

1994 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

1 зад. Да се намери най-малкото цяло число, което се дели на 7, а при делене на 2, 3, 4, 5 и 6 дава остатък 1. Да се посочат и други числа със същото свойство.

(6т.)

2 зад. Лицето на успоредника ABCD е 42 кв.см, а точките М и Р са среди съответно на страните му АВ и ВС.

а) Намерете лицата на триъгълниците АВР и ВСМ.

б) Ако О е пресечната точка на АР и СМ, докажете, че лицата на триъгълниците АОМ и СРО са равни.

в) Ако разстоянията от точка О до страните АВ и ВС са равни, докажете, че успоредникът ABCD е ромб.

(7т.)

3 зад. В цветарски магазин има 14 саксии с по един, с по два и с по три зюмбюла. Броят на всички зюмбюли е 26. Саксиите с по един зюмбюл са толкова на брой, колкото са всички останали саксии. Колко са саксиите с по 1, с по 2 и с по 3 зюмбюла?

(7т.)

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

1 зад. Тъй като НОК (2, 3, 4, 5, 6)=60, всички числа, които се делят едновременно на 2, 3, 4, 5 и 6 имат вида $60n$, където n е цяло положително число. Тогава числата, които при деление на 2, 3, 4, 5 и 6 дават остатък 1, са от вида $60n + 1$. Даваме на n стойности 1, 2, 3, 4, 5 и т.н. и проверяваме кое от получените числа се дели на 7. Най-малкото такова число е $60 \cdot 5 + 1 = 301$. Други числа със същото свойство можем да получим, като прибавим към 301 кратни на числото 7. $60 \cdot 7 = 420$ – например $721 = 301 + 420$.

2 зад. а) $S_{\triangle ABP} = 0,5$, $S_{\triangle ABC} = 0,5$. $(0,5 \cdot S_{\triangle ABCD}) = 42 : 4 = 10,5 \text{ cm}^2$.
 $S_{\triangle MBC} = 0,5$, $S_{\triangle ABC} = 0,5$. $(0,5 \cdot S_{\triangle ABCD}) = 42 : 4 = 10,5 \text{ cm}^2$.

б) $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle MBC}$, следователно

$$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ABR} - S_{\triangle MBRO} = S_{\triangle MBC} - S_{\triangle MBRO} = S_{\triangle CPO}.$$

в) От б) и условието във в) следва, че $AM=CP$, откъдето $AB=BC \Rightarrow$ успоредникът $ABCD$ е ромб.

3 зад. По условие от всичките 14 саксии половината са с по 1 зюмбюл, т.е. те са $14:2=7$ саксии. Зюмбюлите в останалите 7 саксии са $26-7=19$. Във всяка от тях има поне по два зюмбюла, т.е. общо поне $7 \cdot 2=14$ зюмбюла. Значи по 3 зюмбюла има в $19 - 14=5$ саксии. По два зюмбюла има в $7-5=2$ саксии.

ТЕМА ЗА 6 КЛАС

1 зад. Дадена е функцията $y = f(x) = 5x + 1$. Да се намерят:

а) абцисата на точка от графиката на функцията, чиято ордината е -4 и стойността на функцията за $x = -4$;

б) координатите на пресечните точки на графиката на функцията с координатните оси;

в) за коя стойност на x е изпълнено условието

$$f(5f(x)+1)+5f(x)+1 = f(5x+1)$$

(6т.)

2 зад. Нека M и N са вътрешни точки съответно за страните AB и CD на успоредника $ABCD$. Отсечките AN и DM се пресичат в точка P , отсечките BN и CM – в точката Q . Да се докаже, че:

а) $S_{\triangle APD} + S_{\triangle BCQ} = S_{MQNP}$;

б) $S_{\triangle DPN} + S_{\triangle CNQ} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle BQM}$.

(7т.)

3 зад. За всяко естествено число n означаваме $f(n) = (-1)^n n$. Да се намери сумата $f(1) + f(2) + \dots + f(1993)$.

(7т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

1 зад.

$$f(x) = 5x + 1$$

$$a) y = -4, x = ? \quad 5x + 1 = -4 \Rightarrow x = -1$$

$$y = ? \quad x = -4 \quad f(-4) = 5(-4) + 1 = -19 \Rightarrow f(-4) = -19$$

$$б) x = 0, y = ? \quad y = 5 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1) = f(x) \cap OY$$

$$y = 0, x = ? \quad 0 = 5x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{5}, 0\right) = f(x) \cap OX$$

$$в) f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6$$

$$5 \cdot f(x) + 1 = 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6$$

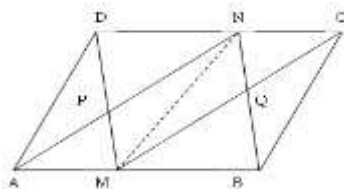
$$f(5 \cdot f(x) + 1) = f(25x + 6) = 5(25x + 6) + 1 = 125x + 31$$

$$\Rightarrow 125x + 31 + 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6 \Rightarrow$$

$$125x + 31 + 25x + 5 + 1 = 25x + 6 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{31}{125}$$

2 зад.



$$a) S_{\triangle AMD} = S_{\triangle AMN} = \frac{AM \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMD} - S_{\triangle AMP} = S_{\triangle AMN} - S_{\triangle AMP}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle APD} = S_{\triangle MNP}$$

$$\text{Аналогично } S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle MQN}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle APD} + S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle MNP} + S_{\triangle MQN} = S_{MQNP}$$

$$б) S_{\triangle DPN} + S_{\triangle CNQ} = S_{\triangle MCD} - S_{MQNP} = S_{\triangle ABN} - S_{MQNP} = S_{\triangle AMP} + S_{\triangle BQM}$$

