

1993 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

1 зад. Група от едно училище отишли на поход. Една трета от тях били момичета, половината от които учели в V клас. От участващите в похода момчета $\frac{5}{7}$ не били ученици в V клас. Известно е, че броят на участниците в похода е бил по-голям от 100 и по-малък от 150. Колко от тях са били петокласници?
(6т.)

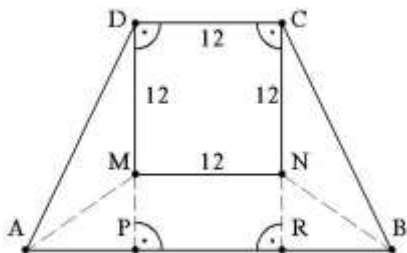
2 зад. В равнобедрен трапец ABCD малката основа CD е равна на 12 см. Точките M и N са вътрешни, като MNCD е квадрат. Лицата на равнобедрения трапец ABNM и на еднаквите триъгълници AMD и BNC са равни на лицето на квадрата. Да се намери височината на трапеца ABCD.
(7т.)

3 зад. Да се намери сумата на всички седемцифрени числа, състоящи се само от нули и единици, всяко от които се дели на 6.
(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

1 зад. Според условието момчетата от 5 клас са $\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ от общия брой n на участниците в похода ($100 < n < 150$, $n \in \mathbb{Z}$). Тъй като n е цяло положително число, от тук следва, че то се дели на 6. Броят на момчетата от 5 клас е $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ от броя на всички момчета, а те са $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ от всички участници. Следователно момчетата от 5 клас са $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$ от всички участници. В такъв случай n се дели на 21. Понеже n се дели и на 6, то n се дели и на НОК на 6 и 21, т.е. на 42. Единственото цяло число между 100 и 150, което се дели на 42, е 126. Тогава $n = 126$, а в похода са взели участие $\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{21}\right) \cdot 126 = \frac{5}{14} \cdot 126 = 45$ петокласника.

2 зад. Продължаваме DM до пресичането с АВ в точка Р. При това РМ е височина в трапеца ABNM, а AP – височина на тъпоъгълния $\triangle AMD$.



$$\text{От } S_{\triangle AMD} = S_{MNCD} = 144\text{cm}^2 \\ \Rightarrow \frac{AP \cdot 12}{2} = 144 \Rightarrow AP = 24\text{cm},$$

Аналогично $BR = 24\text{cm}$.
Тогава $AB = 2 \cdot AP + MN = 60\text{cm}$.
Но $S_{ABNM} = 144\text{cm}^2$, откъдето

$$144 = \frac{(60 + 12)}{2} \cdot PM \text{ или } PM \\ = 4\text{cm} \Rightarrow DP = 12 + 4 = 16\text{cm} \\ (\text{или тъй като } S_{ABCD} =$$

$$\frac{(60 + 12) \cdot DP}{2} = 4 \cdot 144 \Rightarrow 36 \cdot DP = 4 \cdot 144 \Rightarrow DP = 16\text{cm}).$$

3 зад. Едно число се дели на 6, когато се дели на 2 и на 3. Число състоящо се само от нули и единици, се дели на 2, ако завършва на 0. За да се дели на 3, това число може да съдържа три или шест единици. Първата му цифра не може да бъде 0. Така всяко от седемцифрените числа, които ни интересуват, започва с 1 и завършва с 0. Едно от тях е 1111110. Останалите са от вида 1*****0, където на мястото на звездичките има две единици и три нули. Непосредствено се съобразява, че всички такива числа са 1110000, 1101000, 1100100, 1100010, 1011000, 1010100, 1010010, 1001100, 1001010 и 1000110 (десет на брой). Сумата от така намерените 11 числа е равна на 11 555 550 (сумата на всички единици е 36).

$$\begin{array}{r} 1111110 \\ 1110000 \\ 1101000 \\ 1100100 \\ 1100010 \\ + 1011000 \\ 1010100 \\ 1010010 \\ 1001100 \\ 1001010 \\ \underline{1000110} \\ 11555550 \end{array}$$

ТЕМА 3А 6 КЛАС

1 зад. Докажете, че ако:

$$A = \frac{\left(2,2 - \frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{3}{7}}{\left(5,2 - 2\frac{2}{5}\right) : 2\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + 8\frac{9}{11} - \frac{\left(1,6 + \frac{11}{5}\right) \cdot \frac{1}{1,9} \cdot 4,3}{\left(\frac{12}{5} - 1,3\right) \cdot 4\frac{3}{10}}$$

и

$$B = - \frac{\left(8 \cdot 3^{2n-1}\right)^4 \cdot \left(-32 \cdot 3^{n+2}\right)^2}{\left(-16 \cdot 3^{2n}\right)^5}$$

(n е естествено число), то $A = \frac{9}{4} \cdot B$

(6т.)

2 зад. Средната възраст на едно петчленно семейство е 33,6 години. Да се намерят годините на всеки член от семейството, ако годините на първия, втория и третия член са право пропорционални на 2; 7 и 12, а годините на третия, четвъртия и петия член са обратно пропорционални на 3; 4 и 10.

(7т.)

3 зад. Даден е триъгълник ABC. Върху лъчите $AB^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $CA^{\rightarrow}$ са взети съответно точките K, L и M, така че $BK = \frac{1}{2} \cdot AB$, $CL = \frac{1}{3} \cdot BC$, $AM = \frac{1}{4} \cdot CA$. Да се намери лицето на триъгълника KLM, ако лицето на триъгълника ABC е равно на S кв.см.

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

1 зад.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\left(2,2 - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} + 8 \frac{9}{11} - \frac{\left(1,6 + \frac{11}{5}\right) \cdot \frac{1}{1,9} \cdot 4,3}{\left(\frac{12}{5} - 1,3\right) \cdot 4 \frac{3}{10}}}{\left(5,2 - 2 \frac{2}{5}\right) : 2 \frac{1}{3} \quad \frac{(2,2 - 0,8) \cdot \frac{10}{7}}{(5,2 - 2,4) : \frac{7}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11}} = \\
 &= \frac{(1,6 + 2,2) \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{43}{10} = \frac{1,4}{2,8} : \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{3,8 \cdot \frac{43}{19}}{1,1 \cdot \frac{43}{10}} = \frac{14}{10} \cdot \frac{10}{7} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{38}{11} \cdot \frac{43}{19}}{\frac{(2,4 - 1,3) \cdot \frac{43}{10}}{2,8 : \frac{7}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{11 \cdot \frac{43}{10}}{10 \cdot \frac{7}{10}}} = \\
 &= 2 \cdot \frac{10}{12} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{2 \cdot 43 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 11 \cdot 43} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{20}{11} = \frac{6}{3} + \frac{77}{11} = 2 + 7 = 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{-\left(8 \cdot 3^{2n} - 1\right)^4 \cdot \left(-32 \cdot 3^{n+2}\right)^2}{\left(-16 \cdot 3^{2n}\right)^5} = \frac{-\left(2^3 \cdot 4 \cdot 3^4 \cdot (2n-1)\right)\left(2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot (n+2)\right)}{-2^{4 \cdot 5} \cdot 3^{2n \cdot 5}} = \\
 &= \frac{-2^{\frac{12}{2}} \cdot 3^{\frac{8n-4}{20}} \cdot \frac{10}{2} \cdot \frac{2n+4}{10n}}{-2^{\frac{20}{2}} \cdot 3^{\frac{10n}{3}}} = 2^{\frac{12+10-20}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{8n-4+2n+4}{10n}}}{3^{\frac{10n}{3}}} = 2^2 \cdot \frac{3^{\frac{10n}{3}}}{3^{\frac{10n}{3}}} = 4.
 \end{aligned}$$

