

Практико-приложни задачи в обучението по математика

д-р Румяна Несторова, Враца

Във всички действащи учебници по математика се използват задачи с практико-приложен характер с цел мотивиране на учениците за придобиване на математически знания и умения и показване на практическата им приложимост.

От 2012 г. практико-приложни задачи се използват и в националното външно оценяване в края на 7. клас с цел подобряване на приложните умения на учениците и резултатите им в PISA*. Съгласно учебно-изпитната програма по математика за национално външно оценяване в края на 7. клас вторият модул на изпитния тест съдържа 2 задачи с практико - приложен характер със свободен отговор. По този начин се реализира идеята за проверка на способността на учениците да използват и прилагат знания, умения и опит, придобити в училище, в ситуации от реалния живот с различен контекст.

В действащата учебно-изпитна програма за държавен зрелостен изпит по математика не е заложено изрично изискването за оценяване чрез практико-приложни задачи. Съгласно нея изпитният тест съдържа 28 задачи от три типа:

20 задачи от затворен тип с четири възможни отговора (от които само един е верен);

5 задачи със свободен отговор;

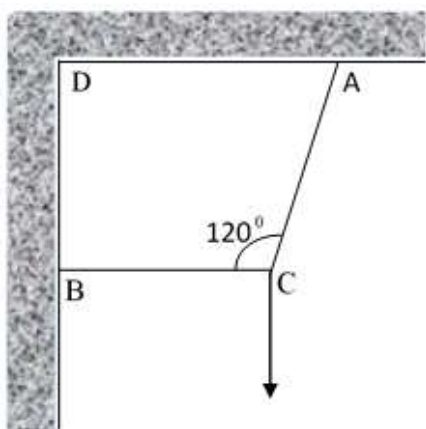
3 задачи, изискващи обосновани аналитико-синтетични решения.

В темите за зрелостен изпит по математика обикновено се използват практико-приложни задачи от лихви, диаграми и др. с цел оценяване на ученическите умения за използване на математически методи на мислене и представяне чрез формули, модели, конструкции, графики, диаграми, т.е. за „работа с данни“.

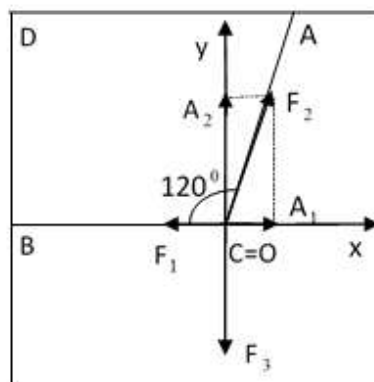
В статията са разгледани примерни приложения на изучавани математически знания в гимназиален етап. Подобни задачи могат да бъдат използвани в изпитни материали за проверка на математическата компетентност на учениците, а също не и в математически състезания. Положителна тенденция е използването на практико-приложни задачи от учителите при оценяване постиженията на учениците чрез работа по проекти.

*Програмата за международно оценяване PISA (*The Program for International Student Assessment*) на Организацията за икономическо сътрудничество и развитие OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) изследва грамотността на учениците в областите четене, математика и природни науки от 2000 година през тригодишни периоди.

Задача 1. Тяло с тегло от 30 N се удържа от две пружини AC и BC (черт.1а). Намерете големината на силите, действащи върху пружините, ако $\angle ACB = 120^\circ$, $\angle DBC = \angle ADB = 90^\circ$.



черт. 1а



черт. 1б

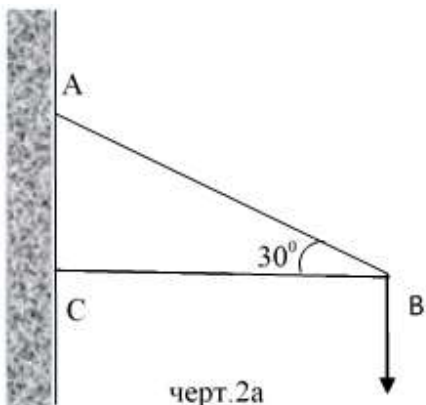
Решение: В точката C действат три сили (черт. 1б): $\vec{F}_1$ - действаща на BC , $\vec{F}_2$ - действаща на AC и $\vec{F}_3$ - теглото на тялото. Избираме правоъгълна координатна система Oxy , където координатното начало $O \equiv C$, оста Ox съвпада с противоположния лъч на лъча CB , а оста $Oy \perp BC$ и лежи в полуравнината на правата CB , съдържаща точката A .