($S_{\triangle MCD} = S_{\triangle ABN}$, тъй като триъгъниците имат равни основи и височини)

3 зад. Ако n е четно число, то $(-1)^n = 1$. Ако n е нечетно число, то $(-1)^n = -1 \Rightarrow f(n) = n$ за $\forall$ четно n и $f(n) = -n$ за $\forall$ нечетно n . Тогава

$$f(1) + f(2) + \dots + f(1993) = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 1992 - 1993 = \\ = (-1 + 2) + (-3 + 4) + \dots + (-1991 + 1992) - 1993 = 996 \cdot 1 - 1993 = -997$$

(Сборът на всяка двойка числа в скобите е равен на 1 и тези двойки са толкова, колкото са четните числа от 1 до 1993, т.е. $1992:2 = 996$).

4 зад. Построяваме графиката на линейната функция $f(x) = 2x + 1$ по таблицата.

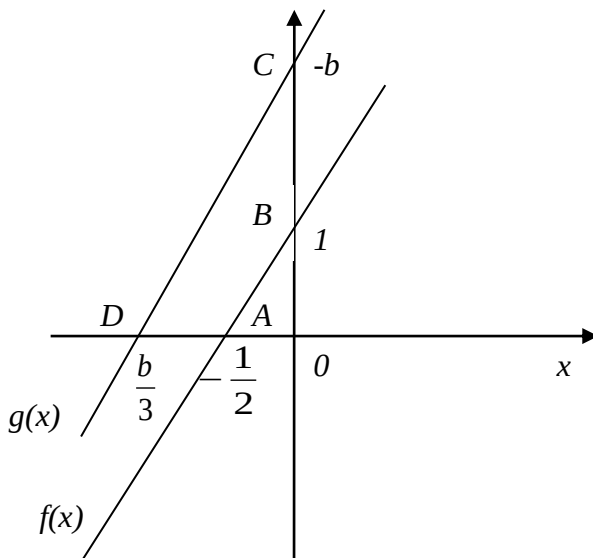
X	0	-1/2
Y	1	0
точки	B	A

За линейната функция $g(x) = 3x - b$ получаваме следната таблица

X	0	-b/3
Y	-b	0
точки	B	A

$$b \in \mathbb{Z}^-, \text{ т.е. } b - \text{цяло и } b < 0 \Rightarrow 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{3} < 0 \text{ и щом } -b \in 2, 3, 4, \\ \dots, \text{ то } \frac{b}{3} < -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

1) $-b > 0$ и цяло, но $-b \neq 1$ (защото тогава не съществува четириъгълник), тогава $-b \in 2, 3, 4, \dots \Rightarrow$ възможен е само следния случай на взаимно положение на графиките на $f(x)$ и $g(x)$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle OCD} - S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{b}{3} \right| \cdot |-b| - \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| \cdot |1| =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-b}{3} \right) (-b) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{b^2}{6} - \frac{1}{4}$$

По условие $\frac{b^2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \Rightarrow 2b^2 - 3 = 5$

$$2b^2 = 8$$

$$b^2 = 4$$

$$(b - 2)(b + 2) = 0$$

$$b - 2 = 0 \text{ или } b + 2 = 0$$

$$b = 2 \text{ или } b = -2$$

$b = 2 > 0$ не е реш. на зад.

$$\Rightarrow b = -2$$

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

1 зад. Да се реши уравнението:

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{5-x}{4} \right) - \frac{5-2x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$$

(3т.)

2 зад. Даден е успоредник ABCD с остър ъгъл BAD. Точката N лежи върху правата AB и BC=CN, а точката M лежи върху правата BC и AB=AM.

Да се докаже, че триъгълник MND е равнобедрен.

б) Да се докаже, че $\angle DMN = \angle BAD$.

в) Ако $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 135^\circ$ и AB=7см, то да се намери разстоянието от точката D до правата MN.

(10т.)

3 зад. Може ли всички ръбове на куб да се номерират с числата от 1 до 12 така, сборът от номерата на всеки три ръба с общ връх да е един и същ? /отговорът да бъде обоснован/

(7т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

1 зад.

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{1}{3} \left(x - \frac{5-x}{4} \right) - \frac{5-2x}{6} = -\frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{5-x}{12} - \frac{5-2x}{6} = -\frac{x}{2} + 1$$

$$18x - 6 - 4x + 5 - x - 10 + 4x = -6x + 12$$

$$23x = 23$$

$$x = 1$$

2 зад.

а) Нека $\angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC = 180^\circ - \alpha$,

$\angle BCD = \alpha$, $AD = BC$ и $AB = CD$ (свойства на успоредник)

$\angle NBC = \angle BAD = \alpha$ (съответни ъгли)

Разглеждаме $\triangle BNC$

$BC = NC$ по усл. $\Rightarrow \angle BNC = \angle NBC = \alpha \Rightarrow \angle BCN = 180^\circ - \angle NBC - \angle BNC = 180^\circ - 2\alpha$

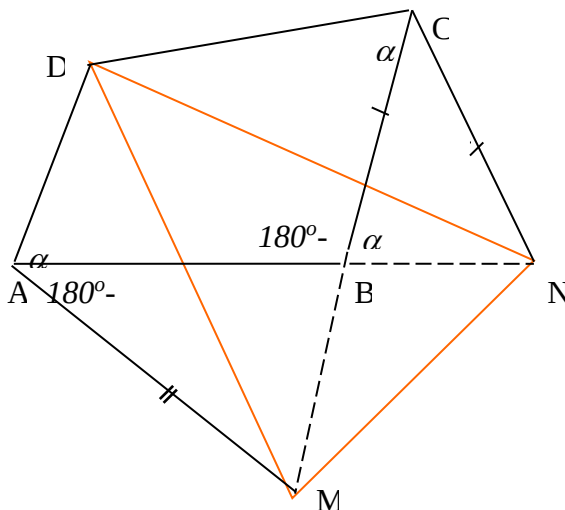
Разглеждаме $\triangle AMB$

$\angle ABM = \angle CBN = \alpha$ (върхни ъгли)

АМ
усл.

