in O_1 T_1$) и $O_3 N \perp O_2 T_2$ ($N \in O_2 T_2$) $\Rightarrow QN = T_1 T_2$ и $NT_2 = QT_1 = r$. В $\Delta O_2 N O_3$

($\angle O_2 N O_3 = 90^\circ$) намираме $O_2 N = b - r$ и $O_2 O_3 = b + r$, откъдето



$O_3N = O_3O_2^2 - O_2N^2 = \sqrt{(b+r)^2 - (b-r)^2} = 2\sqrt{br}$ (Теорема на Питагор), но TO_3NT_2 е правоъгълник и следователно $TT_2 = O_3N = 2\sqrt{br}$.

Аналогично от правоъгълния ΔQO_1O_3 намираме

$$QO_3 = T_1T = \sqrt{(a+r)^2 - (a-r)^2} = 2\sqrt{ar}.$$

$$\text{От } T_1T_2 = QO_3 + O_3N \Rightarrow 2\sqrt{br} + 2\sqrt{ar} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow r = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}.$$

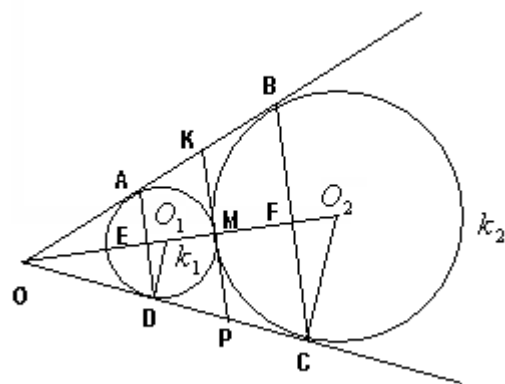
Задача 3. Две окръжности k_1 и k_2 с радиуси r и R се допират външно в точката M , а правите AB и CD са техните общи външни допирателни ($A, D \in k_1$; $B, C \in k_2$).

Докажете, че в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност и намерете нейния радиус.

Решение: Нека $k_1(O_1; r > 0)$ и $k_2(O_2; R > 0)$ са дадените окръжности, правите AB и CD са техните общи външни допирателни и $AB \cap CD = O$. Построяваме централата O_1O_2 и радиусите O_1D , O_2C в допирните точки D и $C \Rightarrow O_1D \perp CD$ и $O_2C \perp CD$. Тъй като O_1O_2 се явява ос на симетрия за k_1 и k_2 , то $O \in O_1O_2$ и точките A и D , както и точките B и C са симетрични относно $O_1O_2 \Rightarrow ABCD$ е

равнобедрен трапец. Ако $AD + BC = AB + DC \Leftrightarrow AB = \frac{AD + BC}{2}$, то в $ABCD$ може да се впише окръжност. Следователно трябва да докажем, че отсечката AB е равна на средната отсечка на трапеца.

Ако правата t е общата вътрешна допирателна на k_1 и k_2 в точката M и $t \cap AB = K$, $t \cap DC = P$, то $KA = KM$, $KB = KM$, $PD = PM$, $PC = PM \Rightarrow KP$ е средна отсечка в $ABCD$ и $KP = AB \Rightarrow$ в $ABCD$ може да се впише окръжност. Нека EF ($E = AD \cap O_1O_2$, $F = BC \cap O_1O_2$) е диаметърът на тази окръжност. Ако $EO_1 = x$, $FO_2 = y$, то MF и ME са радиуси на вписаната окръжност и следователно $R - y = r + x$. От подобие на ΔO_1ED и ΔO_2FC получаваме



$$\frac{O_1 E}{O_2 F} = \frac{O_1 D}{O_2 C} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r}{R}. \text{ Решаваме системата } \begin{cases} R - y = r + x \\ \frac{x}{y} = \frac{r}{R} \end{cases} \text{ и получаваме } y = \frac{R^2 - rR}{R - r},$$

откъдето радиусът на вписаната окръжност $MF = R - y = \frac{2rR}{R+r}$.