Силата $\vec{F}_2 = \vec{CA}_1 + \vec{CA}_2$, където $|\vec{CA}_1| = |\vec{F}_1|$ и $|\vec{CA}_2| = |\vec{F}_3| = 30\text{ N}$.

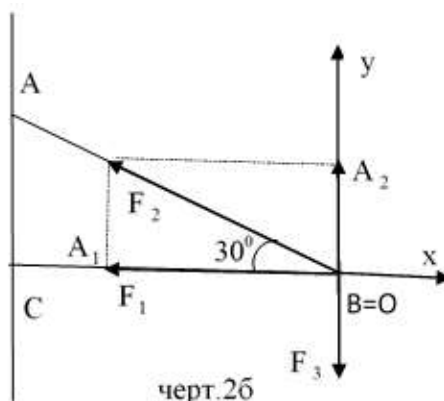
$$\text{От } \frac{|\vec{CA}_2|}{|\vec{F}_2|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = \frac{2 \cdot |\vec{CA}_2|}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 30}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}\text{ N}.$$

$$\text{От } \frac{|\vec{CA}_1|}{|\vec{F}_2|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{CA}_1| = \frac{|\vec{F}_2|}{2} = 10\sqrt{3}\text{ N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = 10\sqrt{3}\text{ N}.$$

Задача 2. Тяло с тегло от 60 N се удържа от две пружини AB и CB (черт.2а). Намерете големината на силите, действащи върху пружините, ако $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. (подходяща за самостоятелна работа)



черт.2а



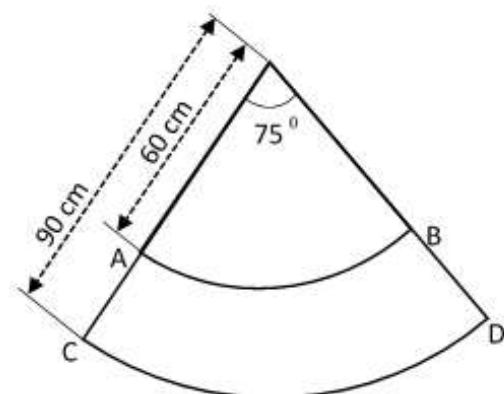
черт.2б

Решение: В точката B действат три сили (черт. 26): $\vec{F}_1$ - действаща на CB , $\vec{F}_2$ - действаща на AB и $\vec{F}_3$ - теглото на тялото. Избираме правоъгълна координатна система Oxy , където координатното начало $O \equiv B$, оста Ox съвпада с противоположния лъч на лъча BC , а оста $Oy \perp BC$ и лежи в полуравнината на правата CB , съдържаща точката A . Силата $\vec{F}_2 = \vec{BA}_1 + \vec{BA}_2$, където $\vec{BA}_1 = \vec{F}_1$ и $|\vec{BA}_2| = |\vec{F}_3| = 60 \text{ N}$.

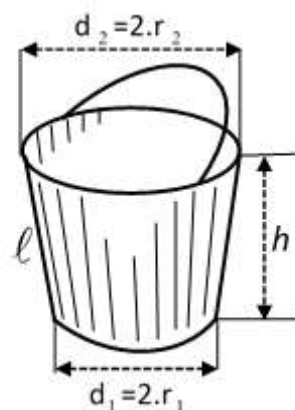
$$\text{От } \frac{|\vec{BA}_2|}{|\vec{F}_2|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = 2 \cdot |\vec{BA}_2| = 2 \cdot 60 = 120 \text{ N}.$$

$$\text{От } \frac{|\vec{BA}_1|}{|\vec{F}_2|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{BA}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |\vec{F}_2| = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = 60\sqrt{3} \text{ N}.$$

Задача 3. Намерете височината h на ведро, ако околната му повърхнина е изработена от част от кръгов венец с радиуси $R = 90 \text{ cm}$ и $r = 60 \text{ cm}$ и градусна мярка на дъгите на развивката $\alpha = 75^\circ$ (черт. 3а). Разходите на материал за шевове не се отчитат.



