

ПОДГОТОВКА ЗА SAT II

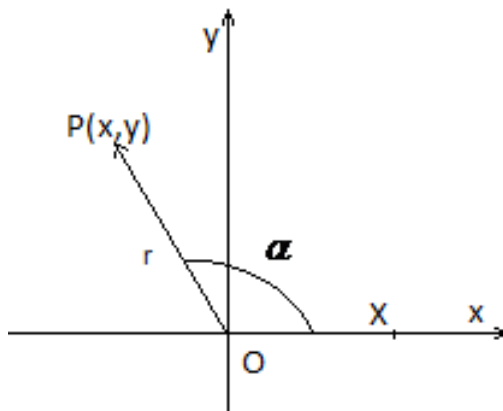
Румяна Несторова, гр.Враца

Целта на разработката е да дадем някои допълнителни математически знания извън училищния курс по математика (УКМ), необходими за изпита по математика при подготовката на ученици от средните училища за SAT II. Знанията се отнасят за функциите „секанс“ и „косеканс“ и обратните тригонометрични функции (т. нар. „аркус функции“ или само „аркфункции“). Предложени са и съответни несложни задачи.

Ако $P = (x, y)$ е точка в правоъгълна координатна система xOy , r е дължината на радиус-вектора на точката P , т.е. $r = OP$ и $\alpha = \angle XOP + 2k\pi$, където X е точка от положителната част на оста Ox , k – цяло число, а α се измерва в градуси или радиани, да припомним, че:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \cos \alpha = \frac{x}{r}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Функцията „секанс“ се означава с $\sec$, а „косеканс“ – с cosec и по дефиниция имаме съответно $\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin \alpha}$.



От тези дефиниции освен познатите основни тригонометрични твърдения следват и няколко нови равенства за допустимите стойности на аргумента: $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$; $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$; $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$; $\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

Стойностите на тези функции за основните ъгли са дадени в следната таблица:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-	-1	-	1
$\operatorname{cosec} \alpha$	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	-	-1	-

В следващата таблица са обобщени допустимите стойности за аргумента и множеството от функционалните стойности за всяка от функциите:

Функция	Дефиниционно множество	Множество от стойности на функцията
$\sin x$	$\mathbb{R}$ (множ. на реалните числа)	$-1 \leq \sin x \leq 1$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$, k -цяло число	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, k -цяло число	$\mathbb{R}$
$\sec x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$, k -цяло число	$\sec x \leq -1$ или

		$\sec x \geq 1$
$\cos ecx$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, k -цяло число	$\cos ecx \leq -1$ или $\cos ecx \geq 1$

Да отбележим, че функциите $\sec x$ и $\cos ecx$ не са непрекъснати за всяко x , но са периодични и периодът им е 2π .

В отделните квадранти знаците на $\sin x$ и $\cos ecx$, както и знаците на $\cos x$ и $\sec x$ съвпадат:

Квадрант	I $0^\circ - 90^\circ$	II $90^\circ - 180^\circ$	III $180^\circ - 270^\circ$	IV $270^\circ - 360^\circ$
$\sin x, \cos ecx$	+	+	-	-
$\cos x, \sec x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x, \operatorname{cot} g x$	+	-	+	-

Нека $f(t)$ е функция с дефиниционно множество M и нека N е множеството на функционалните ѝ стойности. Ще казваме, че функцията $\varphi(x)$ е обратна на $f(t)$, ако:

1. дефиниционната област на $\varphi(x)$ е N ;
2. стойностите на $\varphi(x)$ принадлежат на M ;
3. при всички стойности на x от N е изпълнено $f(\varphi(x)) = x$.

Не е трудно да се убедим, че всяка функция има поне една обратна. Наистина да разгледаме уравнението $f(t) = x$ по отношение на t . За всяко x от N това уравнение се удовлетворява при поне едно значение на t от M , защото всяко число от N е функционална стойност на $f(t)$. Да изберем при всяко x от N кое да е от решенията на разглежданото уравнение и да го означим с $\varphi(x)$. По този начин получаваме функция, която е дефинирана навсякъде в N , приема стойности в M и изпълнява условието $f(\varphi(x)) = x$, т.е. намерихме една обратна функция на $f(t)$. Да забележим, че третото условие изразява главния момент от дефиницията. Второто условие се налага само, за да можем да образуваме $f(\varphi(x))$, а първото условие осигурява дефиниционната област на

$\varphi(x)$ да е по възможност по-голяма. Една функция е *обратима*, когато тя притежава само една обратна функция. Ако $f(t)$ е обратима и $\varphi(x)$ е нейната обратна, то лесно се проверява, че $\varphi(f(t))=t$ за всички стойности на t от дефиниционната област M на $f(t)$. Изискването една обратима функция да притежава единствена обратна е еквивалентно с това функцията да приема всяка своя стойност само веднъж.