α

2α



$= AB$ по
 $\Rightarrow$
 $\angle AMB =$
 $\angle MBA =$
 $\Rightarrow$
 $\angle MAB$
 $= 180^\circ -$

Разглеждаме $\triangle AMD$ и $\triangle CDN$

$\angle MAD = \angle MAB + \angle BAD = 180^\circ - 2\alpha + \alpha = 180^\circ - \alpha$

$\angle DCN = \angle DCB + \angle BCN = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle MAD = \angle DCN$

$\triangle AMD \cong \triangle DCN$, защото: 1) $AD = BC = CN$

2) $AM = AB = DC$

3) $\angle MAD = \angle DCN$

$\Rightarrow DM = DN$ като съответни елементи $\Rightarrow \triangle DMN$ е
равнобедрен

б) От $\triangle AMD$ получаваме: $\angle AMD + \angle ADM = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$, но $\angle AMD = \angle NDC$ като съответни ъгли в еднакви триъгълници (усл. а) $\Rightarrow \angle NDC + \angle ADM = \alpha \Rightarrow$

$\angle MDN = \angle ADC - \angle ADM - \angle NDC = (180^\circ - \alpha) - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$. От равнобедрения $\triangle MND$ получаваме: $\angle DMN = \angle MND$

$= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle MDN) = \frac{1}{2} (180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)) = \alpha \Rightarrow$

$\angle DMN = \angle BAD$

в) Нека $DP \perp MN$ и $P \in MN \Rightarrow DP$ е височина в равнобедрения $\triangle MND \Rightarrow DP$ е и медиана $\Rightarrow MP = PN$.

По условие $\angle ABC = 135^\circ$, но $\angle ABC = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Разглеждаме $\triangle MPD$.

$$\angle MPD = 90^\circ, \angle PMD = \alpha = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\angle MDP = 45^\circ \Rightarrow MP = DP \Rightarrow DP = \frac{1}{2} MN$$

$\triangle ABC \cong \triangle MAD$, защото 1) $AB = AM$

2) $BC = AD$

3) $\angle ABC = 180^\circ - \alpha = \angle MAD$

$\Rightarrow \angle AMD = \angle BAC = 15^\circ$ като съответни елементи

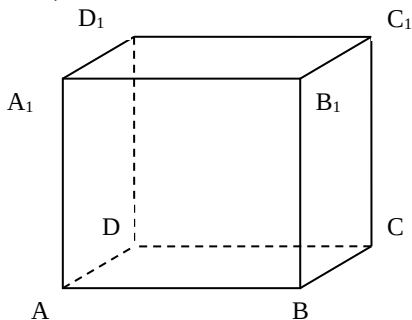
Разглеждаме $\triangle MNA$

$$\angle MAN = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ, \angle AMN = \angle AMD + \angle DMN = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

$\Rightarrow \angle ANM = 30^\circ \Rightarrow \triangle MNA$ е правоъгълен и AM е катет, лежащ срещу ъгъл от 30° , а MN е хипотенуза $\Rightarrow MN = 2AM$,
 $AM = AB = 7 \text{ см} \Rightarrow MN = 14 \text{ см}, DP = 14:2 = 7 \text{ см}$

3 зад.

Да предположим, че сме направили такова номериране на ръбовете и всеки три ръба с общ връх имат сбор от номерата a , т.е.



$$BA + BB_1 + BC = a$$

$$AB + AA_1 + AD = a$$

$$CB + CC_1 + CD = a$$

$$DC + DD_1 + DA = a$$

$$B_1B + B_1C_1 + B_1A_1 = a$$

(събираме почленно)

$$A_1A + A_1B_1 + A_1D_1 = a$$

$$C_1C + C_1D_1 + C_1B_1 = a$$

$$D_1D + D_1A_1 + D_1C_1 = a$$

$$\Rightarrow 2AB + 2BC + 2CD + 2AD + 2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 + 2DD_1 + 2A_1B_1 + 2B_1C_1 + 2C_1D_1 + 2D_1A_1 = 8a$$

$$\Rightarrow 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) = 8a$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 13 = 8a$$

$$\Rightarrow a = \frac{39}{2} - \text{невъзможно, защото числото } a \text{ трябва да е цяло}$$

като сбор на три цели числа (номера), следователно такава номерация е невъзможна.

4 зад.

$$(x + a)(a + 1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + a = 0 \text{ или } a + 1 - x = 0$$

$$x_1 = -a \quad \text{или} \quad a + 1 = x_2$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow -a = a + 1 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

1 зад. Реалните числа a , b , c и d удовлетворяват равенствата $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $a \cdot c + b \cdot d = 0$. Да се пресметне стойността на израза $a \cdot d - b \cdot c$.

(7m.)

2 зад. Медианата AM и ъглополовящата BL в триъгълник ABC са перпендикулярни, M лежи на BC , а L – на AC . Ако O е пресечната точка на AM и BL , да се намери в какво отношение O дели отсечката BL .