$$9 = \frac{9}{4} \cdot 4 - \text{вярно числово равенство} \Rightarrow A = \frac{9}{4} \cdot B$$

2 зад. a, b, c, d, e – търсените години ($a, b, c, d, e > 0$ и цели)

(1) По условие $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 33,6$.

Освен това $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{12} = k_1$ или $a = 2 \cdot k_1, b = 7 \cdot k_1, c = 12 \cdot k_1 \Rightarrow$

$$a + b = 9 \cdot k_1, k_1 = \frac{c}{12} \Rightarrow a + b = 9 \cdot \frac{c}{12} \Rightarrow a + b = 3 \cdot \frac{c}{4} \quad (2)$$

По условие $c = \frac{k_2}{3}$, $d = \frac{k_2}{4}$, $e = \frac{k_2}{10} \Rightarrow$

$$d + e = \frac{k_2}{4} + \frac{k_2}{10} = \frac{7}{20} \cdot k_2, k_2 = 3 \cdot c \Rightarrow d + e = \frac{21}{20} \cdot c \quad (3)$$

От (1), (2) и (3) $\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot c + c + \frac{21}{20} \cdot c = 168, \frac{56}{20} \cdot c = 168$ или $c = 60$

$$\frac{c}{12} = k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{60}{12} = 5 \Rightarrow a = 5 \cdot 2 = 10; b = 5 \cdot 7 = 35;$$

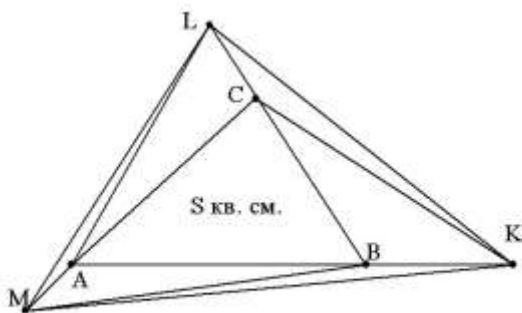
$$c = \frac{k_2}{3} = 60 \Rightarrow k_2 = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{180}{4} = 45 \text{ и } e = \frac{180}{10} = 18$$

I член – 10 год.; II член – 35 год.; III член – 60 год.; IV член – 45 год.; V член – 18 год.

3 зад. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot h_{AB}}{2} = \frac{BC \cdot h_{BC}}{2} = \frac{AC \cdot h_{AC}}{2} = S$ по условие

а) Т, М, К и L – външни



(1)

$$S_{BKC} = \frac{BK \cdot h_{BK}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \right) \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} \cdot S,$$

защото $BK = \frac{1}{2} \cdot AB$ и

$$h_{BK} = h_{AB}.$$

(2)

$$S_{CKL} = \frac{1}{2} \cdot CL \cdot h_{CL} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot BC \right) \cdot h_{BC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BKC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{6} \cdot S,$$

защото $CL = \frac{1}{3} \cdot BC$ и $h_{CL} = h_{CB}$.

Аналогично:

(3)

$$S_{CLA} = \frac{1}{2} \cdot CL \cdot h_{CL} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot CB \right) \cdot h_{CB} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCA} = \frac{1}{3} \cdot S,$$

защото $CL = \frac{1}{3} \cdot CB$ и $h_{CL} = h_{BC}$.

(4)

$$S_{MAL} = \frac{1}{2} \cdot MA \cdot h_{MA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot CA \right) \cdot h_{CA} = \frac{1}{4} \cdot S_{ACL} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S = \frac{1}{12} \cdot S,$$

защото $MA = \frac{1}{4} \cdot CA$ и $h_{MA} = h_{CA}$.

(5)

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_{MA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot AC \right) \cdot h_{AC} = \frac{1}{4} \cdot S_{CAB} = \frac{1}{4} \cdot S, \text{ защото}$$

$$MA = \frac{1}{4} \cdot CA \text{ и } h_{MA} = h_{AC}.$$

(6)

$$S_{MKB} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot h_{BK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \right) \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} \cdot S_{MBA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot S = \frac{1}{8} \cdot S$$

защото $BK = \frac{1}{2} \cdot AB$ и $h_{AB} = h_{BK}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{KLM} &= S_{ABC} + S_{BKC} + S_{CKL} + S_{ACL} + S_{MAL} + S_{AMB} + S_{MKB} = \\ &= S + \frac{1}{2} \cdot S + \frac{1}{6} \cdot S + \frac{1}{3} \cdot S + \frac{1}{12} \cdot S + \frac{1}{4} \cdot S + \frac{1}{8} \cdot S = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \cdot S = \frac{59}{24} \cdot S \text{ (кб.см)} \end{aligned}$$

б) т.М, К и L - вътрешни

$S_{ABC} = S$ по условие

$$S_{BCK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \right) \cdot h_{KB} = \frac{1}{2} \cdot S \quad \text{и} \quad S_{AKC} = \frac{1}{2} \cdot S$$

$$\begin{aligned} S_{KBL} &= \frac{1}{2} \cdot BL \cdot h_{BL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot BC \cdot h_{BC} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_{BC} \right) = \frac{2}{3} \cdot S_{BCK} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot S \right) = \frac{1}{3} \cdot S \end{aligned}$$

Аналогично:

$$S_{AKM} = \frac{1}{4} \cdot S_{AKC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{8} \cdot S;$$

$$S_{MLC} = \frac{3}{4} \cdot S_{ALC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S = \frac{1}{4} \cdot S.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{KLM} &= S_{ABC} - S_{KBL} - S_{LCM} - S_{AKM} = S - \frac{1}{3} \cdot S - \frac{1}{4} \cdot S - \frac{1}{8} \cdot S = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \cdot S = \frac{7}{24} \cdot S. \end{aligned}$$

в) $S_{KLM} = \frac{11}{24} \cdot S$, т. L – външна; т. М и К – вътрешни.

