

РАЦИОНАЛНИ МЕТОДИ ЗА ДОКАЗВАНЕ НА ТЪЖДЕСТВА

Румяна Несторова, Враца

В темата са разгледани методи за рационално доказване на тъждества и приложенията им в конкретни задачи. Подходяща е за ученици от 7. до 12. клас. Допълва темата "Цели изрази" от училищния курс по математика.

Знаем, че два изрази са **тъждествено равни**, ако за произволни стойности на променливите, допустими и за двата изрази, съответните числени стойности на изразите са равни. Равенство, двете страни на което са тъждествено равни изрази, се нарича **тъждество**. **Основни начини за доказване на тъждества:**

Преобразуваме тъждествено лявата или дясната страна или двете страни на даденото равенство и достигаме до очевидно вярно равенство;

Разглеждаме разликата на двата изрази в даденото равенство и ако тя се окаже равна на нула, следва, че изразите са тъждествено равни.

Да докажем тъждествата:

Задача 1.

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)(a-b) = 0$$

Задача 2.

$$(b+c)^3 + (a+c)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(a+c)(a+b) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

Задача 3.

$$(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ac)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$$

Задача 4.

$$(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

Задача 5.

$$(3a-b-c)^3 + (3b-c-a)^3 + (3c-a-b)^3 - 3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b) = 16(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

Задача 6.

$$[b^2c^2(a+d) + a^2d^2(c+b)][b-c](a-d) + [c^2a^2(b+d) + b^2d^2(c+a)][c-a](b-d) + [a^2b^2(c+d) + c^2d^2(a+b)][a-b](c-d) = 0$$

Задача 7.

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (b+c)(c+a)(a+b)$$

Задача 8.

$$(x+y+z)^3 = (-x+y+z)^3 + (x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 + 24xyz$$

Задача 9.

$$4(x+y+z)^3 - 15[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2] - x(2x-y-z)^2 - y(2y-z-x)^2 - z(2z-x-y)^2 = 108xyz$$

Задача 10.

$$(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 = 12abc(a+b+c)$$

Доказването на дадените тъждества със стандартните методи за доказване на тъждества като използваме основните правила за действия с многочлени и едночлени е възможно, но тъждествените преобразувания са дълги и обемни.

Ще използваме някои нови методи, които водят до рационално доказване на тъждествата.

В първите пет задачи ще използваме **тъждеството**

$$(1) x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy),$$

което доказваме като преобразуваме тъждествено дясната страна и достигаме до лявата по следния начин:

$$(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = x^3 + xy^2 + xz^2 - xyz - zx^2 - x^2y + \\ + yx^2 + y^3 + yz^2 - y^2z - xyz - xy^2 + zx^2 + zy^2 + z^3 - yz^2 - z^2x - xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Доказателство на тъждеството в задача 1.:

Полагаме $x = b - c$, $y = c - a$, $z = a - b$ в (1) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} & (b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)(a-b) = \\ & = (b-c+c-a+a-b)((b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 - (b-c)(c-a) - (b-c)(a-b) - (c-a)(a-b)) = 0. \end{aligned}$$

Доказателство на тъждеството в задача 2.:

Полагаме $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ в (1) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} & (b+c)^3 + (a+c)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(a+c)(a+b) = \\ & = 2(a+b+c)((b+c)^2 + (a+c)^2 + (a+b)^2 - (b+c)(a+c) - (b+c)(a+b) - (a+c)(a+b)) = \\ & = 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \text{ съгласно (1), с което} \end{aligned}$$

тъждеството е доказано.

Доказателство на тъждеството в задача 3.:

Полагаме $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ac$, $z = c^2 - ab$ в (1) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} & (a^2 - bc)^3 + (b^2 - ac)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = \\ & = (a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab)((a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2 - (b^2 - ac)(c^2 - ab) - (b^2 - ac)(a^2 - bc) - (c^2 - ab)(a^2 - bc)) = \\ & = (a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab)(a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2 + ac^3 + a^3c + b^3c + bc^3 + a^3b + ab^3) = \\ & = (a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab)(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = \\ & = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 / \text{тук отново използвахме (1), за да намерим произведението на} \end{aligned}$$

първите два множители/.

Доказателство на тъждеството в задача 4.:

Полагаме $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$ в (1) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} & (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \\ & = (a+b+c)((b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 - (c+a-b)(a+b-c) - (a+b-c)(b+c-a) - (b+c-a)(c+a-b)) = \\ & = (a+b+c)(4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4bc - 4ca - 4ab) = 4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \end{aligned}$$

съгласно (1), с което тъждеството е доказано.

Доказателство на тъждеството в задача 5.:

Полагаме $x = 3a - b - c$, $y = 3b - c - a$, $z = 3c - a - b$ в (1) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} & (3a-b-c)^3 + (3b-c-a)^3 + (3c-a-b)^3 - 3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b) = \\ & = (a+b+c)((3a-b-c)^2 + (3b-c-a)^2 + (3c-a-b)^2 - (3b-c-a)(3c-a-b) - (3a-b-c)(3c-a-b) - (3a-b-c)(3b-c-a)) = \\ & = (a+b+c)(11a^2 + 11b^2 + 11c^2 - 10bc - 10ac - 10ab + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 6bc - 6ac - 6ab) = \\ & = 16(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab) = 16(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \text{ съгласно (1), с което} \end{aligned}$$

тъждеството е доказано.