(7m.)

3 зад. Да се докаже, че числото $n^2 + 8n + 1$ не се дели 100, където n е произволно естествено число.

(6m.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

1 зад.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$1$$

$$1$$

$$(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 = 0$$

} “-“

$$\Rightarrow a^2d^2 - 2acbd + b^2d^2 = 1 \Rightarrow (ad - bc)^2 = 1 \Rightarrow ad - bc = \pm 1$$

2 зад.

Нека $LO = y$, $BO = x$

$MK \parallel BL$ по построение.

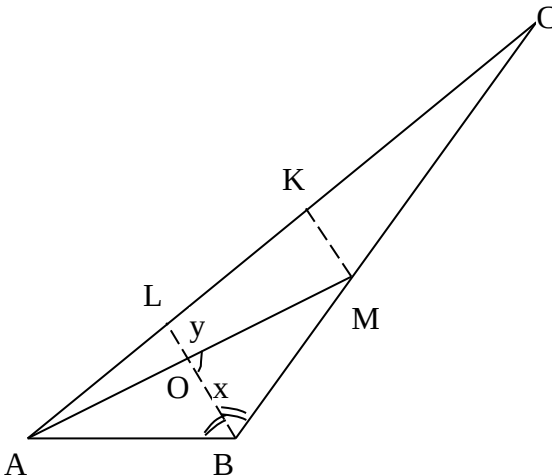
$\triangle ABM$ – равнобедрен, щом ъглополовящата е и височина
 OL е средна отсечка в $\triangle AMK \Rightarrow KM = 2y$

KM е средна отсечка в $\triangle BCL \Rightarrow LB = 2KM = 2 \cdot 2y = 4y$

$$\Rightarrow BL = x + y = 4y$$

$$\Rightarrow x = 3y \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow \frac{LO}{OB} = \frac{3}{1}$$



3 зад.

I.н-н $n^2 + 8n + 1 = (n-1)^2 + 10n \Rightarrow$ ако $100/n^2 + 8n + 1 \Rightarrow$
 $10/n$ и $10/n-1$ – противоречие

II.н-н $n(n+8)+1$ завършва на 0, ако n завършва на 1 и $n+8$
 завършва на 9 или $n=10k+1 \Rightarrow (10k+1)(10k+9)+1 =$
 $100k^2 + 10k + 10 \Rightarrow 100$ не се дели на $100k^2 + 10k + 10$

Ако $n=2k$, то $n^2 + 8n + 1$ е нечетно число $\Rightarrow 100$ не се дели на
 $100k^2 + 10k + 10$

Ако $n=2k+1$, то $(2k+1)^2 + 8(2k+1) + 1 = 4k^2 + 20k + 10$, което не се дели
 на 4, а следователно и на 100.

$\Rightarrow 100$ не се дели на $n^2 + 8n + 1$ за $\forall n$

ТЕМА ЗА 9 КЛАС

1 зад.: Решете системата:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 6 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5 \end{cases}$$

(6т.)

2 зад.: ABCD е правоъгълник, за който $AB=2a$, $BC=a\sqrt{2}$. Върху страната CD, като диаметър, е построена външно за правоъгълника полуокръжност. М е произволна точка от полуокръжността. Правите МА и МВ пресичат страната CD съответно в точките N и Р, а правите MC и MD пресичат правата АВ съответно в точките C_1 и D_1 . Дикажете, че:

а) $\triangle BC_1C \cong \triangle AD_1D$;

б) $CN^2 + DP^2 = 4a^2$.

(7т.)

3 зад.: Нека p и q са реални положителни числа, такива че уравнението

$$x^2 + \left(p - \frac{8q}{p}\right)x + q = 0$$

няма реални корени.

а) Да се докаже, че уравнението $x^2 + px + q = 0$ има два различни реални корена.

б) Да се докаже, че ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 + px + q = 0$, то $7 - 4\sqrt{3} < \frac{x_1}{x_2} < 7 + 4\sqrt{3}$.

(7т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 КЛАС

1 зад.:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-y)(x+y)} = 6 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5 \end{cases}$$

Полагаме $\sqrt{x-y} = u$ и $\sqrt{x+y} = v$

$$u \cdot v = 6$$

$$u + v = 5$$

$$\Leftrightarrow u = 5 - v \Leftrightarrow (5 - v) \cdot v - 6 = 0 \Leftrightarrow -v^2 + 5v - 6 = 0 \Leftrightarrow v^2 - 5v + 6 = 0 \Rightarrow v_1 = 2, v_2 = 3$$

$$\Rightarrow u_1 = 5 - 2 = 3, u_2 = 5 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y} = 3 \\ \sqrt{x+y} = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 9 \\ x+y = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-y = 4 \\ x+y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 13 \Rightarrow x = 6,5 \\ -2y = 5 \Rightarrow y = -2,5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x = 13 \Rightarrow x = 6,5 \\ -2y = -5 \Rightarrow y = 2,5 \end{cases}$$

Проверка:

$$\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = 6$$

$$\sqrt{\frac{13}{2} + \left(\frac{-5}{2}\right)} + \sqrt{\frac{13}{2} - \left(\frac{-5}{2}\right)} = 5$$

$$\sqrt{\frac{169-25}{4}} = 6 - \partial a$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 - \partial a$$

$$\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$$

$$\sqrt{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6 - \partial a$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 - \partial a$$

