

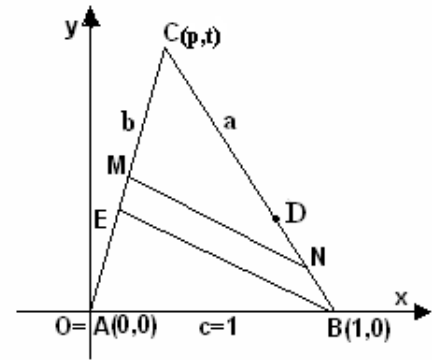
ПРИЛОЖЕНИЯ НА МЕТОДА НА КООРДИНАТИТЕ В ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Теоретични знания, необходими за прилагане на метода на координатите в геометрични задачи:

1. *Декартово уравнение на права в равнината* / $y = k \cdot x + n$ /;
2. *Уравнение на права в равнината, минаваща през две дадени точки*
 $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ / $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ /;
3. *Условия за успоредност, сливане и пресичане на две прави* $y_1 = k_1 \cdot x + n_1$ и $y_2 = k_2 \cdot x + n_2$ в равнината / $k_1 = k_2, n_1 \neq n_2 \Rightarrow y_1 \parallel y_2$; $k_1 = k_2, n_1 = n_2 \Rightarrow y_1 \equiv y_2$; $k_1 \neq k_2 \Rightarrow y_1 \cap y_2$ /;
4. *Условие за перпендикулярност на две прави* $y_1 = k_1 \cdot x + n_1$ и $y_2 = k_2 \cdot x + n_2$ в равнината / $k_1 \cdot k_2 = -1$ /;
5. *Разстояние между две точки в равнината* / Ако $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то
 $d(M_1, M_2) = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ / или в пространството
/ Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то
 $d(M_1, M_2) = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ /;
6. *Уравнение на окръжност* k с център $O(a; b)$ и радиус r в равнината
 $k: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
7. *Общо уравнение на равнина* α в пространството: $\alpha: ax + by + cz + d = 0$;
8. *Координати на точка* M , която дели дадена отсечка M_1M_2 в отношение λ в равнината / Ако са дадени в равнината точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и точка $M(x, y)$ дели отсечката M_1M_2 в отношение λ , то
 $x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$ / или в пространството / Ако са дадени в пространството точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и точката $M(x, y, z)$ дели отсечката M_1M_2 в отношение λ , то
 $x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}$ /;
9. *Координати на точка* M , която е среда на дадена отсечка M_1M_2 в равнината или в пространството / частен случай от 8. за $\lambda = 1$ /;
10. *Координати на медицентър* G на $\triangle ABC$ в равнината или пространството / следствие от 8. и 9. /.

Задача1. (бр.1, 2011г., сп. „Математика плюс“)

Върху страната на $\triangle ABC$ има точка D , за която $DC = AB$. Докажете, че правата, минаваща през средите M и N съответно на отсечките AC и BD , е успоредна на ъглополовящата BE ($E \in AC$) на $\angle ABC$.



Решение: Въвеждаме правоъгълна

координатна система Oxy с координатно

начало $O \equiv A$ и единична отсечка $e = AB = c$, оста Ox съвпада с лъча $AB^{\rightarrow}$, а оста

$Oy \perp AB$ и лежи в полуравнината на правата AB , съдържаща точката C . В тази

координатна система координатите на върховете A и B на $\triangle ABC$ са съответно

$A(x_a, y_a) = A(0,0)$ и $B(x_b, y_b) = B(1,0)$. Нека координатите на върха C са

$C(x_c, y_c) = C(p, t)$. Тогава координатите на средата $M(x_m, y_m)$ на страната $AC = b$ са

$$x_m = \frac{x_a + x_c}{2} \text{ и } y_m = \frac{y_a + y_c}{2} \text{ или } M\left(\frac{p}{2}, \frac{t}{2}\right).$$

От BE -ъглополовяща на $\angle ABC$, следва $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} = \lambda$, откъдето

координатите на точка $E(x_e, y_e)$ са $x_e = \frac{x_a + \lambda x_c}{1 + \lambda}$ и $y_e = \frac{y_a + \lambda y_c}{1 + \lambda}$ или $E\left(\frac{p}{a+1}, \frac{t}{a+1}\right)$.