Задача 4. Два от върховете на квадрат лежат на окръжност с радиус R , а другите два върха лежат на допирателна към тази окръжност. Намерете страната на квадрата.

Решение: Нека $ABCD$ е квадрат и $A, B \in k (O; R > 0)$, а $D, C \in t$ -допирателна към k , $k \cap t = Q$, $OQ \cap AB = T$ и $AB = x (x > 0)$. Очевидно $t \perp AB$ и $R < x < 2R$.

От $OQ \perp CD$ следва $QT \parallel BC \parallel AD$ и $OT \perp AB$.

От правоъгълния $\triangle ATO$ следва

$$OT^2 = AO^2 - AT^2 = R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ (Теорема на Питагор)}$$

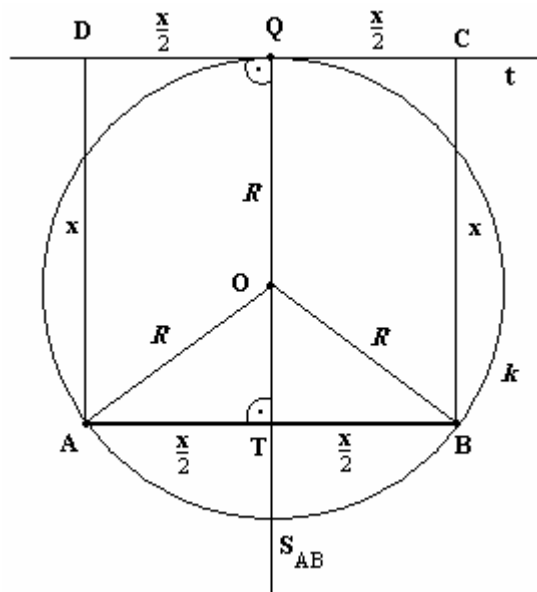
$$\Rightarrow OT = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2}.$$

$$OT \cdot TQ = AD = AB = TO + OQ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2} + R$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{4R^2 - x^2} + 2R,$$

$$2x - 2R = \sqrt{4R^2 - x^2} \Rightarrow x(5x - 8R) = 0, \text{ HO}$$

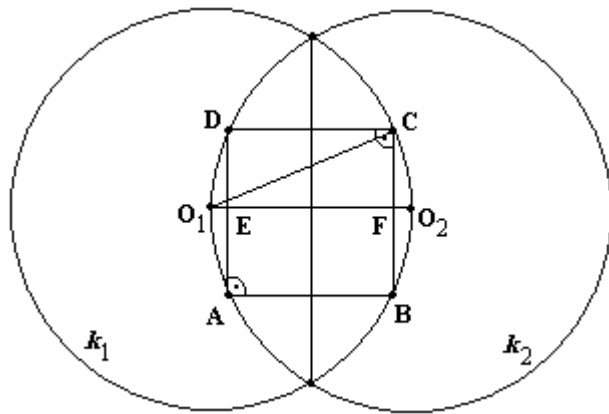
$$R < x < 2R \Rightarrow 5x = 8R \Rightarrow AB = \frac{8R}{5} = 1,6R.$$



Задача 5. Две окръжности с радиус r са разположени така, че разстоянието между центровете им е равно на радиуса r . В сечението на окръжностите е вписан квадрат. Намерете страната на квадрата.

Решение: Нека $k_1(O_1; r > 0)$ и $k_2(O_2; r > 0)$ са дадените окръжности, $O_1O_2 = r$ и $ABCD$ е квадрат, вписан в сечението на k_1 и k_2 ($A, D \in k_2; B, C \in k_1$).