Сега да разгледаме $f(t) = \sin t$, която е дефинирана за всички реални стойности на t . Тази функция не е обратима, защото е периодична и следователно приема всяка своя стойност безброй много пъти. Но бихме могли да разгледаме функцията $f(t) = \sin t$ само в интервала $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тогава получаваме вече една обратима функция. Единствената ѝ обратна е т. нар. „аркус синус“, която се означава $\arcsin x$. Дефиниционната област на функцията $\arcsin x$ е затвореният интервал $[-1; 1]$, защото, както видяхме тази дефиниционна област не е нищо друго освен множеството от функционалните стойности на функцията $f(t) = \sin t$. Функцията $\arcsin x$ удовлетворява неравенствата $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, защото стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на $f(t)$. Най-накрая, при всички стойности на x от затворения интервал $[-1; 1]$ е изпълнено $\sin(\arcsin x) = x$

По подобен начин се дефинира и функцията $\arccos x$ (аркус косинус) като обратна на функцията $\cos t$, разглеждана в интервала $0 \leq t \leq \pi$ или, което е същото, като онова решение на y на уравнението $\cos y = x$, което удовлетворява неравенствата $0 \leq t \leq \pi$. Функцията $\arccos x$ е дефинирана в затворения интервал $[-1; 1]$ и стойностите ѝ се намират в интервала $[0; \pi]$. Освен това $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \leq x \leq 1$ и $\arccos(\cos t) = t$ при $0 \leq t \leq \pi$.

Функцията $\operatorname{tg}(t)$ не е дефинирана при онези стойности на t , за които $\cos(t) = 0$. В частност тя не е дефинирана при $t = \pm \frac{\pi}{2}$. В отворения интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тя обаче е дефинирана. Лесно се съобразява (например с теоремата

на Рол), че функцията е обратима. Сега обратната функция на $tg(t)$, разглеждана при $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, се означава с $arctgx$ и се нарича „аркус тангес“. Функцията $arctgx$ е дефинирана при всички реални стойности на x , защото нейната дефиниционна област (както знаем) съвпада с множеството от функционалните стойности на $tg(x)$. Така имаме $tg(arctgx) = x$ за всяко x и $arctg(tgt) = t$ за всяко t от интервала $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Най-сетне функцията $f(t) = \cot gt$, разглеждана при $0 < t < \pi$ е обратима. Обратната ѝ е функцията $arccotgx$ (аркус котангенс). По аналогичен начин се дефинират и функциите $arc \sec x$ (аркус секанс) като обратна на $f(t) = \sec t$, разглеждана в $\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и $\arccos ecx$ (аркус косеканс) като обратна на $f(t) = \csc t$, разглеждана в $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

От дефиницията на обратна функция на една обратима функция следва, че графиките на взаимно обратните функции са симетрични спрямо правата $y=x$ (ъглополовящата на I и III квадрант). Следователно графиките на аркфункциите и тези на съответните тригонометричните функции са симетрични спрямо правата $y=x$. Функционалните стойности на разглежданите обратни тригонометрични функции, т.е на аркфункциите, принадлежат на отбелязаните по-горе интервали. Тези стойности се наричат още „главни стойности“ на съответните аркфункции.

По-долу предлагаме задачи, свързани с главните стойности на най-често използваните /първите три/ аркфункции:

Задача 1. Да се пресметне: $\arcsin 1$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение: Ако $y = \arcsin 1$, то $\sin y = 1$ и значи $y = \frac{\pi}{2}$, защото разглеждаме само главни стойности, т.е. $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. С подобни разсъждения намираме

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}; \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Задача 2. Да се пресметне: $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$, $\sin(\arccos \frac{5}{13})$ и $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{4}{5} + \arctg \frac{7}{24})$.