г) $S_{KLM} = \frac{13}{24} \cdot S$, т. М – външна; т. L и К – вътрешни.

д) $S_{KLM} = \frac{17}{24} \cdot S$, т. К – външна; т. М и L – вътрешни.

е) $S_{KLM} = \frac{21}{24} \cdot S$, т. М и L – външни, т. К – вътрешна;

ж) $S_{KLM} = \frac{36}{24} \cdot S$, т. М и К – външни, т. L – вътрешна;

з) $S_{KLM} = \frac{37}{24} \cdot S$, L и К – външни, т. М – вътрешна.

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

1 зад. Дадено е уравнението $6.(k.x-6)+24=5k.x$, където k е цяло число. Да се намери за кои стойности на k уравнението:

а) има за корен числото $-1\frac{1}{3}$.

б) няма решение

в) е равносилно на уравнението

$$\frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{\frac{x}{2} - 3}{6} \right) + \left(2x - \frac{1}{2} \right)^2 - (2x - 3)(2x + 3) = \frac{5}{12} \cdot (x + 3) - \frac{3x - 2}{4} + x + \frac{1}{4}$$

г) има за корен естествено число.

(6т.)

2 зад. От град А и град В тръгват едновременно един срещу друг два автобуса, които, движейки се с постоянни скорости, се срещат на 30 км от град В. Когато автобусът от А стигне до В, прави там престой от 30 минути и се връща обратно. Автобусът от В също след престой от 30 минути в А тръгва обратно към В. Втората среща на автобусите става на 25 км от А. Да се намери разстоянието между градовете А и В.

(7т.)

3 зад. Даден е квадрат ABCD. Върху страните му CD и BC са взети съответно вътрешни точки М и N, така че $\angle MAN = 45^\circ$. Да се определи периметър на $\triangle MNC$, ако $AB=a$.

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

1 зад. $6.(k.x - 6) + 24 = 5.k.x$

$$6.k.x - 36 + 24 = 5.k.x$$

$$6.k.x - 12 - 5.k.x = 0$$

$$k.x = 12$$

а) $k \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = 12 \Rightarrow -4.k = 36 \Rightarrow k = -9$

$$\text{б) } k \cdot x = 12$$

$$k = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 12 - \text{няма решение}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{\frac{x}{2} - 3}{6} \right) + \left(2 \cdot x - \frac{1}{2} \right)^2 - (2 \cdot x - 3)(2 \cdot x + 3) = \\ = \frac{5}{12} \cdot (x + 3) - \frac{3 \cdot x - 2}{4} + x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{x - 6}{12} \right) + 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{1}{4} - 4 \cdot x^2 + 9 = \frac{5x}{12} + \frac{15}{12} - \frac{3 \cdot x - 2}{4} + x + \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} - \frac{x - 6}{36} + 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{1}{4} - 4 \cdot x^2 + 9}_{36} = \frac{5 \cdot x}{12} + \frac{15}{12} - \frac{3 \cdot x - 2}{4} + x + \frac{1}{4}$$

$$24 - x + 6 - 72 \cdot x + 9 + 324 = 15 \cdot x + 45 - 27 \cdot x + 18 + 36 \cdot x + 9$$

$$-x - 72 \cdot x - 15 \cdot x + 27 \cdot x - 36 \cdot x = -24 - 6 - 9 - 324 + 45 + 18 + 9$$

$$97 \cdot x = 291 \Rightarrow x = 3$$

$$k \cdot x = 12, 3 \cdot k = 12 \Rightarrow k = 4$$

$$\text{г) } k \neq 0 \Rightarrow k = \frac{x}{12}$$

$$x \in N \Rightarrow k/12 \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 6, 12.$$

2 зад.

Да означим търсеното разстояние с x км, $x > 0$, скоростта на автобуса, тръгнал от А – с v_1 км/ч, а скоростта на другият автобус – с v_2 км/ч. Тъй като автобусите са тръгнали едновременно, те са изминали разстоянието до първата си среща за едно и също време:

$$\text{I начин) } \frac{30}{v_2} = \frac{x - 30}{v_1} \Rightarrow (1) \frac{v_1}{v_2} = \frac{x - 30}{30}$$

Времето от тръгването на автобусите до втората им среща е също еднакво за двата автобуса:

$$\frac{x}{v_1} + \frac{1}{2} + \frac{x-25}{v_1} = \frac{x}{v_2} + \frac{1}{2} + \frac{25}{v_2} \Rightarrow (2) \frac{v_1}{v_2} = \frac{2x-25}{x+25}$$

$$\text{От (1) и (2)} \Rightarrow \frac{x-30}{30} = \frac{2x-25}{x+25}$$

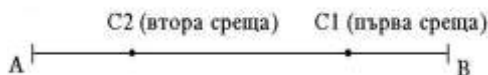
$$\Leftrightarrow x^2 - 65x = 0 \Leftrightarrow x(x-65) = 0, \text{ но в задачата } x \neq 0 \Rightarrow x = 65,$$

т.е. $A = 65 \text{ км}$

II начин)

$$AC_1 + C_1B = AB$$

$$(AB + BC_2) + (BA + AC_2) = AB + BA + (AC_2 + C_2B) = 3 \cdot AB$$



Тъй като скоростта на всеки от автобусите остава постоянна, а

престоите им са едни и същи, всеки от тях е изминал до втората среща път, 3 пъти по-дълъг от пътя, изминат от него до първата среща. Ето защо автобусът, тръгнал от В, е изминал общо $3 \cdot 30 = 90 \text{ км}$ и това разстояние е с 25 км по-дълго от разстоянието между А и В $\Rightarrow AB = 90 - 25 = 65 \text{ км}$

3 зад. Върху лъча $CB \rightarrow$ построяваме M_1 , така че $BM_1 = DM$.

$\triangle AMD \cong \triangle AM_1B$, защото $AD = AB$, $DM = BM_1$ и $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 90^\circ$

$$\Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle BAM_1 \text{ и } AM = AM_1$$

$$\text{Но } \sphericalangle DAM + \sphericalangle NAB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \sphericalangle BAM_1 + \sphericalangle NAB = 45^\circ =$$

$$\sphericalangle NAM_1$$

$$\Rightarrow \triangle NAM_1 \cong \triangle MAN, \text{ тъй като } AN$$

$$- \text{обща, } AM = AM_1, \sphericalangle MAN =$$

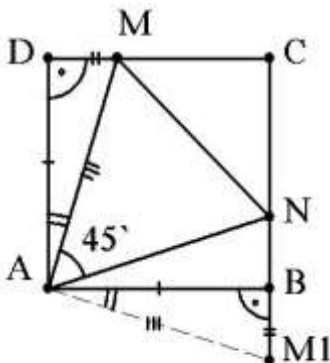
$$\sphericalangle NAM_1 = 45^\circ \Rightarrow MN = NM_1$$

$$P_{\triangle MNC} = MN + MC + NC = NM_1 +$$

$$MC + NC = (NB + BM_1) + CN +$$

$$CM = (BN + NC) + (DM + MC) =$$

$$a + a = 2a, (BM_1 = DM).$$



ТЕМА ЗА 8 КЛАС

1 зад. Да се пресметне стойността на израза

$$A = \frac{a+2}{a-2} : \left(\frac{6a}{a^3-8} + \frac{2a}{a^2+2a+4} + \frac{1}{2-a} \right) - \frac{4a+4}{a-2}$$

при

$a = \sqrt{11+6 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{2}$ и да се определи какво число е тя – рационално или ирационално.