$$\text{Ако } AB=x(r>x>0) \Rightarrow CF=FB=\frac{BC}{2}=\frac{x}{2}, O_1E=O_2F=\frac{r-x}{2},$$



$$O_1F = O_1E + EF = \frac{r-x}{2} + x = \frac{r+x}{2}.$$

В $\triangle O_1FC$ ($\angle O_1FC = 90^\circ$) от теоремата на Питагор следва

$$O_1F^2 + FC^2 = O_1C^2 \Rightarrow \left(\frac{r+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2rx - 3r^2 = 0,$$

$$\text{но } x > 0 \Rightarrow x = \frac{-r + r\sqrt{7}}{2} = \frac{r(\sqrt{7}-1)}{2} \Rightarrow AB = \frac{r(\sqrt{7}-1)}{2}.$$

Задача 6. Хорда с дължина b разделя дадена окръжност на два сегмента. В по-малкия от тях е вписан квадрат със страна a . Докажете, че $b \geq \sqrt{5}a$ и намерете радиуса на окръжността, ако $b=3a$.

Решение: Нека са дадени окръжност $k(O; r > 0)$, хорда $EF=b$ ($E, F \in k, 0 < b \leq 2r$) и квадрат $ABCD$ ($A, B \in EF; C, D \in k$) със страна $AB=a$ ($a > 0$).

Ако радиусът $r=ON \perp AB$ ($ON \perp EF$) и

$ON \cap AB = Q, ON \cap DC = M$, то

Q е среда на EF и AB , M е среда на DC и

$$AQ=QB=DM=MC=\frac{a}{2}, EQ=QF=\frac{b}{2}.$$

В правоъгълния $\triangle EOQ$ от теоремата на Питагор следва

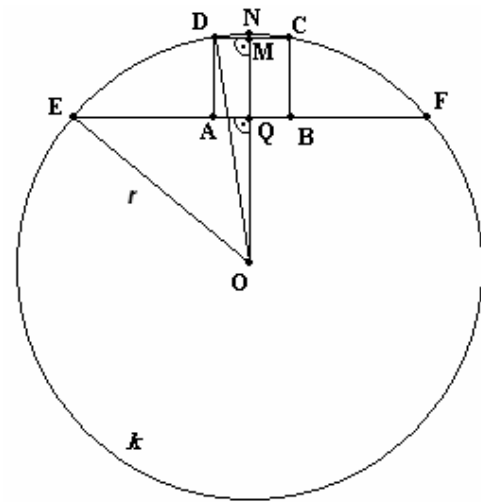
$$EO^2 = EQ^2 + OQ^2 \Leftrightarrow OQ^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow OQ = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (2r \geq b \Rightarrow r^2 - \frac{b^2}{4} \geq 0).$$

В правоъгълния $\triangle DOM$ от теоремата на Питагор следва $OD^2 = DM^2 + OM^2 \Rightarrow$

$$OD^2 = DM^2 + (OQ + QM)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + a\right)^2 \Rightarrow \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b^2 - 5a^2}{8a}, \text{ откъдето } b \geq \sqrt{5}a \text{ и } r =$$

$$\frac{\sqrt{b^4 + 6a^2b^2 + 25a^4}}{8a} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \text{ при } b=3a.$$



Задача 7. Правоъгълник със страни a и b е разделен от диагонала си на два триъгълника и във всеки от тях е вписана окръжност. Намерете разстоянието между центровете на тези окръжности.

Решение: Ако $ABCD$ е даденият правоъгълник със страни $AB = a (a > 0)$, $BC = b (b > 0)$ и $k_1(O_1; r > 0)$ е окръжността, вписана в $\triangle ACD$, то окръжността $k_2(O_2; r)$, вписана в $\triangle ABC$ има същия радиус. По Питагорова теорема от правоъгълния $\triangle ACD$ намираме $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

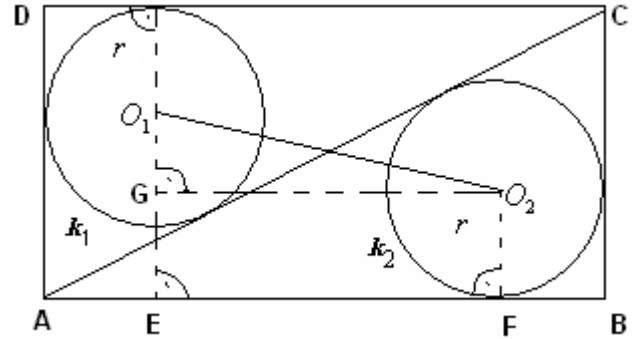
От равенството $AC + 2r = AD + DC \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + 2r = a + b \Rightarrow a - 2r = \sqrt{a^2 + b^2} - b$ (1) и $b - 2r = \sqrt{a^2 + b^2} - a$ (2).

