

1995 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

**1.зад.** Две ниви, квадратна с площ 100 кв.метра и правоъгълна с площ 80 кв. метра, имат обща страна. Колко колове са необходими за ограждането на двете ниви с обща ограда, ако коловете се поставят през 2 метра?

(6 т.)

**2.зад.** Колко на брой са трицифрените числа, в записа на които има една или повече единици?

(7 т.)

**3. зад.** В дадения по-долу запис еднаквите букви отговарят на еднакви цифри, а различните букви на различни цифри. Заменете буквите с цифри по такъв начин, че аритметичните действия да са верни.

а) ХИП + ХИП + ХИП = СИП

б) 3. АБВ = ОБВ

(7 т.)

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 4 КЛАС

**1.зад.:** От Скв.=100 кв.м =  $a \cdot a \Rightarrow a=10$  м.

От Справ.= 80 кв.м =  $a \cdot b \Rightarrow b = 8$  м.



$AD=BC=10$  м,  $AB=CD=18$ м.

$10:2=5 \Rightarrow$  за AD и BC са необходими по  $5+1=6$  колове.

$18:2=9 \Rightarrow$  за AB и CD са необходими по  $9-1=8$  колове.

Всичко са необходими общо  $2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 28$  колове.

**2.зад.:** Всички трицифрени числа са  $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$  /това са числата от 100 до 999/. Трицифрените числа, в които няма единица са  $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$  /за първата цифра имаме 8 възможности, за втора и трета цифра имаме по 9 възможности/. Следователно трицифрените числа с поне една единица в записа си са  $900 - 648 = 252$ .

**3. зад.:**  $\Pi + \Pi + \Pi$  е число, завършващо на  $\Pi$  и следователно  $\Pi=5$  или  $\Pi=0$ . Аналогично  $\text{И}=5$  или  $\text{И}=0$ . С различните букви

са означени различни цифри, откъдето следва, че  $P=0$ ,  $I=5$  или  $P=5$ ,  $I=0$ . Ако  $P=5$ ,  $I=0$ , то в сбора се получава  $I=1$  /противоречие/ и следователно тази възможност отпада. Остава възможността  $P=0$ ,  $I=5$ . В този случай  $I+I+I$  е число, завършващо на 5 и има една стотица за „пренос“, откъдето следва, че за  $X$  и  $C$  има две възможности:  $X=1$ ,  $C=4$  или  $X=2$ ,  $C=7$  /при всяка друга стойност на  $X$  сборът е четирицифрено число/.

## ТЕМА ЗА 5 КЛАС

**1 зад.** Да се намери най-малкото цяло число, което се дели на 7, а при делене на 2, 3, 4, 5 и 6 дава остатък 1. Да се посочат и други числа със същото свойство.

(7т.)

**2 зад.** Тракторист изорал  $\frac{3}{8}$  от един блок с квадратна форма и установил, че му остава да изоре още 250 дка повече, отколкото бил изорал. Намерете площта и размерите на блока.

(6т.)

**3 зад.** В цветарски магазин има 14 саксии с по един, с по два и с по три зюмбюла. Броят на всички зюмбюли е 26. Саксиите с по един зюмбюл са толкова на брой, колкото са всички останали саксии. Колко са саксиите с по 1, с по 2 и с по 3 зюмбюла?

(7т.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

**1 зад.:** Тъй като  $\text{НОК}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$ , всички числа, които се делят едновременно на 2, 3, 4, 5 и 6 имат вида  $60.n$ , където  $n$  е цяло положително число. Тогава числата, които при деление на 2, 3, 4, 5 и 6 дават остатък 1, са от вида  $60.n+1$ . Даваме на  $n$  стойности 1, 2, 3, 4, 5 и т.н. и проверяваме кое от получените числа се дели на 7. Най-малкото такова число е  $60.5+1=301$ . Други числа със същото свойство можем да

получим, като прибавим към 301 кратни на числото  $7.60=420$ , например  $721=301+420$ .