$\Rightarrow$ решения са $(6,5; -2,5)$ и $(6,5; 2,5)$

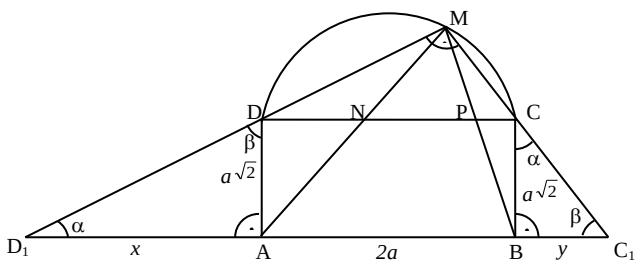
$$\underline{\text{2 зад.:}} \quad \text{а)} \left. \begin{aligned} \angle AD_1D + \angle ADD_1 &= 90^\circ \\ \angle AD_1D + \angle BC_1C &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle ADD = \angle BC_1C$$

$$\angle D_1AD = \angle C_1BC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC_1 \sim \triangle ADD_1 \quad (\text{I-ви признак}) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{y} \Rightarrow$$

$$x \cdot y = 2 \cdot a^2$$

$$\text{б)} AC_1^2 + D_1B^2 = (2 \cdot a + y)^2 +$$



$$(x+2.a)^2 = 4.a^2 + 4.a.y + y^2 + x^2 + 4.a.x + 4.a^2 = (x+y+2.a)^2 - \underbrace{2xy + 4a^2}_{2.a^2} = (x+y+2.a)^2 = C_1 D_1^2. \text{ Но } \Delta MDC \text{ е хомотетичен на}$$

$\Delta M D_1 C_1$ с център на хомотетия т. М и коефициент $k = \frac{CD}{C_1 D_1} \Rightarrow$

$$DP = k.D_1 B, \quad CN = k.C_1 A. \quad CN^2 + DP^2 = (k.C_1 A)^2 + (k.D_1 B)^2 = k^2.(C_1 A^2 + D_1 B^2) = k^2.C_1 D_1^2 = (k.C_1 D_1)^2 = CD^2 = (2.a)^2 = 4.a^2, \text{ защото } CD = AB = 2.a \text{ по условие.}$$

3 зад.: Понеже даденото уравнение по условие няма реални корени, то дискриминантата му е отрицателна, т.е.

$$\left(p - \frac{8q}{p}\right)^2 - 4.q < 0 \Rightarrow q > 0. \quad \text{Представяме полученото}$$

неравенство за дискриминантата във вида $p^4 - 20.p^2.q + 64.q^2 < 0$ или още: $(p^2 - 4.q)(p^2 - 16.q) < 0$. Понеже $q > 0$, то $p^2 - 4.q > 0 \Rightarrow p^2 - 4.q > 0$ и $p^2 - 16.q < 0$. Първото от двете неравенства показва, че $x^2 + p.x + q = 0$ има два различни реални корена. Ако означим тези корени с x_1 и x_2 , от второто неравенство и от формулите на Виет получаваме следното неравенство: $(x_1 + x_2)^2 - 16.x_1.x_2 < 0$, т.е. $x_1^2 - 14.x_1.x_2 + x_2^2 < 0$. Понеже $q = x_1.x_2 > 0$, то x_2 е различно от нула и можем да разделим двете страни на последното неравенство с x_2^2 . Така получаваме:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 14 \cdot \frac{x_1}{x_2} + 1 < 0 \Rightarrow \text{стойностите на } \frac{x_1}{x_2} \text{ ще лежат между}$$

корените на уравнението $y^2 - 14y + 1 = 0$, които са $\sqrt{3}$ и $7 + 4\sqrt{3}$, т.е. $7 - 4\sqrt{3} < \frac{x_1}{x_2} < 7 + 4\sqrt{3}$.

ТЕМА ЗА 10 КЛАС

1 зад.: Да се намерят стойностите на реалния параметър a , при който $\log_a\left(m + \frac{5}{4}\right) < 0$, където m е най-малкото решение на неравенството $(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1-x} + 1) < \frac{x}{4}$

(6т.)

2 зад.: ABCD е равнобедрен трапец с основи AD и BC, като $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $BC=c$, а M е произволна точка от дъгата BC на окръжността, описана около ABCD. Намерете отношението $\frac{BM+MC}{AM+MD}$.

(7т.)

3 зад.: В редицата 1,4,10,19,.....разликите от два съседни члена образуват аритметична прогресия. Да се намерят формули за n-тия член и за сумата от първите n числа на дадената редица.

(7т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

1 зад.:

I-ви начин) $(\sqrt{1+x}-1) \cdot (\sqrt{1-x}+1) < \frac{x}{4}$ умножаваме двете

страни на неравенството с $\varphi(x) = \sqrt{1+x}+1 > 0$ и получаваме:

$$4 \cdot ((\sqrt{1+x})^2 - 1) \cdot (\sqrt{1-x}+1) < x \cdot (\sqrt{1+x}+1)$$

$$4 \cdot (1+x-1) \cdot (\sqrt{1-x}+1) - x \cdot (\sqrt{1+x}+1) < 0$$

$$4x \cdot (\sqrt{1-x}+1) - x \cdot (\sqrt{1+x}+1) < 0$$

$$x \cdot (4\sqrt{1-x} + 4 - \sqrt{1+x} - 1) < 0$$

$$x \cdot (4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3) < 0$$

Следователно:

$\begin{array}{l} x > 0 \\ 4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3 < 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{array}$	или	$\begin{array}{l} x < 0 \\ 4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3 > 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{array}$
$\Leftrightarrow$		
$\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x} + 3 \end{array}$	или	$\begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x} + 3 \end{array}$

Неравенството няма решение, защото лявата му страна е най-много $\sqrt{2}$, а дясната му страна е най-малко 3. Аналогично се