Нека $O_1E \perp AB (E \in AB)$, $O_2F \perp AB (F \in AB)$ и $O_2G \perp O_1E (G \in O_1E) \Rightarrow$

$O_1E = AD - r = b - r$ и $O_2F = r$. В правоъгълния $\triangle O_1GO_2$ намираме $O_2G = EF = AB - 2r = a - 2r$, $O_1G = O_1E - GE = O_1E - O_2F = (b - r) - r = b - 2r$ и от теоремата на Питагор, (1) и (2) следва

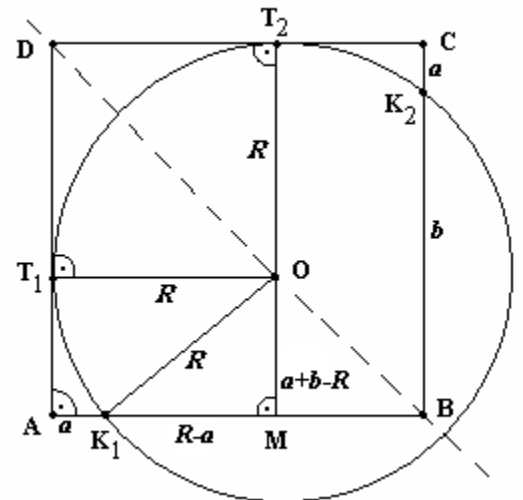
$$O_1O_2^2 = O_1G^2 + O_2G^2 = (b - 2r)^2 + (a - 2r)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - b)^2 = 3(a^2 + b^2) - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{3(a^2 + b^2) - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (подкоренната величина } 3(a^2 + b^2) - 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} > 0 \text{ за всяко } a > 0 \text{ и } b > 0).$$



Задача 8. Окръжност се допира до две съседни страни на квадрат и разделя всяка от другите две негови страни на части с дължини a и b . Намерете радиуса на окръжността.

Решение: Нека са дадени квадрат $ABCD$, окръжност $k(O; R > 0)$ и $AD \cap k = T_1 (OT_1 \perp AD)$, $DC \cap k = T_2 (OT_2 \perp DC)$, $AB \cap k = K_1$, $BC \cap k = K_2$, $AK_1 = CK_2 = a (a > 0)$, $K_1B = K_2B = b (b > 0)$. От условието на задачата следва, че точка O е вътрешна за $ABCD$ и $O \in DB$, $AB = a + b$, $a \neq b$ и радиусът R удовлетворява неравенството $\frac{a + b}{2} < R < a + b$.



Ако $M = OT_2 \cap AB$, то $OM \perp AB$ и $AMOT_1$ – правоъгълник $\Rightarrow AM = OT_1$. В ΔK_1MO ($\angle K_1MO = 90^\circ$) страната $OK_1 = R$, $K_1M = AM - AK_1 = OT_1 - AK_1 = R - a$,

$OM = MT_2 - OT_2 = a + b - R$ и $K_1O^2 = K_1M^2 + MO^2$ (Теорема на Питагор) $\Rightarrow$

$R^2 = (R - a)^2 + (a + b - R)^2$, откъдето

$$R^2 - 2(2a + b)R + 2a^2 + b^2 + 2ab = 0, R_{1,2} = 2a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab} \Rightarrow$$

$$R_1 = 2a + b + \sqrt{2a^2 + 2ab} > a + b \text{ и}$$

$$\frac{a+b}{2} < R_2 = 2a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab} < a + b \Rightarrow R = 2a + b - \sqrt{2a^2 + 2ab}.$$

Задача 9. Върховете A и B на квадрат $ABCD$ лежат на окръжност с радиус r . Допирателната от върха D към окръжността е двойно по-голяма от страната на квадрата. Намерете страната на квадрата.