(6т.)

2 зад. Върху дъгата $\widehat{BC}$ от окръжността, описана около остроъгълния триъгълник ABC е взета точка P. Нека P₁ и P₂ са петите на перпендикулярите, спуснати от P съответно към AB и AC, а H е ортоцентърът на триъгълник ABC. Да се докаже, че правата P₁P₂ разполовява отсечката HP.

(7т.)

3 зад. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото $n^2+6n+31$ не се дели на 121.

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

1 зад. Преобразуваме израза и получаваме:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+2}{a-2} : \left[\frac{6a+2a(a-2)-(a^2+2a+4)}{(a-2)(a^2+2a+4)} \right] - \frac{4a+4}{a-2} = \\ &= \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a^2-4} - \frac{4a+4}{a-2} = \frac{a^2+2a+4}{a-2} - \frac{4a+4}{a-2} = a \end{aligned}$$

От вида на израза и извършените преобразования се вижда, че те имат смисъл при $a \neq \pm 2$.

$$A = a = \sqrt{11+6 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = \underbrace{3+\sqrt{2}}_{+} - \sqrt{2} = 3 \neq \pm 2$$

$\Rightarrow A$ е рационално число, т.е. $A \in \mathbb{Q}$.

2 зад. Ортоцентърът H е вътрешна точка за $\triangle ABC$, който по условие е остроъгълен.

Нека M е среда на отсечката HP . Достатъчно

е да се убедим, че $\angle P_1MP_2 = 180^\circ$. Да означим с M_1 и

M_2 петите на

перпендикулярите, спуснати от M съответно към правите AB и AC . В четириъгълника AM_1MM_2

имаме $\angle AM_2M + \angle AM_1M = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle CAB + \angle M_1MM_2 = 180^\circ$

и решението на задачата се

свежда до доказателството на равенството (1) $\angle P_1MM_1 +$

$\angle P_2MM_2 = \angle CAB$.

Непосредствено се съобразяваме, че MM_1 и MM_2 са средни отсечки съответно в трапеците P_1PHC_1 и P_2PHB_1 .

Тогава MM_1 и MM_2 са симетрали съответно на отсечките P_1C_1 и P_2B_1 , следователно

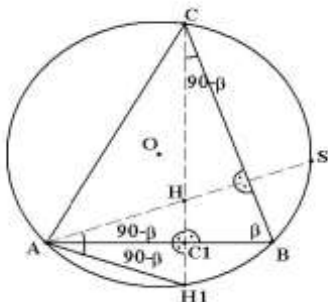
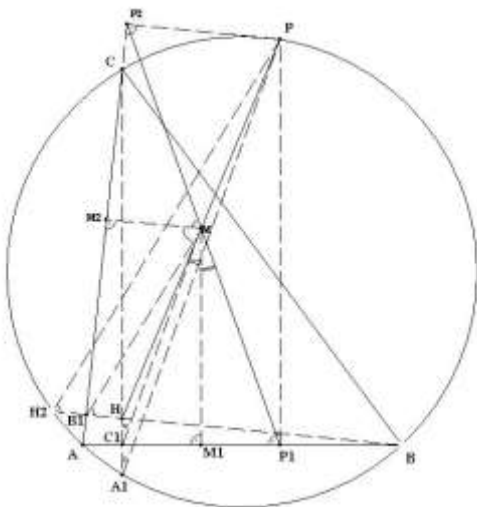
(2) $\angle P_1MM_1 = \angle C_1MM_1 = \angle HC_1M$, $\angle P_2MM_2 = \angle B_1MM_2 =$

$\angle HB_1M$.

Нека H_1 и H_2 са съответно симетричните точки на ортоцентъра H спрямо AB и AC . Известно е, че H_1 и H_2 лежат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

$$\angle H_1CB = \frac{H_1\hat{B}}{2} = \angle H_1AB$$

$$\Rightarrow \triangle AH_1C_1 \cong \triangle ANC_1 \Rightarrow HC_1 = C_1H_1$$



Тъй като MB_1 и MC_1 са средни отсечки съответно в $\triangle PH_2H$ и $\triangle PH_1H$, то (3) $\sphericalangle HB_1M = \sphericalangle H H_2P$, $\sphericalangle HC_1M = \sphericalangle H H_1P$.
 От (2) и (3) получаваме $\sphericalangle P_1MM_1 + \sphericalangle P_2MM_2 = \sphericalangle HC_1M + \sphericalangle HB_1M = \sphericalangle H H_1P + \sphericalangle H H_2P = \sphericalangle CH_1P + \sphericalangle BH_2P = \frac{1}{2} \cdot \widehat{CP} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{BP} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC} = \sphericalangle CAB$. С това равенството (1) е установено. Ще отбележим, че твърдението е вярно и за произволен триъгълник.

3 зад. $n^2 + 6n + 31 = n^2 + 6n + 9 + 22 = (n+3)^2 + 22$. Да допуснем, че $121/n^2 + 6n + 31 \Rightarrow (n+3)^2 + 22 = 121k \Rightarrow (n+3)^2 = 121k - 22 \Rightarrow (n+3)^2 = 11 \cdot (11k - 2)$. Лявата страна е точен квадрат $\Rightarrow 11/11 \cdot k - 2$ – противоречие.

ТЕМА ЗА 9 КЛАС

1 зад. Решете уравненията:

а) $\sqrt{4x^2 + x - 5} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

б) $x + \sqrt{x^2 - 1} = a$, където a е реален параметър.

(5т.)

2 зад. Нека x , y и z са такива реални числа, че

$$x + y + z = 5, \quad xy + xz + yz = 3. \text{ Да се докаже, че } z \in \left[-1, \frac{13}{3}\right].$$

(5т.)

3 зад. В правоъгълния триъгълник ABC е построена височината CD към хипотенузата. Точките M и P са съответно на отсечките CD и BD , такива че $MP \parallel BC$. Да се намери ъгълът между правите AM и CP .

(6т.)