Точките B и E определят правата BE : $y = k_1 x + n_1$, където

$$k_1 = \frac{y_b - y_e}{x_b - x_e} = \frac{0 - \frac{t}{a+1}}{1 - \frac{p}{a+1}} = -\frac{t}{a+1-p}. \text{ Аналогично от } \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a \text{ следва}$$

$$\frac{BC - DC}{DC} = \frac{a-1}{1} = a-1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = a-1 = \mu, \text{ откъдето координатите на точка } D(x_d, y_d)$$

са $x_d = \frac{x_b + \mu x_c}{1 + \mu}$ и $y_d = \frac{y_b + \mu y_c}{1 + \mu}$, т.е. $D\left(\frac{1 + (a-1)p}{a}, \frac{(a-1)t}{a}\right)$. Тогава координатите

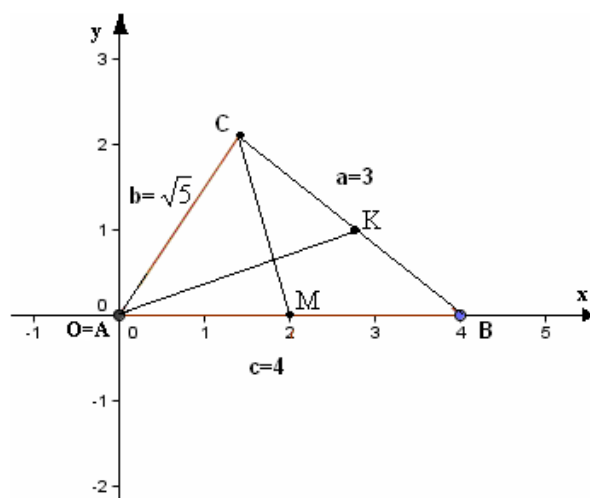
на средата N на отсечката DB са $x_n = \frac{x_b + x_d}{2}$ и $y_n = \frac{y_b + y_d}{2}$ или

$$N\left(\frac{p(a-1) + 1 + a}{2a}, \frac{t(a-1)}{2a}\right). \text{ Точките } M \text{ и } N \text{ определят правата } MN: y = k_2 x + n_2,$$

където $k_2 = \frac{y_m - y_n}{x_m - x_n} = -\frac{t}{a+1-p}$. От $k_1 = k_2$ следва, че $BE \parallel MN$ (ако $D \neq B$, то $n_1 \neq n_2$ и $BE \parallel MN$; ако $D \equiv B$, то $n_1 = n_2$ и $BE \equiv MN$).

Задача 2. В $\triangle ABC$ дължините на страните са съответно $AB = 4$, $BC = 3$ и $AC = \sqrt{5}$. Да се докаже, че медианите $AK (K \in BC)$ и $CM (M \in AB)$ на $\triangle ABC$ са перпендикулярни.

Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система Oxy с координатно начало $O \equiv A$ и единична отсечка $e = 1$, оста Ox съвпада с лъча $AB^{\rightarrow}$, а оста $Oy \perp AB$ и лежи в полуравнината на правата AB , съдържаща точката C .



В тази координатна система координатите на върховете A и B на $\triangle ABC$ са съответно $A(x_a, y_a) = A(0,0)$ и

$B(x_b, y_b) = B(4,0)$. Координатите на средата M на страната $AB = c$ са $x_m = \frac{x_a + x_b}{2}$ и

$y_m = \frac{y_a + y_b}{2}$ или $M(2,0)$. Нека координатите на върха C са $C(x_c, y_c) = C(p,t)$. От

формулата за разстояние между две точки намираме, че $AC = \sqrt{(p-0)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{5}$ и $BC = \sqrt{(p-4)^2 + (t-0)^2} = 3$, откъдето получаваме

системата $\begin{cases} p^2 + t^2 = 5 \\ (p-4)^2 + t^2 = 9 \end{cases}$ с решения $p = \frac{3}{2}, t = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Следователно координатите на върха C са $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$, защото оста $Oy \perp AB$ и лежи в полуравнината на правата AB , съдържаща точката C .

Координатите на средата K на страната $BC = a$ са $x_k = \frac{x_c + x_b}{2}$ и $y_k = \frac{y_c + y_b}{2}$ или

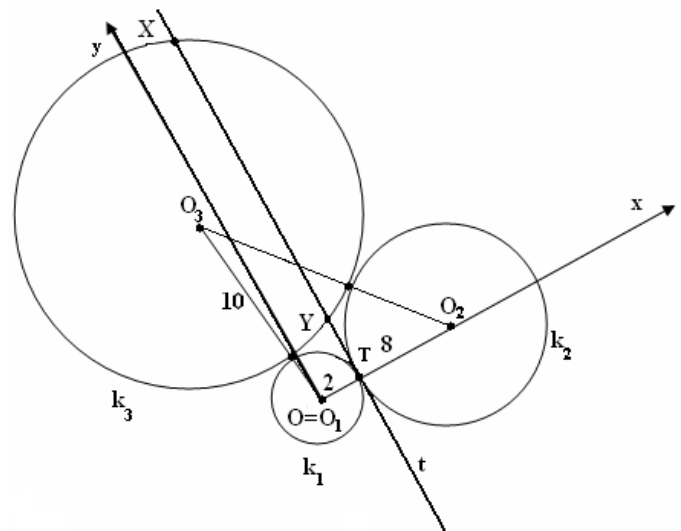
$K\left(\frac{11}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$. Точките A и K определят медианата $AK: y = k_1x + n_1$, където

$$k_1 = \frac{y_k - y_a}{x_k - x_a} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{4}}{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{11}. \text{ Точките } C \text{ и } M \text{ определят медианата } CM: y = k_2x + n_2,$$

$$\text{където } k_2 = \frac{y_m - y_c}{x_m - x_c} = -\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{11}. \text{ От } k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ следва, че } AK \perp CM.$$

Задача3. Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$ с радиуси съответно $r_1 = 2$, $r_2 = 8$ и $r_3 = 10$ се допират външно две по две. Намерете дължината на хордата, отсечена от окръжността k_3 , от общата външна допирателна на окръжностите k_1 и k_2 .

Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система Oxy с координатно начало $O \equiv O_1$ и единична отсечка $e = 1$, оста Ox съвпада с лъча O_1O_2 , а оста $Oy \perp O_1O_2$ и лежи в полуравнината на точката O_3 . При така въведената координатна система координатите на точките O_1 , O_2 и $T = k_1 \cap k_2$ са съответно $O_1(0,0)$, $O_2(10,0)$ и $T(2,0)$.



Нека координатите на точка O_3 са $O_3(a,b)$. От формулата за разстояние между две точки получаваме $O_1O_3 = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = 12$ и $O_2O_3 = \sqrt{(a-10)^2 + (b-0)^2} = 18$, откъдето следва системата
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 144 \\ (a-10)^2 + b^2 = 324 \end{cases} \text{ с решения } a = -4, b = \pm 8\sqrt{2}.$$

Координатите на точка O_3 са $O_3(-4, 8\sqrt{2})$, тъй като оста $Oy \perp O_1O_2$ и лежи в

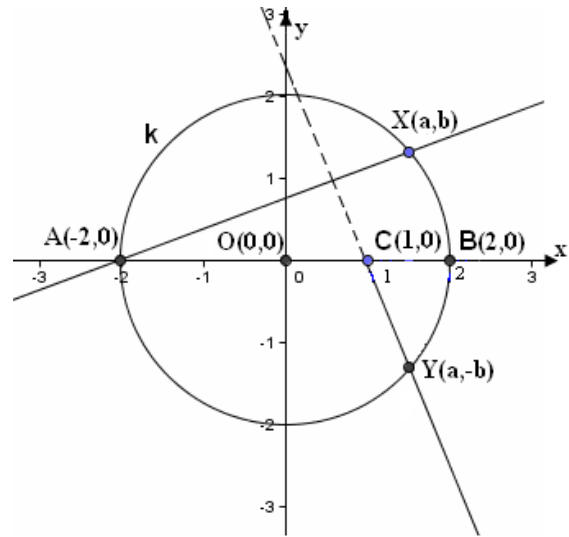
полуравнината на точката O_3 , откъдето следва, че точките от окръжността k_3 удовлетворяват равенството $(x+4)^2 + (y-8\sqrt{2})^2 = 100$. Ако правата $t = k_1 \cap k_2$ е общата външна допирателна през точката $T(2,0)$, то координатите на пресечните точки на правата t с окръжността k_3 удовлетворяват системата

$$\begin{cases} x = 2 \\ (x+4)^2 + (y-8\sqrt{2})^2 = 100 \end{cases}$$

с решения $x = 2, y = 8\sqrt{2} \pm 8$. Ако пресечните точки на правата t с окръжността k_3 са точките X и Y , то $X(2, 8\sqrt{2} + 8), Y(2, 8\sqrt{2} - 8)$ и тогава дължината на търсената хорда е разстоянието $XY = \sqrt{(2-2)^2 + ((8\sqrt{2}-8) - (8\sqrt{2}+8))^2} = 16$.

Задача 4. Дадена е окръжност k с център точката O и диаметър $AB = 4$. Точката C е среда на радиуса OB . Намерете точките X и Y от окръжността k , симетрични относно AB , такива, че правата $YC \perp XA$.

Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система Oxy с координатно начало центърът O и единична отсечка $e = 1$, оста Ox съвпада с лъча $OB^{\rightarrow}$, а оста $Oy \perp OB$ и лежи в горната полуравнина на правата AB . При така въведената координатна система координатите на точките O, C, B и A са съответно $O(0,0)$, $C(1,0)$, $B(2,0)$ и $A(-2,0)$. Ако координатите на точка X са $X(a,b)$, то координатите на симетричната точка Y спрямо AB са



$Y(a, -b)$. Точките A и X определят правата $AX : y = k_1x + n_1$, където

$k_1 = \frac{y_x - y_a}{x_x - x_a} = \frac{b}{a+2}$. Точките Y и C определят правата $YC : y = k_2x + n_2$, където

$k_2 = \frac{y_c - y_y}{x_c - x_y} = \frac{b}{1-a}$. От условието $YC \perp XA$ следва, че

$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a+2}\right) \cdot \left(\frac{b}{1-a}\right) = -1$. От формулата за разстояние между две точки

получаваме $OX = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, откъдето $a^2 + b^2 = 4$. Допустимото решение на системата $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ \left(\frac{b}{a+2}\right)\left(\frac{b}{1-a}\right) = -1 \end{cases}$ е решението $a = \frac{3}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$, т.е. търсените точки от k са $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Задача 5. Във вътрешността на квадрат $ABCD$ е взета произволна точка P . От върха A е спуснат перпендикуляр към правата BP , от върха B – към правата CP , от върха C – към правата DP и от върха D – към правата AP . Докажете, че четирите перпендикуляра (или техните продължения) се пресичат в една точка.

Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система Oxy с координатно начало $O \equiv A$ и единична отсечка $e = AB$, оста Ox съвпада с лъча $AB^{\rightarrow}$, а оста Oy съвпада с лъча $AD^{\rightarrow}$.

При така въведената координатна система координатите на точките A, B, C и D са съответно $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$.

Нека координатите на точка P са $P(a,b)$.

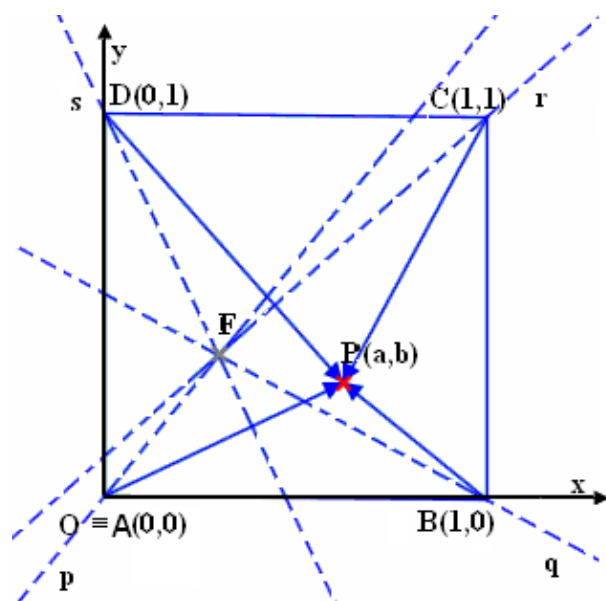
Точките B и P определят правата BP :

$$y = k_1 x + n_1, \text{ където } k_1 = \frac{y_p - y_b}{x_p - x_b} = \frac{b}{a-1}$$

(може да определим и n_1 , но не е необходимо).

Ако перпендикулярът p от точката A към правата BP е правата $y = k'x + n'$, то от равенството $k_1 k' = -1$, предреаеме $k' = \frac{1-a}{b}$, а от условието $A \in p$ предреаеме

$$n' = 0, \text{ т. е. перпендикулярът } p \text{ е правата } y = \frac{1-a}{b} x.$$



С аналогични разсъждения определяме правите CP , DP и AP и съответните перпендикуляри q , r и s към тях, спуснати съответно от върховете B , C и D :

$$CP: y = \frac{1-b}{1-a}x + n_2 (n_2 = 1), \quad q: y = \frac{a-1}{1-b}x + \frac{1-a}{1-b};$$

$$DP: y = \frac{b-1}{a}x + n_3, \quad r: y = \frac{a}{1-b}x + \frac{1-b-a}{1-b};$$

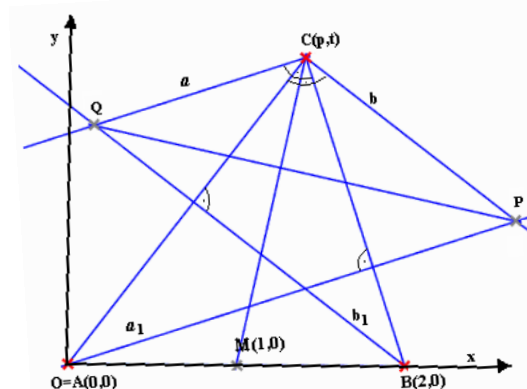
$$AP: y = \frac{b}{a}x, \quad s: y = -\frac{a}{b}x + 1.$$

Ако $F_1 = p \cap q$, то $F_1(b, 1-a)$. Ако $F_2 = r \cap s$, то $F_2(b, 1-a)$. Следователно $F_1 \equiv F_2 = F(b, 1-a)$, с което исканото твърдение е доказано.

Задача 6. (Есенен математически турнир, 2011г., 10 клас).

Даден е $\triangle ACB$ с $\angle ACB \neq 90^\circ$. Правите през върха C , перпендикулярни на страните AC и BC , пресичат съответно правите през върховете A и B , перпендикулярни на страните BC и AC , в точките P и Q . Ако M е средата на страната AB , то да се докаже, че правите PQ и CM са перпендикулярни.

Решение: Нека през върха C на $\triangle ABC$ са построени права $a \perp BC$, права $b \perp AC$ и медианата CM ($M \in AB$). Да построим през върха A права $a_1 \perp BC$, а през върха B - права $b_1 \perp AC$. Съгласно условието $a_1 \cap b = Q$ и $b_1 \cap a = P$.