черт. 3а



черт. 3б

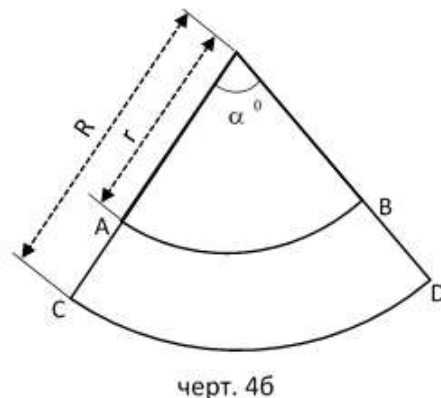
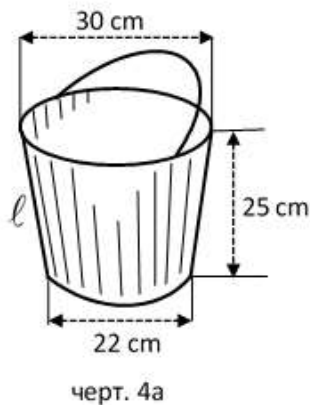
Решение: Нека $l_1 = \widehat{AB}$, $l_2 = \widehat{CD}$. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 60}{360^\circ} \cdot 75^\circ = 25\pi \text{ cm}$ и $l_1 = 2\pi r_1 \Rightarrow$

$25\pi = 2\pi r_1 \Rightarrow r_1 = 12,5 \text{ cm}$ (r_1 - радиус на дъното на ведрото). От $l_2 = \frac{2\pi \cdot 90}{360^\circ} \cdot 75^\circ = 37,5\pi \text{ cm}$ и

$l_2 = 2\pi r_2 \Rightarrow 37,5\pi = 2\pi r_2 \Rightarrow r_2 = 18,75 \text{ cm}$ (r_2 - радиус на отвора на ведрото). Следователно

$$h = \sqrt{(90 - 60)^2 - (18,75 - 12,5)^2} = \sqrt{30^2 - 6,25^2} \approx 29 \text{ cm} \text{ (черт.3б)}.$$

Задача 4. Височината на ведро е $h = 25 \text{ cm}$, а диаметрите на отвора и основата му са съответно $d_2 = 30 \text{ cm}$ и $d_1 = 22 \text{ cm}$ (черт. 4а). Изчислете размерите на заготовката за изработване на ведрото: градусната мярка α и радиусите R и r на дъгите на развивката на околната повърхнина на ведрото. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (подходяща за самостоятелна работа)



Решение: Образуващата $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 + (15 - 11)^2} \approx 25,3 \text{ cm}$.

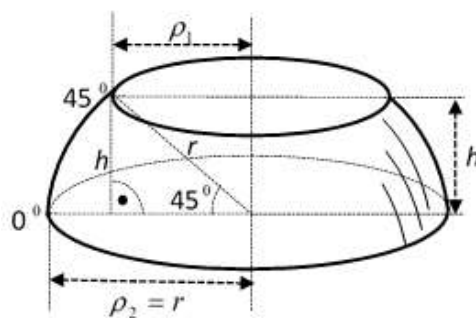
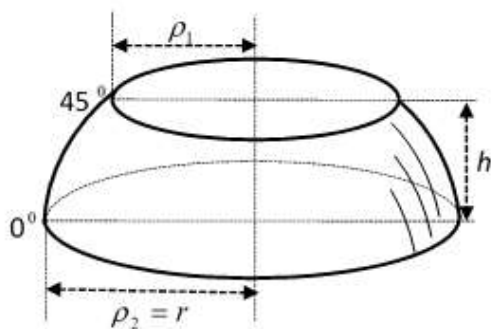
Нека $l_1 = \widehat{AB}$, $l_2 = \widehat{CD}$ (черт.4б) $\Rightarrow l_1 = \pi \cdot d_1 = 22\pi \text{ cm}$, $l_2 = \pi \cdot d_2 = 30\pi \text{ cm}$ (1)

$$\text{Но } \frac{R}{r} = \frac{l_2}{l_1} \Leftrightarrow \frac{r + 25,3}{r} = \frac{30\pi}{22\pi} \Leftrightarrow \frac{r + 25,3}{r} = \frac{15}{11} \Rightarrow r = 69,575 \approx 70 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow R \approx 69,6 + 25,3 \approx 95 \text{ cm} \Rightarrow l_2 = \frac{2\pi \cdot 95}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{19\pi \cdot \alpha^\circ}{36^\circ} \text{ cm}, l_1 = \frac{2\pi \cdot 70}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{7\pi \cdot \alpha^\circ}{18^\circ} \text{ cm} \quad (2)$$

От (1) и (2) следва, че $\alpha = 56,6^\circ \approx 57^\circ$.