**2 зад.:** Целият блок е  $\frac{8}{8}=1 \Rightarrow 1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$  (от блока са останали

$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}$  повече за изораване). Да означим площта на блока

$$с \quad x \quad дка \quad \Rightarrow \frac{2}{8} om \quad x=250 \quad \Rightarrow \frac{2}{8} \cdot x = 250$$

$$\Rightarrow x = 250 \div \frac{2}{8} = \frac{250 \cdot 8}{2} = 250 \cdot 4 = 1000 \text{ дка.}$$

$$1000 \text{ дка} = 1000000 \text{ кв.м}$$

От  $S_{KB} = 1000000$  и  $S_{KB} = a \cdot a \Rightarrow$  страната  $a$  на блока е равна на 1000 м

**3 зад.:** По условие от всичките 14 саксии половината са с по 1 зюмбюл, т.е. те са  $14 \div 2 = 7$  саксии. Зюмбюлите в останалите 7 саксии са  $26 - 7 = 19$ . Във всяка от тях има поне по два зюмбюла, т.е. общо поне  $7 \cdot 2 = 14$  зюмбюла. Следователно по 3 зюмбюла има в  $19 - 14 = 5$  саксии. По два зюмбюла има в  $7 - 5 = 2$  саксии.

## ТЕМА ЗА 6 КЛАС

**1 зад.** Да се намерят целите отрицателни числа  $b$ , за които пресечните точки на графиките на функциите  $f(x) = 2x + 1$  и  $g(x) = 3x - b$  с координатните оси са върхове на четириъгълник с лице  $\frac{5}{12}$ .

(7т.)

**2 зад.** Нека  $M$  и  $N$  са вътрешни точки съответно за страните  $AB$  и  $CD$  на успоредника  $ABCD$ . Отсечките  $AN$  и  $DM$  се пресичат в точка  $P$ , отсечките  $BN$  и  $CM$  – в точката  $Q$ . Да се докаже, че:

$$S_{\triangle APD} + S_{\triangle BCQ} = S_{MQNP};$$

$$б) S_{\triangle DPN} + S_{\triangle CNQ} = S_{AMP} + S_{\triangle BQM}$$

(7m.)

**3 зад.** За всяко естествено число  $n$  означаваме  $f(n) = (-1)^n \cdot n$ .  
Да се намери сумата  $f(1) + f(2) + \dots + f(1995)$ .

(6m.)

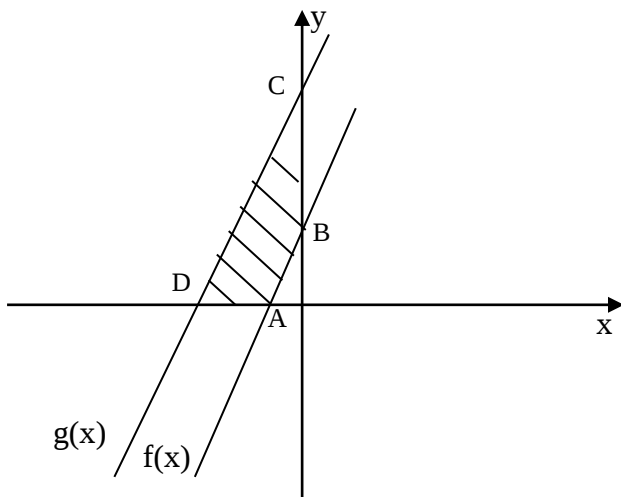
## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

**1 зад.:** Построяваме графиката на линейната функция  $f(x) = 2x + 1$  по таблицата:

|     |   |                |
|-----|---|----------------|
| $x$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| $y$ | 1 | 0              |
| т.  | В | А              |

За  $g(x) = 3x - b$  таблицата е следната:

|     |      |               |
|-----|------|---------------|
| $x$ | 0    | $\frac{b}{3}$ |
| $y$ | $-b$ | 0             |
| т.  | С    | Д             |



От  $b \in \mathbb{Z}$ , т.е.  $b$  - цяло и  $b < 0 \Rightarrow b > 0$  и цяло число, но  $b \neq 1$ , защото тогава  $т.В \equiv т.С$  и не съществува

четириъгълник  $\Rightarrow -b \in 2, 3, 4, \dots$  Тъй

като  $\frac{b}{3} < 0$  и щом -

$b \in 2, 3, 4, \dots$ , то  $\frac{b}{3} < -\frac{1}{2}$ .