В задача 6. и задача 7. ще използваме следната **теорема** без доказателство:

Два многочлена от степен n са тъждествено равни, ако за $n+1$ различни и допустими стойности на променливите им те имат равни стойности.

Например за многочлените от втора степен $F = (x+1)^2 + (x-1)^2$ и $G = 2x^2 + 2$ имаме $F(-1) = G(-1) = 4$, $F(0) = G(0) = 2$ и $F(1) = G(1) = 4$ и те действително са тъждествено равни, тъй като $F = (x+1)^2 + (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2 = G(x)$.

Следствие от теоремата е твърдението, че ако един многочлен от степен n се анулира за $n+1$ различни стойности на променливите си, то той е тъждествено равен на нула.

Доказателство на тъждеството в задача 6.:

Лявата страна на тъждеството е многочлен от трета степен относно a , която се анулира за четири стойности на a ($a=0$, $a=b$, $a=c$, $a=d$), следователно многочленът е тъждествено равен на нула, т.е.

$$[b^2c^2(a+b) + a^2d^2(c+b)](b-c)(a-d) + [c^2a^2(b+d) + b^2d^2(c+a)](c-a)(b-d) + [a^2b^2(a+b) + c^2d^2(a+b)](a-b)(c-d) = 0.$$

Доказателство на тъждеството в задача 7.:

Да разгледаме многочлена $M = a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc - (b+c)(c+a)(a+b)$, който е от втора степен относно a и се анулира за три стойности на $a(a=0, a=-b, a=-c)$, откъдето следва, че $M = a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc - (b+c)(c+a)(a+b) \equiv 0 \Rightarrow a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (b+c)(c+a)(a+b)$, с което тъждеството е доказано.

В последните три задачи ще използваме **факта**, че ако един многочлен се анулира за нулева стойност на някоя от променливите си, например $F(a,b,\dots,z) = 0$ за $a = 0$, то a/F , т.е. многочленът F се дели на a .

Доказателство на тъждеството в задача 8.:

Да разгледаме многочлена $M = (x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3$, който при $x=0, y=0$ и $z=0$ се анулира, откъдето следва, че M се дели на xyz .

Но M е многочлен от трета степен относно x, y и z и тъй като се дели на едночлен от трета степен относно x, y и z , то следва че частното N е число, т.е.

$M = (x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3 = N \cdot xyz$. От последното равенство при $x=1, y=1$ и $z=1$ получаваме $M = 27 - 1 - 1 - 1 = 24 = N \Rightarrow$

$M = (x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3 = 24xyz \Leftrightarrow (x+y+z)^3 = (-x+y+z)^3 + (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3 + 24xyz$, с което тъждеството е доказано.

Доказателство на тъждеството в задача 9.:

Да разгледаме многочлена

$M = 4(x+y+z)^3 - 15[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2] - x(2x-y-z)^2 - y(2y-z-x)^2 - z(2z-x-y)^2$, който при $x=0, y=0$ и $z=0$ се анулира, откъдето следва, че M се дели на xyz .

Тъй като M и xyz са съответно многочлен и едночлен от трета степен относно x, y и z , то следва че частното N е число, т.е.

$M = 4(x+y+z)^3 - 15[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2] - x(2x-y-z)^2 - y(2y-z-x)^2 - z(2z-x-y)^2 = Nxyz$.

От последното равенство при $x=1, y=1$ и $z=1$ получаваме $M = 108 = N \Rightarrow$

$M = 4(x+y+z)^3 - 15[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2] - x(2x-y-z)^2 - y(2y-z-x)^2 - z(2z-x-y)^2 = 108xyz$, с което доказахме тъждеството.

Доказателство на тъждеството в задача 10.:

Многочленът

$M = (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$ се анулира при $a=0, b=0, c=0$ и $a=-(b+c)$, откъдето следва, че M се дели на $abc(a+b+c)$.

Тъй като M и $abc(a+b+c)$ са многочлени от четвърта степен относно a, b и c , то следва че частното N е число, т.е.

$M = (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 = Nabc(a+b+c)$.

От последното равенство при $a=1, b=1$ и $c=1$ получаваме

$M = 81 - 16 - 16 - 16 + 1 + 1 + 1 = 3N \Rightarrow N = 12 \Rightarrow$

$M = (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4 = 12abc(a+b+c)$, с което тъждеството е доказано.

В проекта са разгледани методи за рационално доказване на тъждества и приложенията им в конкретни задачи от темата "Цели изрази", изучавана в 7. клас, но тези методи са приложими в задачи и от други тематични области.

Използвана литература:

1. Сборник задач по специалному курсу элементарной математики- П.С.Моденов, Государственное издательство "Высшая школа", Москва, 1960г.