установява, че решение са всяко x : $-1 \leq x < 0 \Rightarrow m = -1$

$$\log_a \left(-1 + \frac{5}{4} \right) = \log_a \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow a > 1$$

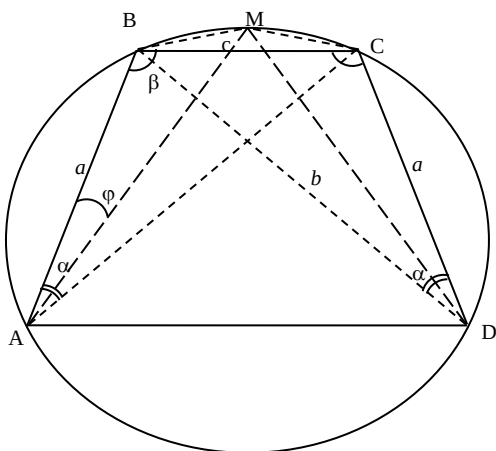
II -ри начин) ДМ: $1 + x \geq 0$ и $1 - x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ и с непосредствена проверка се установява, че $x = -1$ е решение на неравенството $\Rightarrow m = -1 \Rightarrow \log_a \frac{1}{4} < 0$ и $a > 1$

2 зад.:

Нека $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle CBA = \angle BCD = \beta$, $\angle BAM = \varphi$

$$\left. \begin{aligned} \angle MBC = \frac{MC}{2} = \angle MAC = \alpha - \varphi \\ \angle MCB = \frac{BM}{2} = \angle MAB = \varphi \end{aligned} \right\}$$

От синусова теорема



следват равенствата:
 $BM = \sin \varphi \cdot 2R$, $MC = \sin(\alpha - \varphi) \cdot 2R$,
 $AM = \sin(\beta + \alpha - \varphi) \cdot 2R$, $MD = \sin(\beta + \varphi) \cdot 2R$,
 $c = \sin \alpha \cdot 2R$, $b = \sin \beta \cdot 2R$,
 $a = \sin(180^\circ - (\beta + \alpha)) \cdot 2R = \sin(\beta + \alpha) \cdot 2R$.

Тогава:

$$\frac{BM + MC}{AM + MD} = \frac{\sin \varphi + \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \alpha - \varphi) + \sin(\beta + \varphi)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right)}{2 \sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha) + \sin \beta} = \frac{c}{a + b} \end{aligned}$$

3 зад.: Означаваме с a_n членовете на дадената редица и с b_n членовете на аритметичната прогресия, като $b_1 = 3$ и $d = 3$
 $a_2 - a_1 = b_1$

$$a_3 - a_2 = b_2$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

Сумираме всички равенства, откъдето се получава: $a_n -$

$$a_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = \left[\frac{2b_1 + (n-2)d}{2} \right] (n-1)$$

$$a_n - 1 = \left[\frac{2 \cdot 3 + (n-2) \cdot 3}{2} \right] (n-1) = \frac{3}{2} (n^2 - n) \Rightarrow a_n = \frac{3}{2} (n^2 - n) + 1$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{3}{2} ((1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n)) + n = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) + n = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \\ &= \frac{n}{4} (n+1)(2n+1) - \frac{3}{4} n(n+1) + n = \frac{n}{4} (n+1)(2n+1-3) + n = \frac{n}{2} (n^2 + 1) \end{aligned}$$

ТЕМА ЗА 11 КЛАС

1 зад.: Дадена е редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, определена от условията: $a_1 = -2$, $a_n = \frac{2+a_{n-1}}{1+2a_{n-1}}$ за всяко естествено $n > 1$ и

редицата $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, определена с условието $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ за всяко естествено $n \geq 1$.

а) Да се докаже, че всички членове на първата редица са различни от -1.

б) Да се намери формула за общия член на втората редица и границата ѝ, когато n расте неограничено.

(7т.)

2 зад.: В прав кръгов конус е вписана правилна триъгълна призма с долна основа върху основата на конуса и върхове на горната основа върху околната му повърхнина. Основното сечение на конуса е равнобедрен триъгълник, а всички ръбове на призмата са равни. Да се намери отношението на пълната повърхнини на двете тела.

(6т.)

3 зад.: Решете уравнението:

$$\sqrt{\cos \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 0$$

(7m.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 КЛАС

1 зад.: а) Допускаме, че съществува стойност на k , за която $a_k = -1$. Тогава

$$-1 = \frac{2 - a_{k-1}}{1 + 2a_{k-1}} \Rightarrow -1 - 2a_{k-1} = 2 + a_{k-1}, -3a_{k-1} = 3 \Rightarrow a_{k-1} = -1.$$

Аналогично получаваме $a_{k-2} = a_{k-3} = a_{k-4} = \dots = a_1 = -1$. Но по условие $a_1 = -2 \Rightarrow$ не съществува k , при което $a_k = -1$

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \left(\frac{2 + a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}} - 1 \right) \div \left(\frac{2 + a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}} + 1 \right) =$$

$$\text{б) } = \frac{2 + a_{n-1} - 1 - 2a_{n-1}}{2 + a_{n-1} + 1 + 2a_{n-1}} = \frac{-(a_{n-1} - 1)}{3(a_{n-1} + 1)} = -\frac{1}{3} b_{n-1}$$