Следователно

възможен е само следния случай на взаимно положение на графиките на  $f(x)$  и  $g(x)$

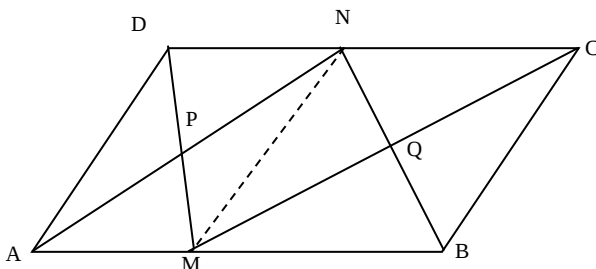
$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{A OCD} - S_{A O B}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-b}{3} \right| \cdot \left| -b \right| - \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| \cdot \left| 1 \right| = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{-b}{3} \right) \cdot (-b) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{b^2}{6} - \frac{1}{4} \text{ По}$$

$$\text{условие } \underbrace{\frac{b^2}{6} - \frac{1}{4}}_{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2 \cdot b^2 - 3}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow 2 \cdot b^2 - 3 = 5 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow$$

$$b^2 - 4 = 0 \Rightarrow (b-2) \cdot (b+2) = 0 \Rightarrow b-2=0 \text{ или } b+2=0 \Rightarrow b=2 \text{ или } b=-2. b=2 > 0 \text{ не е решение на задачата, следователно } b=-2.$$

**2 зад.:**



**а)**  $S_{AAMD} = S_{AAMN}$ ,  
понеже  
триъгълниците  
имат равни основи  
и височини  $\Rightarrow$   
 $S_{AAMD} - S_{AAMP} =$   
 $= S_{AAMN} - S_{AAMP}$   
или  $S_{APD} = S_{AMNP}$ .  
Аналогично

$$S_{ABCQ} = S_{AMQN} \Rightarrow S_{APD} + S_{ABCQ} = S_{AMNP} + S_{AMQN} = S_{MQNP}$$

$$\text{б) } S_{ADPN} + S_{ACNQ} = S_{AMCD} - S_{MQNP}$$

$$S_{AAMP} + S_{ABQM} = S_{AABN} - S_{MQNP}$$

Но  $S_{AMCD} = S_{AABN}$ , тъй като тези триъгълници имат равни основи и височини и следователно  $S_{ADPN} + S_{ACNQ} = S_{AAMP} + S_{ABQM}$ .

**3 зад.:**

Ако  $n$  е четно число  $(-1)^n = 1$  и  $f(n) = n$  за всяко четно  $n$ .

Ако  $n$  е нечетно число  $(-1)^n = -1$  и  $f(n) = -n$  за всяко нечетно  $n$ . Тогава  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(1995) = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots + 1994 - 1995$

$$= (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \dots + (-1993 + 1994) - 1995 = 997 \cdot 1 - 1995 = -998$$

Използвахме, че сборът на всяка двойка числа в скобите е 1 и тези двойки са толкова, колкото са четните числа от 1 до 1995, т.е.  $1994 \div 2 = 997$

## ТЕМА ЗА 7 КЛАС

**1 зад.:** Да се реши уравнението  $(x+a)(a+1-x)=0$ . За кои стойности на  $a$  уравнението има единствен корен?

(3т.)

**2 зад.:** Даден е успоредник ABCD с остър ъгъл BAD. Точката N лежи върху правата AB и  $BC=CN$ , а точката M лежи върху правата BC и  $AB=AM$ .

Да се докаже, че триъгълник MND е равнобедрен.

б) Да се докаже, че  $\angle DMN = \angle BAD$ .

в) Ако  $\angle BAC = 15^\circ$ ,  $\angle ABC = 135^\circ$  и  $AB=7\text{см}$ , то да се намери разстоянието от точката D до правата MN.

(10т.)

**3 зад.:** Може ли всички ръбове на куб да се номерират с числата от 1 до 12 така, сборът от номерата на всеки три ръба с общ връх да е един и същ? /отговорът да бъде обоснован/

(7т.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

**1 зад.:**  $(x+a)(a+1-x) = 0 \Leftrightarrow x+a=0$  или  $a+1-x=0 \Rightarrow x_1=-a$  или  $x_2=a+1$

$$x_1=x_2 \Leftrightarrow -a=a+1 \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

**2 зад.:** а) Нека  $\angle BAD=\alpha \Rightarrow \angle ABC=\angle ADC=180^\circ-\alpha$ ,  $\angle BCD=\alpha$ ,

$AD=BC$  и  $AB=CD$   
/свойства на успоредника/.

