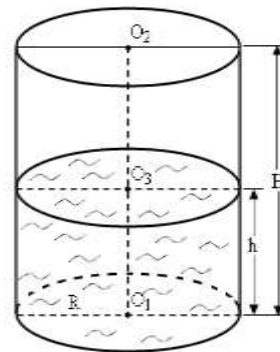


ПРАКТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ ЗА ВМЕСТИМОСТ

Четиво за любознателни и напреднали ученици от 6. и 7. клас

В практиката течностите-вода, петрол, нафта и др. се транспортират и съхраняват обикновено в съдове с цилиндрична форма като цистерни, варели и др. Затова много често се налага да намираме вместимостта на съдове с цилиндрична форма. В 6. клас учениците научават, че обемът V на прав кръгов цилиндър с радиус R на основата и височина $H(R>0, H>0)$ се пресмята по формулата $V = B.H$, където $B = \pi.R^2$ е лицето на основата и $\pi \approx 3,14$ или $\pi = \frac{22}{7}$.

Задача 1. Каква част от вместимостта на съда е количеството на нафтата във варел с цилиндрична форма с радиус на основата R и височина H , ако височината на нафтата в съда е $h(R>0, H \geq h>0)$ и варелът е поставен да стои на една от основите.



Решение: Ако V е вместимостта на варела,

а V_1 -количеството на нафтата в него,

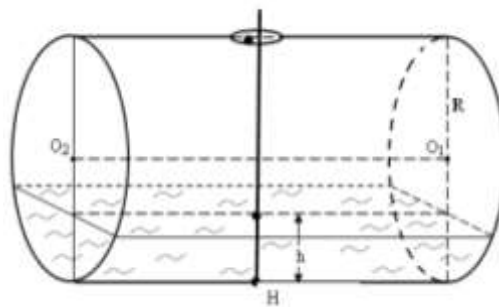
то $V = \pi.R^2.H$, $V_1 = \pi.R^2.h$ и тогава

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi R^2 h}{\pi R^2 H} = \frac{h}{H} \Rightarrow V_1 = \frac{h}{H}.V.$$

А каква част от вместимостта на съда е количеството на нафтата във варел с цилиндрична форма с радиус на основата R и височина H , ако височината на нафтата в съда е $h(H>0, R>0, 0<h<2R)$ в случай, че варелът лежи на някоя от образувателните си?

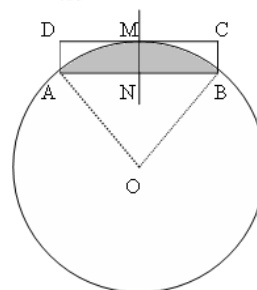
Задача 2. За да поръча необходимото количество гориво за зимния период, служител трябвало да изчисли наличното количество нафта, останало от предходната зима. Нафтата се съхранявала в цистерна с цилиндрична форма с радиус на основата R и височина $H(R>0, H>0)$. За беда обаче цистерната била сложена да лежи на земята не на някоя от основите, а на образувателна на цилиндъра. Височината на нафтата при това «легнало» положение на цистерната била $h(0<h<2R)$. Колко ли е количеството на нафтата, чудел се служителят?

Решение: Ще се опитаме да му помогнем. Явно за решаването на подобна практическа задача не е удачно да се използват строги математически пресмятания, пък и те не винаги са по силите на всеки. Затова ще предложим на този служител формула за приблизително пресмятане на вместимостта на течността.



Приблизителна формула за лице на сегмент/защрихованата част на чертежа/.

Малко известно е, че в практиката може да се използва приблизителна формула за намиране на площ на сегмент, особено когато не се знае каква част от окръжността е дъгата на сегмента и какъв е нейният радиус. В такива случаи се използва формулата $S = \frac{2}{3}.a.h$, където $a=AB$ е основата на сегмента, $h=MN$ е неговата височина.



С други думи, счита се, че лицето на сегмента е $\frac{2}{3}$ от лицето на правоъгълника ABCD. На практика площта на сегмента е малко повече. Оказва се, че:

- ако мярката на дъгата е 60° /т.е. дъгата е $\frac{1}{6}$ от окръжността/, то допуснатата грешка съставлява 1,5%;

- при мярка на дъгата 45° /т.е. дъгата е $\frac{1}{8}$ от окръжността/, грешката е два пъти по-малка;

- ако мярката на дъгата е 30° /т.е. дъгата е $\frac{1}{12}$ от окръжността/, допуснатата грешка съставлява едва 0,3%.