Задача 5. Каква част от площта на земното кълбо е площта на кълбовия слой, определен от екватора и паралела с 45° северна географска ширина (черт. 5а).

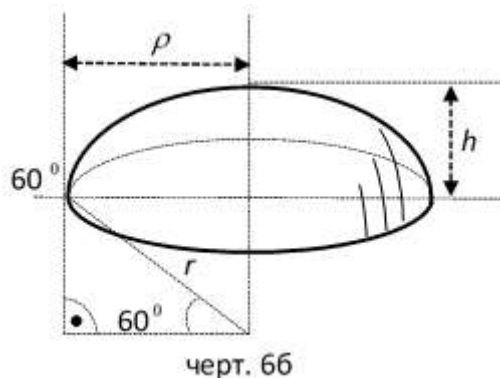
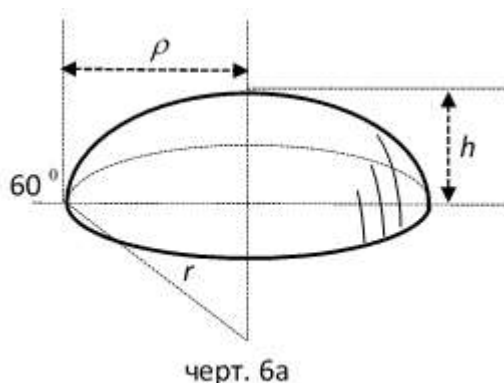


Решение: Лицето на сферичната зона се пресмята по формулата $S = 2\pi \cdot r \cdot h$, където h, ρ_1, ρ_2 са съответно височина и радиуси на основите на кълбовия слой, а r - радиус на земното кълбо. При 45° северна географска ширина $h = r \cdot \sin 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$S = 2\pi \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot r^2 \quad (\text{черт.5б}). \text{ Площта на земното кълбо е } S_1 = 4\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354 \Rightarrow S \approx 0,354 \cdot S_1.$$

Задача 6. Каква част от площта на земното кълбо е площта на кълбовия отрез (сегмент), определен в северното полукълбо от паралела с 60° географска ширина (черт. 6а).



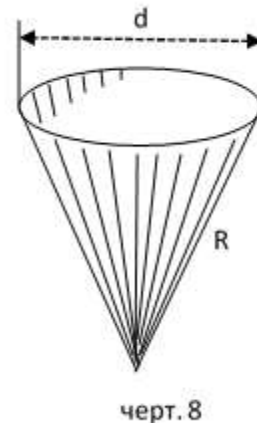
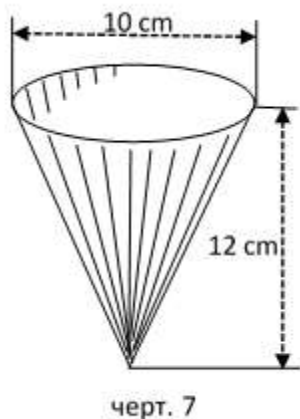
Решение: Лицето на сферичен отрез се пресмята по формулата $S = 2\pi \cdot r \cdot h$, където h и ρ са съответно височина и радиус на основата на отреза, а r - радиус на земното кълбо.

При 60° северна географска ширина $h = r - r \cdot \sin 60^\circ = \frac{r \cdot (2 - \sqrt{3})}{2} \Rightarrow$

$S = 2\pi \cdot r \cdot \frac{r \cdot (2 - \sqrt{3})}{2} = (2 - \sqrt{3})\pi \cdot r^2$. Площта на земното кълбо е $S_1 = 4\pi r^2 \Rightarrow$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(2 - \sqrt{3})}{4} \approx 0,067 \Rightarrow S \approx 0,067 \cdot S_1.$$

Задача 7. Конична фуния трябва да има диаметър $d = 10 \text{ cm}$ и височина $h = 12 \text{ cm}$. Изчислете размерите на заготовката ѝ: радиуса R и градусната мярка α на дъгата на развивката. Разходите на материал за шевове не се отчитат (черт. 7).