Равенството $b_n = -\frac{1}{3} b_{n-1}$ показва, че втората редица е

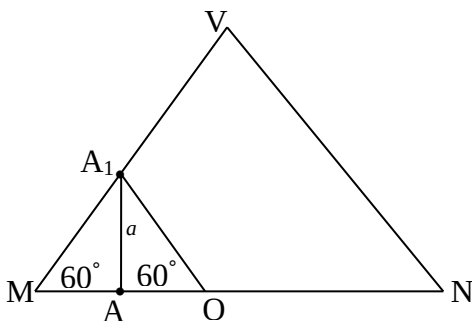
геометрична прогресия с частно $-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow b_n = b_1 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ Но } b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \frac{-2 - 1}{-2 + 1} = 3$$

$$\Rightarrow b_n = 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}} = 0$$

2. зад.: Да разгледаме основото сечение MNV на конуса, което съдържа околния ръб AA_1 на призмата. Нека $AA_1 = a$. Центърът O на основата на конуса съвпада с центъра на основата на призмата, която по условие е равнобедрен триъгълник със страна a . Следователно отсечката AO има дължина, равна на $\frac{2}{3}$ от височината на този равнобедрен триъгълник, т.е.

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Тогава} \quad \operatorname{tg} \angle AOA_1 = \frac{AA_1}{AO} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ \text{ така че}$$



$\angle AOA_1 = 60^\circ$. От друга страна $\angle AMA_1 = 60^\circ$, понеже $\triangle MNV$ е равнобедрен. Оказва се, че $\triangle MOA_1$ е също равнобедрен с височина $AA_1 = a$ и страна MO , равна на

$$\text{радиуса } R \text{ на основата на конуса} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\text{Образователната } l_{\text{конуса}} = 2R$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{п.пов.кон}} &= S_1 = \pi R(R+l) = 3\pi R^2 = 4\pi a^2 \\ S_{\text{п.пов.пр.}} &= S_2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{8\pi}{6 + \sqrt{3}}$$

3. зад.:

$$\sqrt{\cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 0$$

$$DM: \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq 0 \\ \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq 0 \end{aligned} \right. \quad (1) \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{aligned} x &\neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ x &\neq (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$$

$$3\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - (\operatorname{tg} x)^2}, \quad \operatorname{tg} x = z \quad (DM: z \neq \pm 1)$$

$$(1-z^2)3z = 2z \Rightarrow 3z(1-z^2) - 2z = 0 \Rightarrow z(3-3z^2-2) = 0$$

$$\Rightarrow z(1-3z^2) = 0$$

$$z = 0 \in \mathcal{DM} \text{ или } z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \in \mathcal{DM}$$

$$\text{а) } x = k\pi \in \textcircled{2} \quad \text{б) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{2} \quad \text{в) } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{2}$$

$$\text{а) } x = k\pi \in \textcircled{1}$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} - \underbrace{3\operatorname{tg} k\pi}_{=0} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} - \underbrace{\operatorname{tg} 2k\pi}_{=0} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| > 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \in$$

и е решение на уравнението

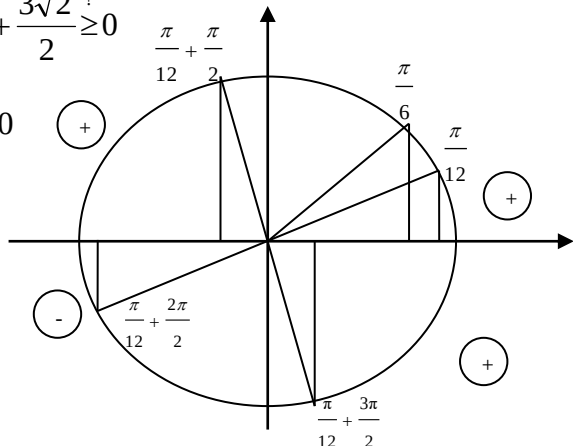
$$\text{б) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{1}$$

$$\left| \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - 3\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} 2 \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{?}{\geq} 0$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{6} \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 4l, 4l+1, 4l+3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 4l\pi \quad (k = 4l)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (4l+1)\pi \quad (k = 4l+1)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (4l+3)\pi \quad (k = 4l+3)$$

В) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) - \operatorname{tg} 2\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) \right| \leq 1, \left| \frac{5\sqrt{3}}{2} \right| > 1 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{1} \quad \text{и е решение на уравнението}$$

Отговор:

$$x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 4l\pi; x = \frac{\pi}{6} + (4l+1)\pi; x = \frac{\pi}{6} + (4l+3)\pi$$

ТЕМА ЗА 12 КЛАС

1. зад.: Нека $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

а) Да се намери най-малката стойност на $f(x)$.

б) Да се докаже, че за всяко реално число a уравнението $f(x) = a$ има най-много три отрицателни корена.

(7m.)

2. зад.: Да се намери отношението на дължините на страните на триъгълник, в който вписаната окръжност разделя една от ъглополовящите на три части в последователно отношение 1:4:5.

(6т.)

3. зад.: В триъгълна пирамида ABCD ръбът АД има дължина 1 и е перпендикулярен на равнината (ABC). Равнината (BCD) сключва с равнините (ABC), (ABD) и (ACD) ъгли с голедини съответно 45° , 90° и 60° . Да се пресметнат дължините на ръбовете на пирамидата и радиуса на описаната около пирамидата сфера.