Въвеждаме правоъгълна координатна система Oxy с координатно начало $O \equiv A$ и

единична отсечка $e = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$, оста Ox съвпада с лъча $AB \rightarrow$, а оста $Oy \perp AB$ и лежи в полуравнината на правата AB , съдържаща точката C .

В тази координатна система координатите на върховете A и B на $\triangle ABC$ са съответно $A(x_a, y_a) = A(0,0)$ и $B(x_b, y_b) = B(2,0)$.

Нека координатите на върха C са $C(x_c, y_c) = C(p, t)$. Точките $A(0,0)$ и $C(p,t)$

определят правата $AC : y = kx$, където $k = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} = \frac{t}{p}$, т.е. $AC : y = \frac{t}{p} \cdot x$.

Точките $B(2,0)$ и $C(p,t)$ определят правата $BC : y = k_1x + n_1$, където

$$k_1 = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{t}{p-2} \text{ и } n_1 = -\frac{2t}{p-2}, \text{ т. е. } BC : y = \frac{t}{p-2} \cdot x - \frac{2t}{p-2}.$$

Точките $M(1,0)$ и $C(p,t)$ определят правата $CM : y = k_2x + n_2$, където

$$k_2 = \frac{y_c - y_m}{x_c - x_m} = \frac{t}{p-1} \text{ и } n_2 = -\frac{t}{p-1}, \text{ т. е. } CM : y = \frac{t}{p-1} \cdot x - \frac{t}{p-1}.$$

Ако перпендикулярът a_1 от точката A към правата BC е правата $y = k'x + n'$, то

k' определяме от равенството $k_1 \cdot k' = -1$, т.е. $k' = \frac{2-p}{t}$, а от условието $A \in a_1$

определяме $n' = 0$ и следователно $a_1 : y = \frac{2-p}{t} \cdot x$.

Ако перпендикулярът b_1 от точката B към правата AC е правата $y = k''x + n''$, то

k'' определяме от равенството $k \cdot k'' = -1$, т.е. $k'' = -\frac{p}{t}$, а от условието $B \in b_1$

определяме $n'' = \frac{2p}{t}$ и следователно $b_1 : y = -\frac{p}{t} \cdot x + \frac{2p}{t}$.

Ако перпендикулярът a в точката C към правата BC е правата $y = m_1x + l_1$, то

m_1 определяме от равенството $k_1 \cdot m_1 = -1$ или от условието $a \parallel a_1$, т.е. $m_1 = \frac{2-p}{t}$, а

от условието $C \in a$ определяме $l_1 = \frac{p^2 - 2p + t^2}{t}$ и следователно

$$a : y = \frac{2-p}{t} \cdot x + \frac{p^2 - 2p + t^2}{t}.$$

Ако перпендикулярът b в точката C към правата AC е правата $y = m_2x + l_2$, то

m_2 определяме от равенството $k \cdot m_2 = -1$ или от условието $b \parallel b_1$, т.е. $m_2 = -\frac{p}{t}$, а

от условието $C \in b$ определяме $l_2 = \frac{p^2 + t^2}{t}$ и следователно $b : y = -\frac{p}{t} \cdot x + \frac{p^2 + t^2}{t}$.

Координатите на точката $P\left(\frac{p^2+t^2}{2}, \frac{(2-p)(p^2+t^2)}{2t}\right)$ определяме като пресечна

точка на правите a_1 и b , а координатите на точката

$Q\left(\frac{4p-p^2-t^2}{2}, \frac{p(4-4p+p^2+t^2)}{2t}\right)$ - като пресечна точка на правите b_1 и a .

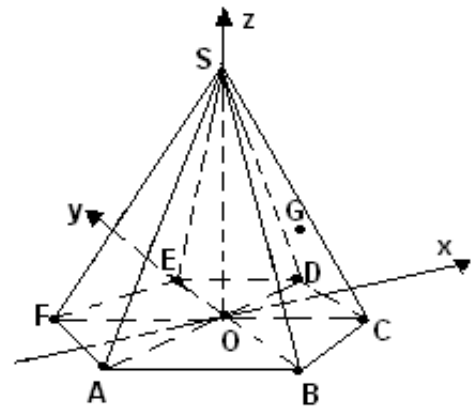
Точките P и Q определят правата $PQ: y = k_3x + n_3$, където $k_3 = \frac{y_t - y_q}{x_t - x_q} = \frac{1-p}{t}$ и

тъй като $k_3 \cdot k_2 = -1$, то $PQ \perp CM$.

Задача 7. Дължината на страната на основата на правилна шестоъгълна пирамида $SABCDEF$ е равна на 4, а дължината на височината на пирамидата $SO = 6$. Намерете разстоянието между върха A и пресечната точка на медианите на $\triangle SCD$.