Така с намаляването на мярката на дъгата намалява и допуснатата грешка.

Пример 1: Да се намери площта на сегмент АВМ с основа $a=60$ мм и височина $h=8,04$ мм.

Решение: $S \approx \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 8,04 \approx 321 \text{ мм}^2$. Ако преценим, че дъгата е около $\frac{1}{6}$ от окръжността, то допуснатата грешка е 1,5% от получения резултат, т.е. 5 мм^2 . Можем да подобрим резултата и да изчислим, че $S \approx 326 \text{ мм}^2$.

Как казаното до тук ще помогне на служителя да пресметне наличното количество гориво?

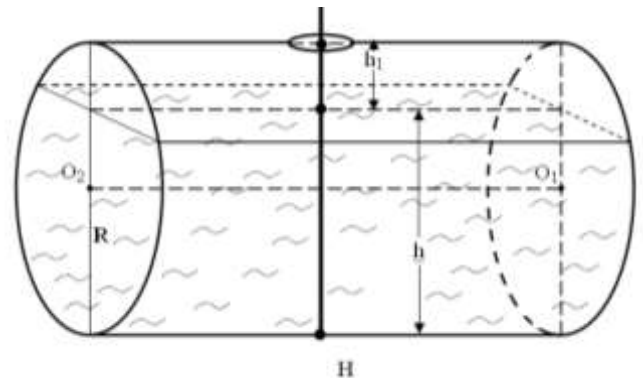
Когато $0 < h < R$, знаейки височината h на нафтата в цистерната, той знае височината на кръговия сегмент и може да определи лесно основата му **непосредствено** или **чрез радиуса R на основата** на цистерната. Следователно трябва да се намери приблизително лицето S на сегмента по формулата $S = \frac{2}{3} \cdot a \cdot h$, след което се пресмята и количеството на нафтата по формулата $V = S \cdot H$.

Ако служителят работи в дециметри, то той ще получи наличното в «легналата» цистерна количество нафта в литри.

Ясно е, че когато $h=R$, то количеството на нафтата $V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$, а при $h=2R$, количеството на нафтата $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$.

Ако $R < h < 2R$, то ще намерим приблизително лицето S на сегмента с височина $h_1 = 2R - h$ и обема $V_1 = S \cdot H$ на празната част от цистерната, а оттам вместимостта на нафтата V ще получим като разлика от обеми на целия цилиндър и на незаетата му част, т.е.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H - V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot H - S \cdot H = (\pi R^2 - S) \cdot H$$



Пример 2. Колко литра нафта има в цистерна с цилиндрична форма с диаметър на основата $d=2,5$ м и височина $H=5$ м, ако височината на нафтата в «легнало» положение на цистерната е $h=0,71$ м.

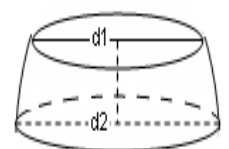
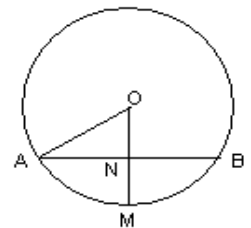
Решение: По условие височината на сегмента е $h=MN=7,1$ дм. Тук намираме по известната Питагорова теорема основата на сегмента от равенството $a^2 = AB^2 = (2 \cdot AN)^2 = 4(AO^2 - NO^2) = 4[R^2 - (R - h)^2] = 4 \cdot (12,5^2 - 5,4^2) \Rightarrow a \approx 22,55$ дм. Следователно обемът на нафтата е

$V = S \cdot H = \frac{2}{3} \cdot a \cdot h \cdot H = \frac{2}{3} \cdot 22,55 \cdot 7,1 \cdot 5,0 \approx 5337$ литра, без да сме подобрявали резултата.

Понякога в ежедневието се налага да намираме вместимостта на съдове с форма на каца или бъчва, в които също съхраняваме различни течности.

Измерването на обем на каци става по формулите за обем на пресечен конус, или техни приближения, които могат да се намерят във всеки математически справочник-например формулата

$V = \frac{1}{12} \pi H (d_1^2 + d_2^2 + d_1 \cdot d_2)$, където d_1 и d_2 са съответно диаметри на основите.