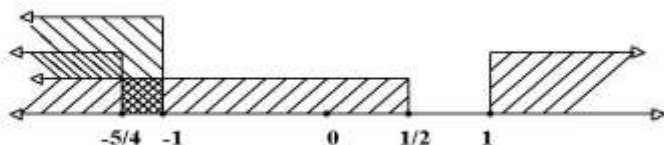
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 КЛАС

1 зад. а)

$$4 \cdot x^2 + x - 5 = (x-1)(4x+5)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$2 \cdot x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$$



$$DO: \left| \begin{array}{l} (x-1)(4x+5) \geq 0 \\ (x-1)(x+1) \geq 0 \\ (x-1)(2x-1) \geq 0 \end{array} \right| \Rightarrow DO: \left(-\infty; -\frac{5}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$\sqrt{x-1}(\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x-1} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-1}$$

$$x_1 = 1 \in DO, \quad x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{212}}{7} \in DO$$

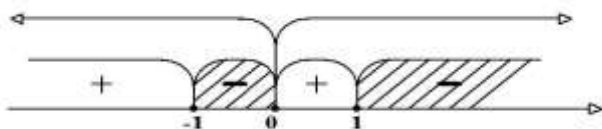
б) ДМ се определя от неравенствата:

$$\sqrt{x^2 - 1} = a - x \Rightarrow a - x \geq 0 \quad \text{или} \quad x \in (-\infty; a] \quad \text{и}$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{или} \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1, \infty).$$

$$x^2 - 1 = a^2 - 2ax + x^2 \Rightarrow 2ax = a^2 + 1$$

$\Rightarrow x = \frac{a^2 + 1}{a}$ при $a \neq 0$ и ако $a = 0$, то уравнението $0x = 1$ няма решение.



$$\left| \begin{array}{l} \frac{a^2 + 1}{2.a} \leq -1 \\ \frac{a^2 + 1}{2.a} \leq a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{(a+1)^2}{2.a} \leq 0 \\ \frac{1-a^2}{2.a} \leq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} a < 0 \\ (1-a)(1+a).2.a \leq 0 \end{array}$$

или

$$\left| \begin{array}{l} \frac{a^2 + 1}{2.a} \geq 1 \\ \frac{a^2 + 1}{2.a} \leq a \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{(a-1)^2}{2.a} \geq 0 \\ \frac{1-a^2}{2.a} \leq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} a > 0 \\ (1-a)(1+a).2.a \leq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ при $a \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$ уравнението има решение $x = \frac{a^2 + 1}{2.a}$.

2 зад.

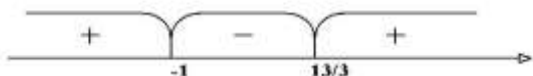
$$x + y = 5 - z$$

$$xy = 3 - xz - yz = 3 - z(x + y) = 3 - z(5 - z)$$

$\Rightarrow x$ и y са корени на уравнението $t^2 - (5 - z)t + 3 - z(5 - z) = 0$

Но уравнението има реални корени x и $y \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow$

$$3z^2 - 10z - 13 \leq 0, \quad z_1 = \frac{13}{3}, \quad z_2 = -1 \Rightarrow z \in \left[-1; \frac{13}{3}\right]$$

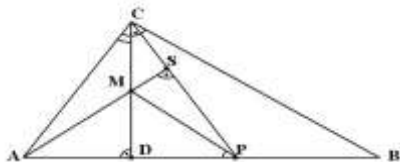


3 зад. Нека $AM \cap CP = S$

а) $\triangle CDB \sim \triangle ADC$, защото са правоъгълни и $\angle CAD = \angle BCD$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} = \frac{CB}{AC} \quad (1)$$

$$\text{От } MP \parallel BC \Rightarrow \frac{DB}{DP} = \frac{CD}{DM} \Rightarrow \frac{DB}{CD} = \frac{DP}{DM} \quad (2)$$

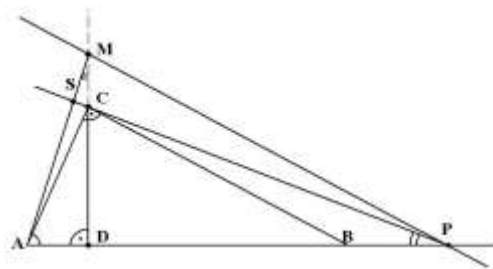


$$\text{От (1) и (2)} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{DP}{DM} &= \frac{CD}{AD} \\ \angle ADM &= \angle ADP \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle CDP \Rightarrow \angle MAD = \angle PCD$$

$$\Rightarrow \triangle APS \sim \triangle CPD, \text{ тъй като } \angle SAP = \angle PCD \text{ и } \angle DPS - \text{общ}$$

$$\Rightarrow \angle ASP = \angle CDP = 90^\circ \Rightarrow AM \perp CP$$



$$\text{б) } \triangle ADC \sim \triangle CDB \sim \triangle MDP$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{DC}{DP} = \frac{AC}{PM} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DM}{DP} \quad (1)$$

$$\angle ADM = \angle CDP = 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CDP \Rightarrow \angle AMD = \angle CPD$$

$$\triangle APS \sim \triangle AMD, \text{ защото } \angle AMD = \angle APS \text{ и } \angle MAD = \angle SAP$$

$$\Rightarrow \angle ASP = \angle ADM = 90^\circ \Rightarrow AM \perp CP$$

в) Доказателството е аналогично и в други възможни случаи

Задачата има и кратко решение, което ще опишем само в един от случаите—например в случай а). От $MP \parallel BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow AC \perp MP$. Точката М е ортоцентър в $\triangle APC$, защото $CD \perp AP$ и $AC \perp MP \Rightarrow AM \perp CP$.

ТЕМА ЗА 10 КЛАС

1 зад. Да се реши уравнението $2^{x^2+x-a} - 2^{x^2+x-3-a} = 56$, където а е най-голямото цяло решение на неравенството

$$\log_{0,5} \frac{x+5}{3x-2} \leq \log_{0,5}(7-x)$$

(6т.)

2 зад. Измежду корените на уравнението

$$\frac{\cos(3\pi.x)}{1 - \sqrt{3}.tg(\pi.x)} = 0$$

да се намери този, който се намира на най-малко разстояние до $\sqrt{8}$.

(7т.)

3 зад. В $\triangle ABC$ отсечките AA_1 ($A_1 \in BC$), BB_1 ($B_1 \in AC$) и CC_1 ($C_1 \in AB$) са височини. Да се намери отношението на радиусите на описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

(7т.)