(7т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 12 КЛАС

1 зад.:

а)

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \left(\underbrace{\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x}}_{\geq 0}\right)^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow f_{\min} = 2$$

за $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = 0$, т.е. за $x = -\frac{1}{2}$

б) Допускаме, че уравнението $f(x) = a$ има четири

отрицателни корена. $f(x) = a \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = a \quad (1).$

Полагаме $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = z \Rightarrow x^2 = (x+1)^2 z$

$$\Rightarrow -x^2 + x^2 z + 2xz + z = 0 \Rightarrow (z-1)x^2 + 2zx + z = 0 \quad (2)$$

(1)

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = a \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = a (z \neq 0), z^2 - az + 1 = 0 (z \neq 0)$$

с корени z_1, z_2 . уравнение (1) има 4 отрицателни корени $\Leftrightarrow$ уравнение (2) за z_1 и z_2 има отрицателни корени. Това е изпълнено, ако

$$\begin{cases}
 D = z^2 - z(z-1) \geq 0 \\
 -\frac{2z}{z-1} < 0 \text{ (формула на Виет за } x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ z-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow z > 1 \\
 \frac{z}{z-1} > 0 \text{ (формула на Виет за } x_1 \cdot x_2)
 \end{cases}$$

От уравнение (3) щом $z > 1$, т.е. $z_1 > 1$ и $z_2 > 1$, то

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4 \geq 0 \\ (z_1 - 1) + (z_2 - 1) > 0 \text{ (ф.Виет)} \\ (z_1 - 1)(z_2 - 1) > 0 \text{ (ф.Виет)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+2) \geq 0 \\ z_1 + z_2 > 2 \\ z_1 z_2 - (z_1 + z_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+2) \geq 0 \\ a > 2 \\ 1 - a + 1 > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ системата няма решение, допуснатото е невъзможно

2 зад.: $K(O)$ вписана в $\triangle ABC$, CM – ъглополовяща.

$$k \cap CM = \{K, L\} \text{ (} k \text{ е между } C \text{ и } L\text{)}. \quad \frac{CO}{OM} = \frac{AC}{AM} = \frac{CB}{MB} \Rightarrow$$

$$\frac{CO}{OM} = \frac{AC + CB}{AM + MB} = \frac{a+b}{c} \Rightarrow$$

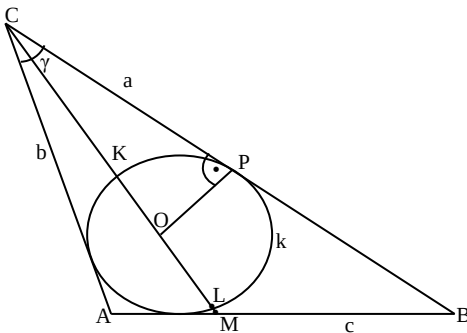
$$CO > OM \Rightarrow CK > LM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CK : KL : LM = 5 : 4 : 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{CO}{OM} = \frac{CK + OK}{OL + LM} = \frac{5+2}{2+1} = \frac{7}{3}$$

От $\triangle OPC$ (P – допирателна точка на k с BC):

$$\begin{aligned}
 \frac{OP}{OC} &= \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{7} \Rightarrow \cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\
 &= 1 - \frac{8}{49} = \frac{41}{49} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{41}{49}
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \frac{a+b}{c} = \frac{7}{3} \\ c^2 = a^2 + b^2 - \frac{82}{49}ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 7c \\ \left(\frac{3a+3b}{7}\right)^2 = a^2 + b^2 - \frac{82ab}{49} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{3a+3b}{7} \\ 9a^2 + 18ab + 9b^2 = 49a^2 + 49b^2 - 82ab \end{cases}$$

$$40a^2 + 40b^2 - 100ab = 0 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 - 10ab = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0$$

Делим на $b^2 \neq 0$

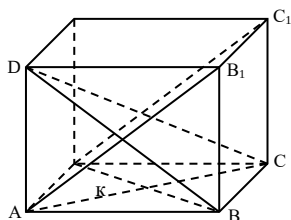
$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0, D=9,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{От } a = 2b \Rightarrow c = \frac{9b}{7} \Rightarrow a : b : c = 14 : 7 : 9$$

$$\text{От } b = 2a \Rightarrow c = \frac{9a}{7} \Rightarrow a : b : c = 7 : 14 : 9$$

3 зад.: Построяваме куб, чийто ръб има дължина 1.



означаваме с А, В и С три от върховете на основата му и с AD – единия му околнен ръб. Тетраедът ABCD отговаря на условието на задачата. Очевидно $AD \perp (ABC)$ и $AD=1$. Ъгълът между равнините (ABC) и (BCD) е равен на $\angle ABD = 45^\circ$ - равнината $(ABD) \perp BC$, която е пресечница на (ABC) и (BCD). Ъгълът между равнините (BCD) и (ABD) е равен на 90° . Накрая остава да намерим ъгъла между равнините (BCD) и (ACD). Този ъгъл е равен на ъгъла между две прави, които са съответно перпендикулярни на тези равнини. Едната е AB_1 (BB_1 е околнен ръб на куба), която е $\perp$ на (BCD), а другата е BK (K е четвъртият връх на основата на куба), която е $\perp$ на (ACD). Тъй като $AB_1 \parallel KC_1$ (CC_1 е околнен

ръб на куба), то ъгълът между $\angle(AB_1, BK) = \angle BKC_1$. Но $\triangle BKC_1$ е равнобедрен, откъдето следва, че $\angle BKC_1 = 60^\circ = \angle((BCD), (ACD))$. Следователно $AB=BC=AD=1$, $BD=AC=\sqrt{2}$ и $CD=\sqrt{3}$, а радиусът r на описаната около пирамидата сфера е $r = 0,5 \cdot CD = 0,5 \cdot \sqrt{3}$ (D, A, B, C са точки от сферата, $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$ са правоъгълни с обща хипотенуза CD , откъдето средата на CD се намира на разстояние $0,5 \cdot CD$ от A, B, C, D).