Решение: Образоващата $l = R = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$. Нека l_1 е

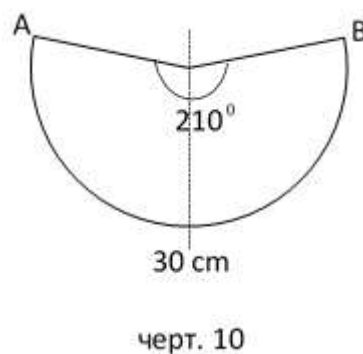
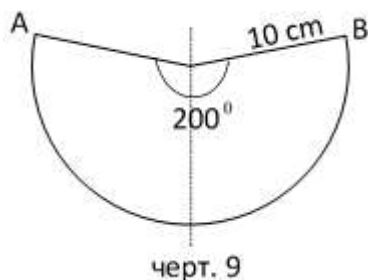
дължината на отвора на фунията. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 13}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \text{ cm}$ и $l_1 = \pi \cdot d = \pi \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow \alpha \approx 138^\circ$.

Задача 8. Конична фуния има диаметър d , равен на радиуса R на развивката, необходима за нейната изработка (черт. 8). Изчислете градусната мярка α на дъгата на развивката. Колко е диаметърът d на фунията, ако за изработването ѝ са необходими 120 cm^2 материал (без отчитане на разходите на материал за шевове).

Решение: Нека l_1 е дължината на отвора на фунията, а S -лицето на площта на заготовката. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$, $l_1 = \pi \cdot d$ и $d = R \Rightarrow \alpha = 180^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2$. От

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = 120 \text{ cm}^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{240}{\pi}} \approx 8,7 \text{ cm} \Rightarrow d = R \approx 8,7 \text{ cm}.$$

Задача 9. За изработване на конична фуния е изрязан кръгов сектор с ъгъл $\alpha = 200^\circ$ и радиус $R = 10 \text{ cm}$ (черт. 9). Изчислете височината h и диаметъра d на фунията. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (подходяща за самостоятелна работа)



Решение: Нека $l_1 = \widehat{AB}$. От $l_1 = \frac{2\pi \cdot 10}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{100\pi}{9} \text{ cm}$ и $l_1 = \pi \cdot d \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{100}{9} \approx 11 \text{ cm}$.

$$\text{Следователно } h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{100}{18}\right)^2} \approx 8,3 \text{ cm}.$$

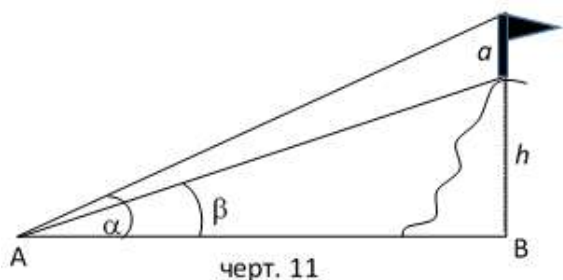
Задача 10. За изработване на конична фуния е изрязан кръгов сектор с дължина на дъгата $\widehat{AB} = 30 \text{ cm}$ и ъгъл $\alpha = 210^\circ$ (черт. 10). Изчислете височината h и диаметъра d на фунията. Разходите на материал за шевове не се отчитат. (подходяща за самостоятелна работа)

Решение: Нека $l_1 = \widehat{AB}$, l - образуваща. От $l_1 = \pi \cdot d = 30 \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{30}{\pi} = 30 : \frac{22}{7} \approx 9,5 \text{ cm}$.

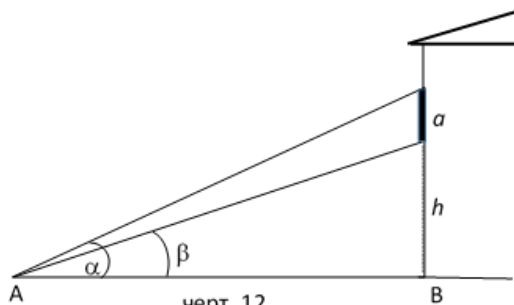
$$\text{От } l_1 = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{2\pi \cdot R}{360^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7\pi \cdot R}{6} = 30 \text{ cm} \Rightarrow R \approx 8,2 \text{ cm}, \text{ но } R \equiv l \Rightarrow l \approx 8,2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{8,2^2 - \left(\frac{9,5}{2}\right)^2} = \sqrt{67,24 - 22,56} = \sqrt{44,68} \approx 6,7 \text{ cm}.$$

Задача 11. В планината се намира кула с височина a m. От точка A върхът и основата на кулата се виждат съответно под ъгли α и β (черт. 11). Изразете чрез a , α и β височината на планината.