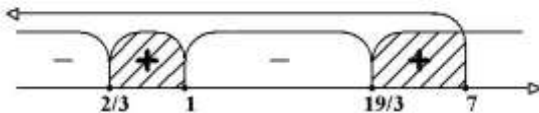
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

1 зад. $2^{x^2+x-a} - 2^{x^2+x-3-a} = 56$

$$\log_{0,5} \frac{x+5}{3x-2} \leq \log_{0,5}(7-x)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x+5}{3x-2} > 0 \\ 7-x > 0 \\ \frac{x+5}{3x-2} \geq 7-x \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 7-x > 0 \\ \frac{x+5}{3x-2} \geq 7-x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x < 7 \\ \frac{3x^2 - 22x + 19}{3x-2} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x < 7 \\ 3\left(x - \frac{19}{3}\right) \cdot (x-1) \cdot (3x-2) \geq 0, \\ x \neq \frac{2}{3} \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; 1 \right] \cup \left[\frac{19}{3}; 7 \right) \Rightarrow a = 1$$

$$2^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x-3-1} = 56 \Leftrightarrow 2^{x^2+x-1} \cdot (1 - 2^{-3}) = 56 \Leftrightarrow 2^{x^2+x-1} = 2^6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 1 = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

2 зад. $\frac{\cos(3\pi \cdot x)}{1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot x)} = 0$

$$1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot x) \neq 0, \quad \operatorname{tg}(\pi \cdot x) \neq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \pi \cdot x \neq \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \frac{1}{6} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

За да съществува $\operatorname{tg}(\pi \cdot x)$, то

$$\pi \cdot x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad \text{m.e.} \quad x \neq \frac{1}{2} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

И така DO : $x \neq \frac{1}{2} + k$ и $x \neq \frac{1}{6} + k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Именно в тази област трябва да решим уравнението

$$\cos(3\pi \cdot x) = 0 \Rightarrow 3\pi \cdot x = \frac{(2n+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Сега трябва да проверим кои от решенията $\in DO$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} + \frac{n}{3} \neq \frac{1}{2} + k &\Leftrightarrow n \neq 3k + 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{n}{3} \neq \frac{1}{6} + k &\Leftrightarrow n \neq 3k \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 3k + 2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ако $k = 0$, то $n = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

За $k = 1$, $n = 5 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$

За $k = 2$, $n = 8 \Rightarrow x = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$

За $k = 3$, $n = 11 \Rightarrow x = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$

Като сравним $\frac{11}{6}$ и $\sqrt{8}$, получаваме $\frac{11}{6} < \sqrt{8}$

Аналогично сравняваме

$\frac{17}{6}$ и $\sqrt{8}$, т.е. $\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2}$ и $\sqrt{8}$ и получаваме, че $\frac{17}{6} > \sqrt{8}$

Задачата се свежда до определянето на по-малкото от

числата $\left(\sqrt{8} - \frac{11}{6}\right)$ и $\left(\frac{17}{6} - \sqrt{8}\right)$. Разликата

$$\left(\sqrt{8} - \frac{11}{6}\right) - \left(\frac{17}{6} - \sqrt{8}\right) = 2\sqrt{8} - \frac{28}{6} = 2\sqrt{8} - \frac{14}{3} > 0, \text{ защото}$$

$$\frac{14}{3} < 2\sqrt{8} \Rightarrow \left|\sqrt{8} - \frac{11}{6}\right| > \left|\sqrt{8} - \frac{17}{6}\right| \Rightarrow x = \frac{17}{6}$$

3 зад.

а) $\gamma < 90^\circ$

$$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

$$\text{От } \triangle AA_1C: \frac{CA_1}{CA} = \cos \gamma \quad (1)$$

Около четириъгълник ABA_1B_1 може да се опише окръжност

$$\Rightarrow \angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = 90^\circ - \alpha$$

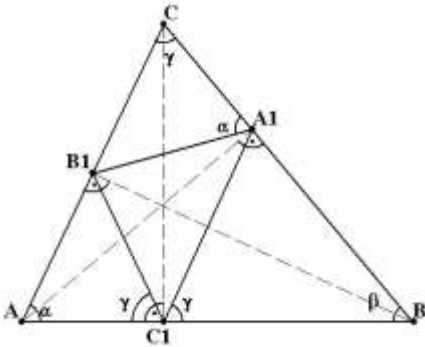
$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle B_1A_1C &= 90^\circ - \angle AA_1B_1 = \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha \end{aligned}$$

Следователно $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$:

$$\begin{cases} \angle \gamma - \text{общ} \\ \angle B_1A_1C = \angle BAC = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C} = \frac{AC}{A_1C} \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{\cos \gamma} \quad (3)$$



Аналогично се доказва, че $\angle A_1C_1B = \gamma$ и $\angle AC_1B_1 = \gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - (\angle AC_1B_1 + \angle A_1C_1B) = 180^\circ - 2\gamma$$

От синусова теорема за

$$\triangle A_1B_1C_1: \frac{A_1B_1}{\sin(180^\circ - 2\gamma)} = \frac{A_1B_1}{\sin 2\gamma} = 2R_1 \quad (4)$$

(R_1 – радиус на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$)

$$\text{От синусова теорема за } \triangle ABC: \frac{AB}{\sin \gamma} = 2R \quad (5)$$

(R – радиус на описаната окръжност около $\triangle ABC$)

От (3), (4) и (5)

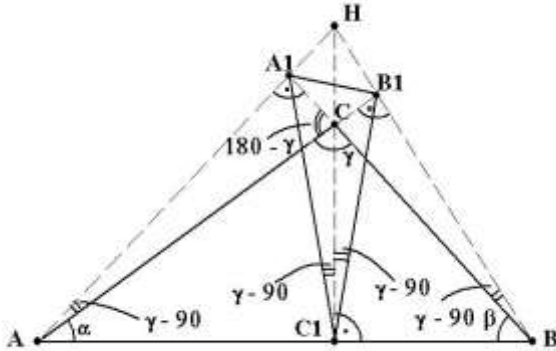
$$\Rightarrow \frac{R}{R_1} = \frac{AB}{\sin \gamma} : \frac{A_1B_1}{\sin 2\gamma} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin \gamma} = \frac{2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{\cos \gamma \cdot \sin \gamma} = 2$$

б) $\gamma > 90^\circ$

$$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

$$\angle ACA_1 = 180^\circ - \gamma \Rightarrow \angle AA_1C = 90^\circ - (180^\circ - \gamma) = \gamma - 90^\circ$$

Около четириъгълника ABB_1A_1 може да се опише окръжност
 $\Rightarrow \angle B_1A_1B = \angle B_1AB = \alpha$ и $\angle A_1BB_1 = \gamma - 90^\circ$



От $\triangle AA_1C$: $\frac{A_1C}{AC} = \sin(\gamma - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$ (1)

Следователно $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$: $\begin{cases} \angle ACB = \angle A_1CB_1 = \gamma \\ \angle B_1A_1C = \angle CAB = \alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C} = \frac{BC}{B_1C} \quad (2)$$

От (1) и (2) $\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = -\frac{1}{\cos\gamma}$ (3)