Решение: Нека точката $O \in (ABCDEF)$ и $SO \perp (ABCDEF)$. Въвеждаме правоъгълна координатна система $Oxyz$ с координатно начало точката O и единична отсечка $e = 1$, оста Oy съвпада с лъча $OE \rightarrow$, оста $Ox \perp OE$ и лежи в полуравнината на точката C , а оста Oz съвпада с лъча $OS \rightarrow$. При така въведената координатна система координатите на върховете O, S, C, D, G и A са съответно $O(0,0,0)$, $S(0,0,6)$,

$C(x_c, y_c, z_c) = C(2\sqrt{3}, -2, 0)$, $D(x_d, y_d, z_d) = D(2\sqrt{3}, 2, 0)$ и $A(x_a, y_a, z_a) = A(-2\sqrt{3}, -2, 0)$.



Координатите на медицентъра G на $\triangle SCD$ са $x_g = \frac{x_c + x_d + x_s}{3}$, $y_g = \frac{y_c + y_d + y_s}{3}$ и

$z_g = \frac{z_c + z_d + z_s}{3}$ или $G\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0, 2\right)$. От формулата за разстояние между две точки

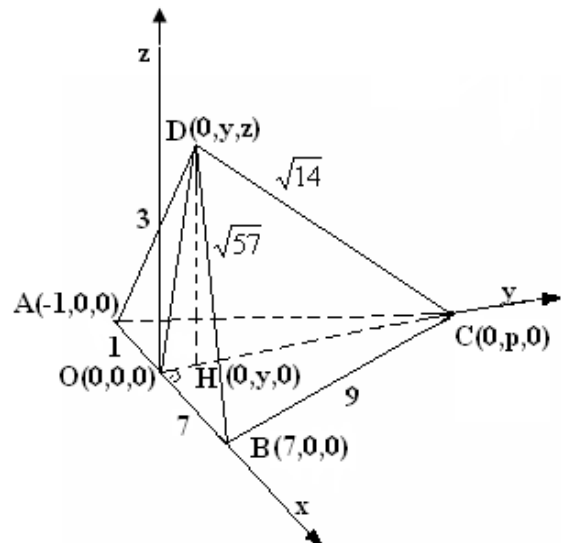
намираме търсеното разстояние $AG = \sqrt{(x_g - x_a)^2 + (y_g - y_a)^2 + (z_g - z_a)^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}\right)^2 + (0 + 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{\frac{372}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{93}.$$

Задача 8. В триъгълна пирамида $ABCD$ са известни дължините на ръбовете $AB=8$, $BC=9$, $AD=3$, $BD=\sqrt{57}$ и $CD=\sqrt{14}$. Намерете дължината на височината DH на пирамидата.

Решение: Ако построим височината

$DO (O \in AB)$ в $\triangle ABD$, то от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $CO \perp AB$ и тогава височината от върха D към CO в $\triangle OCD$ е височината DH на пирамидата. Въвеждаме правоъгълна координатна система $Oxyz$ с координатно начало точката O и единична отсечка $e=1$, оста Ox съвпада с лъча $OB^{\rightarrow}$, оста Oy съвпада с лъча $OC^{\rightarrow}$, а оста Oz е еднопосочна на лъча $DH^{\rightarrow}$. Ако $AO=x$, то $BO=8-x$ и тъй като $DO^2 = AD^2 - AO^2 = BD^2 - BO^2$



$$(\text{Теорема на Питагор}) \Rightarrow 9 - x^2 = 57 - (8 - x)^2$$

$\Rightarrow x=1=AO$ и $BO=7$. При така въведената координатна система координатите на точките O , A и B са съответно $O(0,0,0)$, $A(-1,0,0)$ и $B(7,0,0)$. Нека координатите на точките H , C и D са съответно $H(0,y,0)$, $C(0,p,0)$ и $D(0,y,z)$.

От формулата за разстояние между две точки следват равенствата

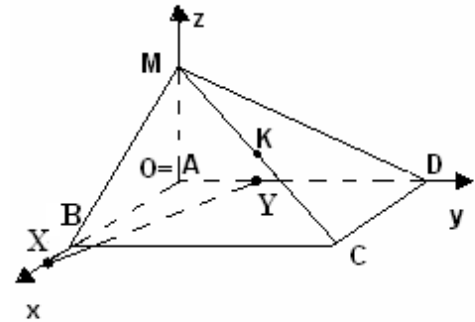
$$AD = \sqrt{1^2 + y^2 + z^2} = 3, \quad BC = \sqrt{7^2 + p^2 + 0^2} = 9 \quad \text{и} \quad DC = \sqrt{0^2 + (y-p)^2 + z^2} = 14,$$

откъдето получаваме $p = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $y = \frac{13\sqrt{2}}{8}$ и $z = \frac{\sqrt{174}}{8}$. Следователно

$$\text{височината } DH = \frac{\sqrt{174}}{8}.$$

Задача 9. Основата на четириъгълна пирамида е правоъгълник $ABCD$ с дължини на страните $AB=3$ и $AD=4$. Околният ръб AM е перпендикулярен на равнината на основата и с дължина $AM=2$. Равнината β , построена през средата K на ръба MC и перпендикулярна на него, пресича правите AB и AD съответно в точките X и Y . Определете дължината на XY .