По-малко известни са формулите за пресмятане на обем на бъчва. Измерването на вместимостта на бъчва се извършва по различен начин в зависимост от кривината на бъчвата или по-точно от формата на криволинейната образуваща, която може да бъде сферична, елиптична или параболична. Съществуват практически ръководства за решаване на производствени задачи, в които се предлагат различни формули за измерване на обема на бъчва при голяма, средна или малка издупина на бъчвата/почти цилиндрична бъчва/. Най-често използваните в търговската практика формули за пресмятане на обем V на кръгова бъчва с височина H и радиуси r_1 и r_2 съответно на основите и голямата окръжност в най-широката част на съда са следните:

$$V = \frac{1}{3} \pi H (2r_2^2 + r_1^2) = \frac{1}{12} \pi H (2d_2^2 + d_1^2) \approx 0,262H(2d_2^2 + d_1^2) \text{ -при средна издупина;}$$

$$V = \frac{1}{4} \pi H (d_1 + \frac{2}{3}(d_2 - d_1))^2 \approx 0,0873H(2d_2 + d_1)^2 \text{ -при голяма издупина;}$$

$$V = \frac{1}{4} \pi H (d_1 + \frac{11}{10}(d_2 - d_1))^2 \approx \pi R^2 H \text{ -при малка издупина.}$$

$r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $H > 0$, d_1 -диаметър на основите или средноаритметичната стойност от диаметрите на основите, ако са различни; d_2 -най-голям диаметър на бъчвата/.

За практически цели е най-удачно да ползваме следната проста формула за обем на бъчва: $V = 0,8.H.d_1.d_2$.

Интересен начин за намирането на вместимостта на бъчва е начина чрез претегляне.

Пример 3: Празна бъчва тежи 30 кг, а пълната с вино-650 кг. Намерете обема на течността.

Решение: Нетото тегло или теглото на виното е 620 кг. Относителното тегло на виното е 0,995. Тогава $V = 620 : 0,995 = 623$ литра-вместимостта на бъчвата.

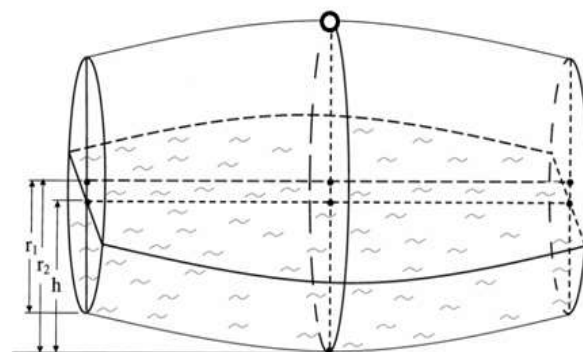
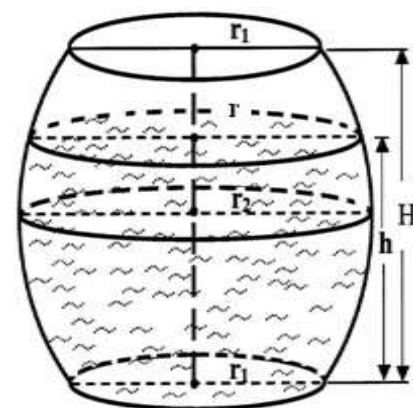
Задача 3: Намерете количеството на виното в бъчва с радиуси r_1 и r_2 съответно на основите и голямата окръжност в най-широката част на съда и височина H , ако височината на виното в съда е h ($R > 0, H \geq h > 0$) и бъчвата е поставена на една от основите си.

Решение: В този случай удобна за практиката е формула на Симпсон, приложима както за цилиндър, конус, пресечен конус, така и за кълбо, кълбов слой/част от кълбо/, каца и бъчва: $V = \frac{1}{6} H (B_1 + B_2 + 4B_{cp.})$, където B_1 ,

B_2 и $B_{cp.}$ са лица на основите и средното сечение/лице на произволно успоредно на основите напречно сечение/.

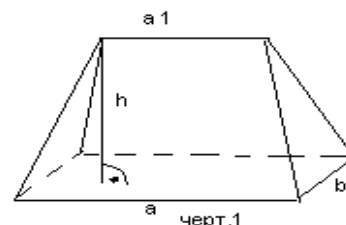
В случая $B_1 = \pi.r_1^2$, $B_2 = \pi.r^2$ и $B_{cp.} = \pi.r_2^2$, където r е радиусът на горната основа и се измерва по повърхността на течността. За производствени цели и решаване на конкретни практически задачи се използват специални таблични способи и начини.