Около четириъгълника C_1BHA_1 може да се опише окръжност

$$\Rightarrow \angle A_1C_1H = \angle A_1BH = \frac{A_1\widehat{H}}{2} = \gamma - 90^\circ$$

Около четириъгълника $AC_1B_1A_1$ може да се опише окръжност

$$\Rightarrow \angle HAB_1 = \angle HC_1B_1 = \frac{H\widehat{B_1}}{2} = \gamma - 90^\circ \Rightarrow \angle A_1C_1B_1 = 2(\gamma - 90^\circ)$$

Аналогично получаваме (4) $\frac{A_1B_1}{\sin(2\gamma - 180^\circ)} = \frac{A_1B_1}{-\sin 2\gamma} = 2R_1$ и

$$(5) \frac{AB}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \frac{R}{R_1} = \frac{AB}{\sin\gamma} \cdot \frac{(-\sin 2\gamma)}{A_1B_1} = \frac{-2\sin\gamma \cos\gamma}{-\cos\gamma \cdot \sin\gamma} = 2$$

ТЕМА ЗА 11 КЛАС

1 зад. Числата $x_1, x_2, \dots, x_{1993}$ удовлетворяват условията

$$x_1 = x_2 = 1993, x_n = \frac{x_{n+1} + 2x_{n-1}}{3}, n = 2, 3, \dots, 1993. \text{ Да се докаже,}$$

че всички числа x_n са равни на 1993.

(6т.)

2 зад. Реалните числа x, y и c са такива, че $x + y = c - 1$,

$xy = c^2 - 7c + 14$. За коя стойност на c сборът $x^2 + y^2$ приема най-голяма стойност?

(7т.)

3 зад. В правилна четириъгълна пирамида QABCD, всички ръбове са равни помежду си. Сфера с радиус R минава през точка A и се допира до околните ръбове QB и QD в техните среди. Да се намери обемът на пирамидата.

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 КЛАС

1 зад. Дадената зависимост може да се запише във вида

$$x_{n+1} - x_n = 2 \cdot (x_n - x_{n-1}), n = 2, 3, \dots, 1993.$$

$$\text{За } n = 2: x_3 - x_2 = 2 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\text{За } n = 3: x_4 - x_3 = 2 \cdot (x_3 - x_2) = 2 \cdot 2 \cdot (x_2 - x_1) = 2^2 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\dots \dots \dots \Rightarrow x_{n+1} - x_n = 2^{n-1} \cdot (x_2 - x_1)$$

Да допуснем, че $x_2 > x_1$. Тогава редицата с общ член x_n е строго растяща и ще се окаже, че $x_{1993} > x_1$, което противоречи на условието. Аналогично възможността $x_2 < x_1$ също води до противоречие с условието. Остава единствената възможност $x_2 = x_1$, от където се получава $x_{n+1} = x_n = \dots = x_1 = 1993$.

2 зад. Функцията $\varphi(c) = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = -c^2 + 12c - 27 = 9 - (c - 6)^2$ има максимум при $c = 6$.

Дефиниционната област на $\varphi(c)$ не е дадена в явен вид, а се

определя от условието, че x , y и c са реални числа, удовлетворяващи дадените зависимости. Следователно x и y са корени на уравнението $t^2 - (c-1)t + c^2 - 7c + 14$. За да има то реални корени, е необходимо и достатъчно

$D = -3c^2 + 26c - 55 \geq 0$, т.е. $c \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$. В този интервал $\varphi(c)$ е

растяща и НГС е $\varphi(5)=8$. За $c=5$ съществуват реални числа $x=2$, $y=2$, удовлетворяващи условието на задачата.

$(\varphi(c_1) - \varphi(c_2) = (c_2 - 6)^2 - (c_1 - 6)^2 = (c_2 - c_1) \cdot (c_2 + c_1 - 12)$ и ако $c_1 < c_2$, то $c_2 - c_1 > 0$,

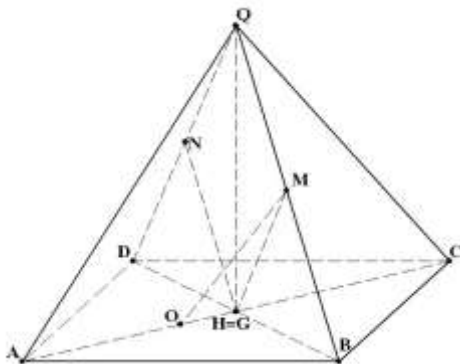
а $c_2 + c_1 - 12 < 0$ при $c \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$

$\Rightarrow \varphi(c_1) - \varphi(c_2) < 0 \Rightarrow \varphi(c_1) < \varphi(c_2)$

$\Rightarrow \varphi(c)$ е растяща функция).

3 зад. Нека M е среда на ръба BQ , а N – среда на DQ . Тогава центърът O на дадената сфера лежи на пресечницата s на равнините през M и N , $\perp$

съответно на BQ и DQ . Нека G е пресечната точка на s с равнината BDQ . Понеже $\triangle BDQ$ е равнобедрен, то G лежи на височината му QH , която е и височина на правилната пирамида. Тъй като MG и NG са симетрала в $\triangle BDQ$, то G е център на описаната около него окръжност. Ако дължината на основния ръб AB е a , то $BQ=DQ=a$ по условие и $DB=a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle BDQ$ е правоъгълен с хипотенуза $BD \Rightarrow$ центърът G на описаната около него окръжност съвпада със средата H на хипотенузата BD . От друга страна, равнината BDQ е $\perp$ на основата $ABCD$, а правата s , която минава през H , е $\perp$ на $BDQ \Rightarrow s$ е правата AC , т.е. центърът O лежи на диагонала AC на основата. Оттук имаме $AO + OH = AH$ или $AO - OH = AH$. И в двата случая $OH^2 = (AO - AH)^2$. Тъй като HM е медиана в



правоъгълния ΔBQH , то $NM = \frac{a}{2}$. От правоъгълния ΔOHM

получаваме $OH^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Като вземем предвид, че $AO = R$,

а $AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, имаме

$$R^2 - \frac{a^2}{4} = \left(R - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{2}.R}{3}$$

Тъй като $AO = R$ е по-малко от $AN = \frac{4.R}{3}$, то точката O е

между A и N . Окончателно за обема V на пирамидата получаваме:

$$\begin{aligned} V &= \frac{B.H}{3} = \frac{a^2.H}{3} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3.\sqrt{2}}{6} = \left(\frac{4.\sqrt{2}.R}{3} \right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \\ &= \frac{2^6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^3 \cdot \sqrt{2}}{3^3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2^7 \cdot R^3}{3^4} = \frac{128.R^3}{81} \end{aligned}$$

ТЕМА ЗА XII КЛАС

1 зад. Да се реши уравнението $\sqrt{3x-2} = \frac{x^2}{1-x}$

(6т.)