Решение: По условие имаме $k(O; r > 0)$ и квадрат $ABCD$

($A, B \in k$). Нека правата t е допирателна от D към k и

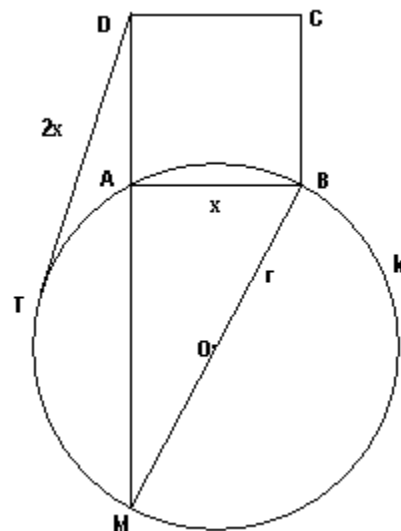
$t \cap k = T$, $AB = x (x > 0)$, $DA \cap k = M$. Тъй като $DT = 2x$ и

$$DM \cdot DA = DT^2 \Rightarrow DM \cdot x = 4x^2 \Rightarrow DM = 4x \Rightarrow AM = 3x.$$

От $\angle MAB = 90^\circ$ следва, че BM е диаметър в k .

От правоъгълния ΔAMB намираме

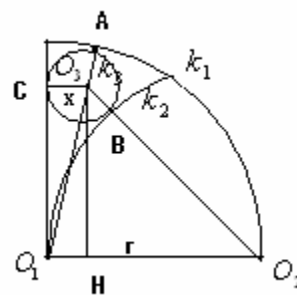
$$AB^2 + AM^2 = MB^2 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 4r^2, \text{ откъдето } AB = x = \frac{r\sqrt{10}}{5}.$$



Задача 10. Даден е правоъгълен кръгов сектор от окръжност k_1 с радиус r и център O_1 . Окръжността k_2 със същия радиус r и център O_2 в края на дъгата на сектора го разделя на два криволинейни триъгълника. Намерете радиуса на окръжността, вписана в по-малкия криволинеен триъгълник.

Решение: Нека $k_3(O_3; x)$ е окръжността, вписана в по-малкия криволинеен триъгълник. Построяваме централите $O_3O_2 = r + x$,

$O_3O_1 = r - x$ и допирните точки A, B, C на k_3 със страните на малкия криволинеен триъгълник, като $O_3C \perp O_1C$. Нека O_3H е височината към O_1O_2 в $\Delta O_1O_2O_3$ ($H \in O_1O_2$) $\Rightarrow O_1H = x$ и $O_2H = r - x$. От правоъгълния ΔO_1HO_3 следва



$O_3H^2 = O_1O_3^2 - HO_1^2$, а от правоъгълния ΔHO_2O_3 следва $O_3H^2 = O_2O_3^2 - HO_2^2$.

Следователно $O_1O_3^2 - HO_1^2 = O_2O_3^2 - HO_2^2 \Leftrightarrow (r-x)^2 - x^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2 \Rightarrow x = \frac{r}{6}$.

Според нивото на възможностите на учениците някои от задачите могат да бъдат решени в ЗИП/ПП или СИП, а останалите да бъдат зададени за самостоятелна работа. Решаването на подбраните задачи подпомага затвърдяването и осмислянето на основни геометрични знания. Наличието на параметрични данни допринася с усъвършенстването на уменията на учениците за решаване на геометрични задачи паралелно да се развиват и аналитичните им способности.

Литература:

1. Практикум по решению математических задач- В.Гусев, В.Литвиненко, А.Мордкович, изд. Просвещение, 1985г.