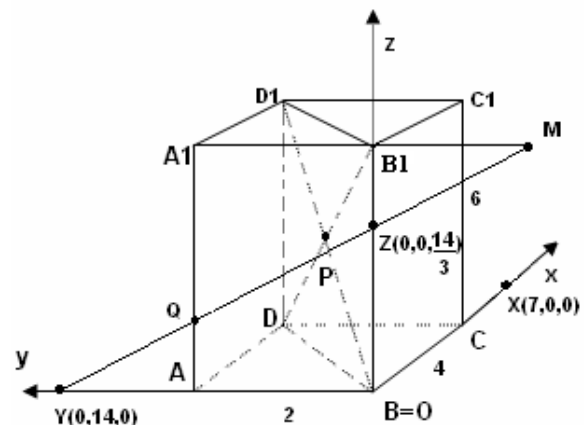
Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система $Oxyz$ с координатно начало $O \equiv A$ и единична отсечка $e = 1$, оста Ox съвпада с лъча $AB^{\rightarrow}$, оста Oy съвпада с лъча $AD^{\rightarrow}$, а оста Oz съвпада с лъча $AM^{\rightarrow}$. Оттук и условието на задачата следва, че координатите на върховете A, B, C, D и M са съответно $A(0,0,0), B(3,0,0), C(3,4,0), D(0,4,0)$ и $M(0,0,2)$. Ако точката $E(x,y,z)$ е произволна



точка от равнината β , то $EM = EC$, защото равнината β е симетралната равнина за ръба MC . От формулата за разстояние между две точки намираме $EM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2}$ и $EC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2}$ и тъй като $EM = EC$, то $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2$, т.е. общото уравнение на равнината β е $\beta: 4z - 8y - 6x + 21 = 0$ (1). Точката $X \in Ox \Rightarrow X(x,0,0)$ и тъй като $X \in \beta$, то координатите на X удовлетворяват (1), откъдето следва, че $x = 3,5$. Точката $Y \in Oy \Rightarrow Y(0,y,0)$ и тъй като $Y \in \beta$, то координатите на Y удовлетворяват (1), откъдето следва, че $y = 2,625$. От формулата за разстояние между две точки намираме, че $XY = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{35}{8} = 4,375$, без да се налага да построяваме сечението на β спирамидата.

Задача 10. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ е правоъгълен паралелепипед, за който $AB = 2$, $BC = 4$ и $BB_1 = 6$. Построена е равнина β през средата P на диагонала $D_1 B$ и перпендикулярна на него. Намерете отношението, в което равнината β дели страната $A_1 B_1$, вътрешно или външно.

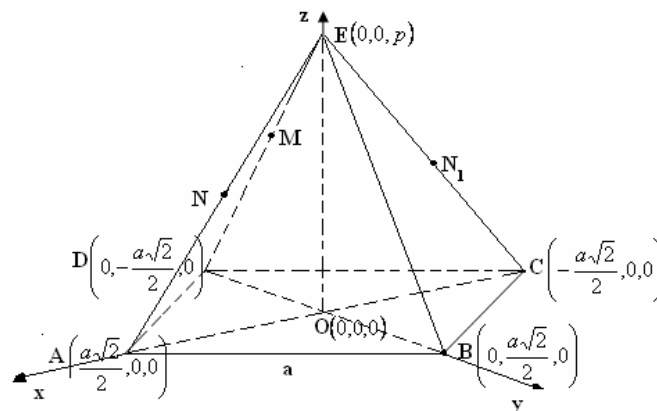
Решение: Въвеждаме правоъгълна координатна система $Oxyz$ с координатно начало $O \equiv B$ и единична отсечка $e = 1$, оста Ox съвпада с лъча $BC^{\rightarrow}$, оста Oy съвпада с лъча $BA^{\rightarrow}$, а оста Oz съвпада с лъча $BB_1^{\rightarrow}$. Оттук и условието на задачата следва, че