$\angle NBC=\angle BAD=\alpha$

/съотв. ъгли/.

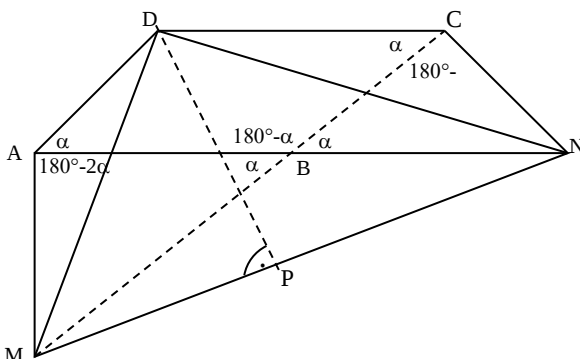
Разглеждаме

$\triangle BNC$ . По

условие  $BC=NC$

$\Rightarrow$

$\angle BNC=\angle NBC=\alpha$



$\Rightarrow \angle BCN = 180^\circ - \angle NBC - \angle BNC = 180^\circ - 2\alpha$ . Разглеждаме  $\triangle AMB$ :  
 $\angle ABM = \angle CBN = \alpha$  /върхни ъгли/,  $AM = AB$  по условие  
 $\Rightarrow \angle AMB = \angle MBA = \alpha \Rightarrow \angle MAB = 180^\circ - 2\alpha$ . Разглеждаме  
 $\triangle AMD$  и  $\triangle CDN$ :  $\angle MAD = \angle MAB + \angle BAD = \alpha$ ;  $\angle DCN =$   
 $\angle DCB + \angle BCN = \alpha + 180^\circ - 2\alpha$ . Следователно:  $\angle MAD = \angle DCN$   
 $= 180^\circ - \alpha$ ,  $\triangle AMD \cong \triangle CDN$  /I<sup>ви</sup> признак/, защото: 1)  $AD = BC =$   
 $CN$ ; 2)  $AM = AB = DC$ ; 3)  $\angle MAD = \angle DCN \Rightarrow DM = DN$  като  
 съответни елементи  $\Rightarrow \triangle DMN$  е равнобедрен.

**б)** От  $\triangle AMD$  получаваме:  $\angle AMD + \angle ADM = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$ ,  
 но  $\angle AMD = \angle NDC$  като съответни ъгли в  $\cong \Delta \Rightarrow \angle NDC + \angle ADM$   
 $= \alpha \Rightarrow \angle MDN = \angle ADC - \angle ADM - \angle NDC = (180^\circ - \alpha) - \alpha =$   
 $180^\circ - 2\alpha$ . От равнобедрения  $\triangle MND$  получаваме:  $\angle DMN =$   
 $\angle MND = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle MDN) = \frac{1}{2} (180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)) = \alpha \Rightarrow$   
 $\angle DMN = \angle BAD$ .

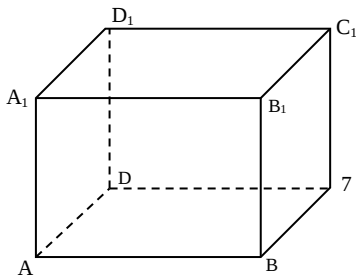
**в)** По условие  $\angle ABC = 135^\circ$ , но  $\angle ABC = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ .  
 Разгл. равнобедрения  $\triangle MND$ . Нека  $DP \perp MN$  ( $P \in MN$ )  $\Rightarrow MP =$   
 $PN$ . В  $\triangle MPD$  имаме  $\angle MPD = 90^\circ$  и  $\angle PMD = \alpha = 45^\circ \Rightarrow$

$$\angle MDP = 45^\circ \Rightarrow MP = DP \Rightarrow DP = \frac{1}{2} MN. \triangle ABC \cong \triangle MAD \text{ /I}^{\text{ви}}$$