Ако решаваме същата задача в случай, че бъчвата е в «легнало» положение, то ние можем да използваме разгледаното в задача 2 приближение за цилиндър в «легнало» положение, макар и да не сме точни. Но със сигурност можем да твърдим че, ако $h > r_2 + r_1$, то бъчвата е почти пълна, ако $h = r_2$, то тя е наполовина пълна и ако $h < r_2 - r_1$, то бъчвата е почти празна!



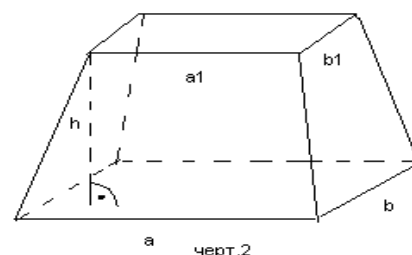
Интересни практически задачи са и задачите, свързани с намиране на обема на пространствени тела с форма на „клин“ и „обелиск“.

Клин е тяло с правоъгълна основа и околни стени-два равнобедрени триъгълника и два равнобедрени трапеца/черт.1/



Обелиск е тяло, на което долната и горната основа са успоредни, но неподобни правоъгълници, а околните стени са трапеци/черт.2/.

На пръв поглед обелискът прилича на пресечена пирамида, но ако продължим околните ръбове, то те не се пресичат в една точка. Това се дължи на факта, че основите не са подобни правоъгълници, т.е. $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$,



където a, a_1, b и b_1 са страни на основите.

Със знанията за обем на изучаваните тела в училище могат да се изведат формули за обема на тези нетрадиционни, но срещани тела. Досещате ли се как?

Задачи за **самостоятелна работа**:

Задача 1. Колко литра нафта има в цистерна с цилиндрична форма с диаметър на основата $d=2,5\text{м}$ и височина $H=5\text{м}$, ако височината на нафтата в «легнало» положение на цистерната е $h=1,79\text{м}$.

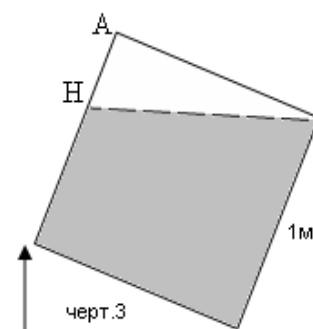
Задача 2. Като използвате компютър и уменията си за работа с електронни таблици по информационни технологии попълнете таблицата:

№ на задачата	Вид на съда	Дължина на височината в метри	Дължина на малък диаметър в метри	Дължина на голям диаметър в метри	Вместимост в хектолитри (с точност до 1)
1	Бъчва	0,50	0,330	0,400	
2	Бъчва	1,71	0,950	1,170	
3	Бъчва	2,01	1,130	1,380	
4	Бъчва	2,14	1,200	1,480	
5	Бъчва	2,25	1,261	1,556	
6	Бъчва	2,36	1,317	1,625	
7	Бъчва	2,45	1,370	1,690	
8	Каца	1,29	1,630	1,830	

Задача 3. Докажете, че обемът на клин се намира по формулата $V = \frac{bh}{2}(2a + a_1)$, където a, a_1, b и h са съответно елементите на клина, съгласно означенията на чертеж 1.

Задача 4. Докажете, че обемът на обелиск се намира по формулата $V = \frac{h}{2}[(2a + a_1).b + (2a_1 + a).b_1] = \frac{h}{6}[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1]$, където h, a, a_1, b и b_1 са съответно елементите на обелиска, съгласно означенията на чертеж 2.

Задача 5. Железен воден резервоар има кубична форма с дължина на ръба 1 м. Чрез подставка през един от ръбовете на долната основа резервоарът е наклонен така, че срещуположният ръб на долната основа е разположен по-ниско/черт.3/.Пресметнете количеството вода в литри, които се намират в резервоара, когато той е напълнен докрай, ако разстоянието от върха А до точка Н от нивото на водата е 12,08 см.



Румяна Несторова-Враца

Отговори:

Задача 1	$\approx 19\,194$ л
Задача 2	
2.1	≈ 1 хектолитър
2.2	≈ 15 хектолитри
2.3	≈ 25 хектолитри
2.4	≈ 30 хектолитри
2.5	≈ 35 хектолитри
2.6	≈ 40 хектолитри
2.7	≈ 46 хектолитри
2.8	≈ 30 хектолитри
Задача 5	$939,6$ л ≈ 940 л