2 зад. За кои цели стойности на x , y , z полиномите x^2-x-5 ; y^2+3y+3 ; $-z^2-5z-5$ имат една и съща числена стойност.

(7т.)

3 зад. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, с дължина a на ръба му, е пресечен с две равнини. Едната равнина минава през средите на AB и BC и е успоредна на BD_1 , а другата минава през върха B_1 и е перпендикулярна на BD_1 . Да се намери дължината на отсечката, която е обща за двете сечения.

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 12 КЛАС

1 зад. Като имаме предвид, че $\sqrt{3x-2} \geq 0$ и $x^2 \geq 0$,

виждаме, че за да има уравнението решение при $3x-2 \geq 0$, $x \neq 1$, необходимо условие е $1-x > 0$.

И така, ако x е решение, то $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$. В този интервал

функциите $f(x) = \sqrt{3x-2}$ и $g(x) = \frac{x^2}{1-x}$ са растящи, защото

производните им са неотрицателни (убедете се в това самостоятелно). При това $f(x) \leq f(1) = 1$ (при $x = 1$ функцията

f е дефинирана), а $g(x) > g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} > 1$. И така,

$\sqrt{3x-2} \leq 1 < \frac{x^2}{1-x}$, следователно уравнението няма решение.

2 зад. Нека

$$x^2 - x - 5 = k$$

$$y^2 + 3y + 3 = k \quad \Rightarrow k \in \mathbb{Z}, \text{ защото } x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$-z^2 - 5z - 5 = k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 5 - k = 0 \\ y^2 + 3y + 3 - k = 0 \Rightarrow \\ z^2 + 5z + 5 + k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D_1 = 4k + 21 \geq 0, \text{ (1)} \\ D_2 = 4k - 3 \geq 0, \text{ (2)} \\ D_3 = 5 - 4k \geq 0, \text{ (3)} \end{cases}$$

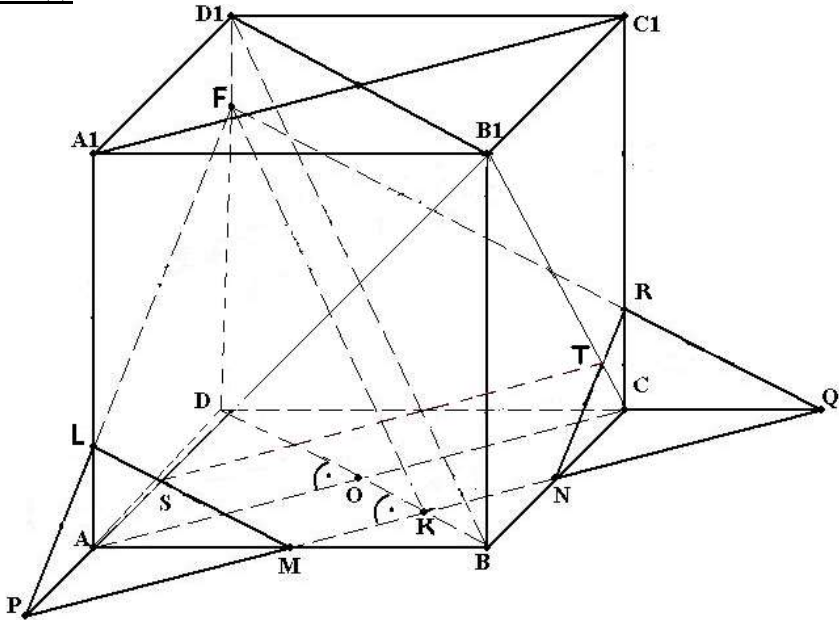
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{5}{4}, \text{ но } k - \text{цяло число} \Rightarrow k = 1$$

$$\text{От } x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2. \text{ От } y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -1, y_2 = -2. \text{ От } z^2 + 5z + 6 = 0 \Rightarrow z_1 = -3, z_2 = -2.$$

Задачата има осем решения за (x, y, z) :
 $(3, -2, -2); (3, -2, -3); (3, -1, -2); (3, -1, -3);$
 $(-2, -1, -2); (-2, -1, -3); (-2, -2, -2); (-2, -2, -3)$

3 зад.



$AB = BC = \dots = A_1B_1 = a$; $AC \perp DB$; М-среда на AB , N-среда на $BC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN \perp DB$

Нека $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA}_1 = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ и

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$. Тогава $\vec{D_1B} = \vec{DB} - \vec{DD_1} = \vec{AB} - \vec{AD} - \vec{AA_1} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

и $\vec{AB_1} = \vec{a} + \vec{b}$. $\vec{D_1B} \cdot \vec{AB_1} = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Rightarrow D_1B \perp AB_1$ (1)

Но $AC \perp DB$ и $AC \perp DD_1 \Rightarrow AC \perp (BDD_1) \Rightarrow BD_1 \perp AC$ (2)

(1) и (2) $\Rightarrow BD_1 \perp (AB_1C)$. Нека $BD \cap MN = K$ и λ е равнина през М и N, успоредна на BD_1 .

Нека $(BDD_1) \cap \lambda = KF$, където $F \in DD_1$.

Обосноваваме, че $KF \parallel BD_1$.

Сечението на куба с (AB_1C) е ΔAB_1C .

Построяваме сечението MNRFL на λ с куба ($AD \cap MN=P$, $PF \cap AA_1=L$, $FR \parallel LM$, $F \in CC_1$).

Ако $AB_1 \cap ML = S$ и $B_1C \cap RN=T$, то $ST = ?$

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = DB$$

$$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

От $AP \parallel BN$ и теорема на Талес, следва $AP:BN=AM:BM$, откъдето $AP=BN=0,5.a$ и $PD=1,5a$.

От $MK \parallel AO$ и теорема на Талес, следва $BK:BO=BM:AB$, откъдето $BK=0,5.BO=0,5.(0,5.BD)=0,25.BD$ и $DK=0,75.BD$.

От $KF \parallel BD_1$ и теорема на Талес, следва $DF:DD_1=DK:BD$, откъдето $DF=0,75.DD_1 = 0,75.a$.

От $AL \parallel DF$ и теорема на Талес, следва $AL:DF=AP:PD$, откъдето $AL=0,25.a$.

Като използваме Питагорова теорема за $\triangle AML$ намираме ML .

От AS - ъглополовяща в $\triangle AML$ следва $LS:SM=AL:AM$, но $LS+SM=ML$, откъдето намираме LS и SM . От формулата за дължина на ъглополовящата $AS^2 = AL.AM - LS.SM$ намираме

$$AS = \frac{a\sqrt{2}}{6}, SB_1 = \frac{5a\sqrt{2}}{6} \text{ и } ST = \frac{5a\sqrt{2}}{6},$$

($AC \parallel ST$ и от теоремата на Талес $AC : ST=AB_1 : SB_1$).