черт. 11



черт. 12

Решение: Височината на планината $h = AB \cdot \operatorname{tg} \beta$, но $AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha \Rightarrow h = (a + h) \cdot \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = (a + h) \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow h = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$.

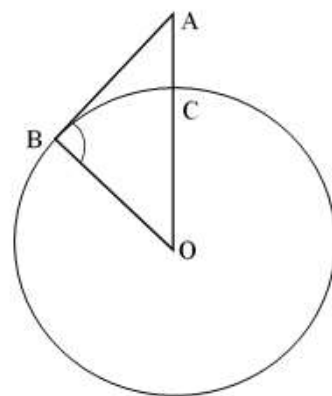
Задача 12. (подходяща за самостоятелна работа) Намерете разстоянието от дадена точка A до строеж, ако от тази точка A горният край на един от прозорците на строежа се вижда под ъгъл α , а долният край на този прозорец се вижда под ъгъл β (черт. 12).

Решение: Разстоянието от долния край на прозореца до земята е $h = AB \cdot \operatorname{tg} \beta$, но

$$AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha \Rightarrow h = (a + h) \cdot \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = (a + h) \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow h = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

$$\Rightarrow \text{разстоянието до строежа е } AB = (a + h) \cdot \cot g \alpha = \left(a + \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \right) \cdot \cot g \alpha = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Задача 13. На 12.04.1961 г. космическият кораб „Восток“ с космонавта Юрий Гагарин прелетял над Земята на височина 327 km . Колко е било в това време разстоянието от кораба до най-отдалечения видим от него участък от повърхността на Земята? (радиусът на Земята(2) е приблизително 6371 km).



черт. 13

Решение: От правоъгълния $\triangle ABO$ следва, че търсеното разстояние

$$AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{(6371 + 327)^2 - 6371^2} \approx$$

$$\approx 2067 \text{ km} \text{ (черт. 13).}$$

Задачи за самостоятелна работа:

Задача 14. Изграждането на Международната космическа станция (МКС)(3) започва през 1998г. Станцията е на ниска околоземна орбита и може да бъде видяна от Земята с невъоръжено око. Височината ѝ варира от $319,6 \text{ km}$ до $346,9 \text{ km}$ над земната

Задача 15. Арктика(4) е северната полярна област на Земята. За южна граница на Арктика се приема Северният полярен кръг ($\approx 66,6^0$ северна ширина).

б) Намерете (с точност до 0,1) какъв процент от площта на Арктика е максималната площ на ледената ѝ покривка, ако тя е достигнала през март 2017 година $14,4 \text{ млн. km}^2$ по данни на американския NSIDC (национален център за данни за снега и леда)(5).

Отг. а) ≈ 21 млн. km^2 ; б) $\approx 68,6\%$; в). $\approx 16,3$ млн. km^2

Литература:

- [1] Гусев, В., Маслова, Г., Скопец, З. & Ягодновский, М. (1976). *Дидактические материалы по геометрии для 10. класса (с.57, 59, 101, 107, 115, 117, 131)*. Москва: изд. „Просвещение”.
- [2] Гусев, В., & Медяник, А. (1986). *Задачи по геометрии для 7 класса (с.41)*. Москва: изд. „Просвещение”.
- [3] Гроздев, С. (2017). *Към читателя. Математика и информатика, бр.1 (с.7-10)*.
- [4] <https://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0>
<https://bg.wikipedia.org/wiki/Арктика>
- [5] https://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD_%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D1%83%D1%81
https://bg.wikipedia.org/wiki/Земен_радиус

- [6] <https://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%B6%D0%B4%D1%83%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F>
[https://bg.wikipedia.org/wiki/Международна космическа станция](https://bg.wikipedia.org/wiki/Международна_космическа_станция)
- [7] <http://nsidc.org/arcticseaicenews/charctic-interactive-sea-ice-graph/>
<http://nsidc.org/arcticseaicenews/charctic-interactive-sea-ice-graph/>