Решение: От $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ следва, че $\cos(\arcsin \frac{1}{2}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Нека $\arccos \frac{5}{13} = x$. Тогава $\cos x = \frac{5}{13}$ и $x \in [0, \pi]$. Оттук $\sin x \geq 0$ и следователно $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{12}{13}$. Тогава $\sin(\arccos \frac{5}{13}) = \sin x = \frac{12}{13}$.

Нека сега $\arcsin \frac{4}{5} = x$. Тогава $\sin x = \frac{4}{5}$ и $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Понеже $\cos x \geq 0$, то

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$ и значи $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$. Ако $y = \arctg \frac{7}{24}$, то $\operatorname{tg} y = \frac{7}{24}$. Имаме

$$\operatorname{tg}(\arcsin \frac{4}{5} + \arctg \frac{7}{24}) = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{117}{44}.$$

Задача 3. Ако $a, b \in [-1, 1]$ и $c \in \mathbb{R}$, да се докаже, че:

$$a / \sin(\arccos b) = \sqrt{1 - b^2}, \cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2} \text{ и } \operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}, a \neq 0;$$

$$b / \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2};$$

$$b / \arcsin(-a) = -\arcsin a, \arccos(-b) = \pi - \arccos b \text{ и } \arctg(-c) = -\arctg c;$$

$$d / \cos(4 \arccos b) = 8b^4 - 8b^2 + 1$$

Решение: а/Ще се спрем на последното равенство в а/ (останалите се доказват аналогично). Нека $y = \arccos a$. Тогава $\cos y = a$ и $y \in [0, \pi]$. Имаме, че $\sin y \geq 0$ и значи $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - a^2}$. Понеже $a \neq 0$, то $y \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\text{Следователно } \operatorname{tg}(\arccos a) = \operatorname{tgy} = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

б/Равенството следва от тъждеството $\sin(\arcsin a) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos a) = \cos(\arccos a) = a$.

в/Ще се спрем на второто равенство във в). Нека $\arccos(-b) = x$. Тогава $\cos x = -b$, което е еквивалентно с $\cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = b$, т.е. $\cos(\pi - x) = b$. Оттук $\arccos b = \pi - x$ и $x = \pi - \arccos b$. Получаваме, че $\arccos(-b) = x = \pi - \arccos b$, което трябва да се докаже.

г/Нека $\arccos b = x$. Тогава $\cos x = b$ и $\cos(4\arccos b) = \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x =$

$$= 1 - 2(2\sin x \cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 8(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 8b^4 - 8b^2 + 1.$$

Задача 4. Да се докаже, че $\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$, ако $x \neq 0$.

$$\text{Решение: Понеже } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2) = x^2 \text{ и } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2, \text{ то}$$

достатъчно е да приложим функцията $\operatorname{arctg} x$ към двете страни на полученото равенство.

Задача 5. Да се докаже, че $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x \geq 1$.

Решение: Означете $y = 2\operatorname{arctg} x$ и $z = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, след което пресметнете tgy , като използвате формулата за тангенс от двоен ъгъл. Пресметнете също $\operatorname{tg} z$ след предварително изразяване на $\sin z$ и $\cos z$.

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 6. Пресметнете:

а/ $\arccos \frac{1}{2}$; $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$; $\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$ и $\sin \left(3 \arcsin \frac{1}{4} \right)$;

б/ $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ и $\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5} \right)$;

в/ $\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot gx + \operatorname{tg} x}$.

Задача 7. Да се докаже, че:

а/ $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$;

б/ $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

в/ $\arcsin \frac{7}{25} + \arcsin \frac{24}{25} = \arcsin \frac{336}{625}$;

г/ $\arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} + \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi}{2}$ / a, b -реални числа, $a \neq 0$ /;

д/ $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{105}}{4} = \pi$;

е/ $\arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$;

ж/ $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}(x + \operatorname{arctg} 2), \operatorname{tg} x \neq \frac{1}{2}$.

Литература

1. Augustin Cota, Mariana Răduțiu, Marta Rado, Florica Vornicescu, Matematică, Manual pentru clasa a IX-a, Geometrie și trigonometrie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1986, 150-151.