признак/, защото: 1)  $AB = AM$ ; 2)  $BC = AD$ ; 3)  $\angle ABC = 180^\circ -$   
 $\alpha = \angle MAD \Rightarrow \angle AMD = \angle BAC = 15^\circ$  като съответни елементи. В  
 $\triangle MNA$  имаме  $\angle MAN = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ$ ,  
 $\angle AMN = \angle AMD + \angle DMN = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle ANM = 30^\circ \Rightarrow$

$$MN = 2 \cdot AM = 2 \cdot AB = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см.} \Rightarrow DP = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ см.}$$

**3 зад.:** Да предположим, че сме направили такова номериране  
 на ръбовете и всеки три ръба с  
 общ връх имат сбор от  
 номерата, т.е.:  $CB + CC_1 + CD = a$   
 $BA + BB_1 + BC = a$   
 $AB + AA_1 + AD = a$   
 $DC + DD_1 + DA = a$   
 $BB_1 + B_1C_1 + B_1A_1 = a$



$$AA_1 + A_1B_1 + A_1D_1 = a$$

$$C_1C + C_1D_1 + C_1B_1 = a$$

$$D_1D + D_1A_1 + D_1C_1 = a$$

Събираме почленно тези равенства и получаваме:

$$2AB + 2BC + 2CD + 2AD + 2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 + 2DD_1 + 2A_1B_1 + 2B_1C_1 + 2C_1D_1 + 2A_1D_1 = 8.a \Rightarrow$$

$$2.(AB + BC + CD + AD + AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + A_1D_1) = 8.a$$

$$\Rightarrow 2.(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) = 8.a$$

$$\Rightarrow 2.((1+12)+(2+11)+(3+10)+(4+9)+(5+8)+(6+7)) = 8.a \Rightarrow$$

$$2.6.13 = 8.a \Rightarrow 39 = 2.a \Rightarrow a = \frac{39}{2}$$

Но числото  $a$  трябва да е цяло като сбор на три цели числа (номера)  $\Rightarrow$  такава номерация е невъзможна.

### ТЕМА ЗА 8 КЛАС

**1 зад.:** Реалните числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  удовлетворяват равенствата  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $c^2 + d^2 = 1$  и  $a \cdot c + b \cdot d = 0$ . Да се пресметне стойността на израза  $a \cdot d - b \cdot c$ .

(7m.)

**2 зад.:** Медианата  $AM$  и ъглополовящата  $BL$  в триъгълник  $ABC$  са перпендикулярни,  $M$  лежи на  $BC$ , а  $L$  – на  $AC$ . Ако  $O$  е пресечната точка на  $AM$  и  $BL$ , да се намери в какво отношение  $O$  дели отсечката  $BL$ .

(7m.)

**3 зад.:** Да се докаже, че числото  $n^2 + 8n + 1$  не се дели 100, където  $n$  е произволно естествено число.

(6m.)

### РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

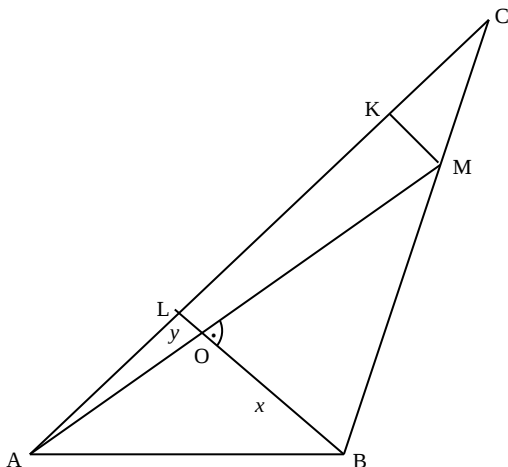
$$\mathbf{1\text{ зад.:}} (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 1$$

$$(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 = 0$$

$$\text{Изваждаме почленно от първото равенство второто: } a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 = 1 \Rightarrow (ad - bc)^2 = 1$$

$$\Rightarrow ad - bc = \pm 1$$

**2 зад.:** Нека  $OL=y$ ,  $OB=x$ . Построяваме  $MK \parallel BL$  ( $K \in AC$ ).



$\triangle ABM$  е равнобедрен, щом  $BO$  е

ъглополовяща и височина  $\Rightarrow AO=OM$ .