координатите на върховете B, A, C, D_1 и P са съответно $B(0,0,0), A(0,2,0), C(4,0,0), D_1(4,2,6)$ и $P(2,1,3)$. Ако точката $F(x,y,z)$ е произволна точка от равнината β , то $FD_1 = FB$, защото равнината β е симетралната равнина за ръба D_1B . От формулата за разстояние между две точки намираме $FD_1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2}$ и $FB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$ и тъй като $FD_1 = FB$, то $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, т.е. общото уравнение на равнината β е $\beta: 8x + 4y + 12z - 56 = 0$ (1). Ако точката X е пресечната точка на оста Ox с равнината β , то от $X \in Ox \Rightarrow X(x,0,0)$ и тъй като $X \in \beta$, то координатите на X удовлетворяват (1), откъдето следва, че $x = 7$. Ако точката Y е пресечната точка на оста Oy с равнината β , то от $Y \in Oy \Rightarrow Y(0,y,0)$ и тъй като $Y \in \beta$, то координатите на Y удовлетворяват (1), откъдето следва, че $y = 14$. Аналогично, ако точката $Z = Oz \cap \beta$, то от $Z \in Oz \Rightarrow Z(0,0,z)$ и тъй като $Z \in \beta$, то координатите на Z удовлетворяват (1), откъдето следва, че $z = \frac{14}{3}$. Нека $Q = AA_1 \cap YZ = AA_1 \cap \beta$ и $M = A_1B_1 \cap YZ = A_1B_1 \cap \beta$. От подобие на $\triangle AQY$ и $\triangle BZY$ определяме $AQ = 4$. Аналогично, от подобие на $\triangle MA_1Q$ и $\triangle MB_1Z$ определяме $\frac{MA_1}{MB_1} = \frac{A_1Q}{B_1Z} = \frac{6-4}{6-\frac{14}{3}} = \frac{3}{2}$, което е търсеното отношение $/M$ дели външно $A_1B_1/$.

Задача 11. В правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a е построено сечение през връх на основата и средата на срещуположния околен ръб, като сечението е перпендикулярно на този ръб. Да се намери лицето на сечението.

Решение: Нека правилната четириъгълна пирамида е $ABCDE$ с височина OE ($O = AC \cap BD$), а сечението е построено през върха B и средата M на ръба DE . Въвеждаме правоъгълна координатна система $Oxyz$ с координатно начало точката O и единична отсечка $e=1$, оста Ox съвпада с лъча $OA \rightarrow$, оста Oy съвпада с лъча $OB \rightarrow$, а оста Oz съвпада с лъча $OE \rightarrow$. Оттук и условието на



задачата следва, че координатите на върховете A, B, C и D са съответно

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), B\left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \text{ и } D\left(0, -\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ Ако координатите на върха } E \text{ са } E(0, 0, p), \text{ то } p > 0$$

Ако точката $F(x, y, z)$ е произволна точка от равнината β на сечението, то $FD = FE$, защото равнината β е симетралната равнина за ръба DE . От формулата за разстояние между две точки намираме

$$FD = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (z-0)^2} \quad \text{и} \quad FE = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-p)^2} \quad \text{и}$$

следователно $x^2 + y^2 + a\sqrt{2}y + \frac{a^2}{2} + z^2 = x^2 + y^2 + (z-p)^2$, т.е. общото уравнение на

равнината β е $\beta: 2\sqrt{2}ay + 4pz + a^2 - 2p^2 = 0$ (1). Тъй като върха $B \in \beta$, то

координатите на B удовлетворяват (1), откъдето следва, че $p = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, т.е.

координатите на върха E са $E\left(0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$. Тогава координатите на средата M на

ръба DE са $M\left(0, -\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$. Ако точката $N = \beta \cap AE$, то от $N \in AE$ следва, че

$$\text{координатите на точката } N \text{ са } N\left(\frac{x_a + \lambda x_e}{1 + \lambda}, \frac{y_a + \lambda y_e}{1 + \lambda}, \frac{z_a + \lambda z_e}{1 + \lambda}\right) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2(1 + \lambda)}, 0, \frac{\lambda a\sqrt{6}}{2(1 + \lambda)}\right),$$

където $\lambda = \frac{AN}{NE}$, а от $N \in \beta$, следва, че координатите на N удовлетворяват (1),

откъдето $\lambda = \frac{1}{2}$, т.е. координатите на N са $N\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$. Координатите на

симетричната точка N_1 на точка N спрямо оста Oz са $N_1\left(-\frac{a\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$ и

$N_1 = \beta \cap CE$. Сечението на равнината β с правилната четириъгълна пирамида

$ABCDE$ е делтоид и неговото лице $S = \frac{NN_1 \cdot BM}{2}$. От формулата за разстояние

между две точки намираме $NN_1 = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3} + \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6} - \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ и

$$BM = \sqrt{0^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Тогава } S = \frac{NN_1 \cdot BM}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Методът на координатите, при подходящо избрана правоъгълна координатна система, улеснява решенията на определени геометрични задачи в равнината и в пространството. Използването на метода на координатите в ПП, ЗИП, СИП и формите на извънкласна работа по математика съдейства за подобряване на знанията и уменията на учениците от прогимназиален и гимназиален етап за правоъгълна координатна система, линейна функция и сечения на многостен с равнина и способства за развитието на аналитичното им мислене. Този метод, съчетан с изработване на геометричните чертежи с помощта на динамичен софтуер, е добър пример за изследователски подход в обучението по математика.

Литература:

1. А.Б.Василевский, Методы решения задач, изд. „Высшая школа”, Минск, 1974г.