$OL$  е средна отсечка в  $\triangle AMK \Rightarrow KM = 2OL$

$= 2y$ .  $KM$  е средна

отсечка в  $\triangle BCL \Rightarrow BL = 2KM = 2 \cdot 2y = 4y$ .

От  $BL = x+y = 4y \Rightarrow$

$x = 3y \Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow \frac{OB}{OL} = \frac{3}{1}$$

**3 зад.:**

**I-ви начин)**  $n^2+8n+1 = (n-1)^2+10n$ . Ако  $100$  дели  $(n^2+8n+1) \Rightarrow 100$  дели  $((n-1)^2+10n) \Rightarrow 10/n$  и  $10/n-1$  — противоречие  $\Rightarrow 100$  не дели  $n^2+8n+1$ .

**II-ри начин)**  $n^2+8n+1 = n(n+8)+1$  завършва на  $0$ , ако  $n$  завършва на  $1$  и  $n+8$  завършва на  $9$  или  $n=10k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . От  $(10k+1)(10k+1+8)+1=100k^2+10k+10$  следва, че  $100$  не дели  $(100k^2+10k+10)$

**III-ри начин)** Ако  $n=2k$  (четно), то  $n^2+8n+1$  е нечетно число  $\Rightarrow 100$  не дели  $(n^2+8n+1)$ . Ако  $n=2k+1$  (нечетно), то  $(2k+1)^2+8(2k+1)+1=4A+2$ , което не се дели на  $4$ , а следователно и на  $100$  (с това се доказва, че  $100$  не дели  $(n^2+8n+1)$  за всяко  $n$ ).

## ТЕМА ЗА 9 КЛАС

**1 зад.:** Решете системата:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 6 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5 \end{cases}$$

(6т.)

**2 зад.:** ABCD е правоъгълник, за който  $AB=2a$ ,  $BC=a\sqrt{2}$ . Върху страната CD, като диаметър, е построена външно за правоъгълника полуокръжност. М е произволна точка от полуокръжността. Правите МА и МВ пресичат страната CD съответно в точките N и Р, а правите MC и MD пресичат правата AB съответно в точките  $C_1$  и  $D_1$ . Дикажете, че:

а)  $\triangle BC_1C \cong \triangle DD_1D_1$ ;

б)  $CN^2 + DP^2 = 4a^2$ .

(7m.)

**3 зад.:** Нека  $p$  и  $q$  са реални положителни числа, такива че уравнението

$$x^2 + \left(p - \frac{8q}{p}\right)x + q = 0$$

няма реални корени.

а) Да се докаже, че уравнението  $x^2 + px + q = 0$  има два различни реални корена.

б) Да се докаже, че ако  $x_1$  и  $x_2$  са корени на уравнението  $x^2 + px + q = 0$ , то  $7 - 4\sqrt{3} < \frac{x_1}{x_2} < 7 + 4\sqrt{3}$ .

(7m.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 КЛАС

**1 зад.:**

$$\sqrt{(x-y)(x+y)} = 6$$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5$$

Полагаме  $\sqrt{x-y} = u$  и  $\sqrt{x+y} = v$

$$u \cdot v = 6$$

$$u + v = 5$$

$$\Leftrightarrow u = 5 - v \Leftrightarrow (5 - v) \cdot v - 6 = 0 \Leftrightarrow -v^2 + 5v - 6 = 0 \Leftrightarrow v^2 - 5v + 6 = 0 \Rightarrow v_1 = 2, v_2 = 3$$

$$\Rightarrow u_1 = 5 - 2 = 3, u_2 = 5 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y} = 3 \\ \sqrt{x+y} = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 9 \\ x+y = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-y = 4 \\ x+y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 13 \Rightarrow x = 6,5 \\ -2y = 5 \Rightarrow y = -2,5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x = 13 \Rightarrow x = 6,5 \\ -2y = -5 \Rightarrow y = 2,5 \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = 6 \\ \sqrt{\frac{13}{2} + \left(\frac{-5}{2}\right)} + \sqrt{\frac{13}{2} - \left(\frac{-5}{2}\right)} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6 \\ \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{5}{2}} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{169-25}{4}} = 6 - \partial a \\ \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 - \partial a \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{36} = 6 - \partial a \\ \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 - \partial a \end{cases}$$

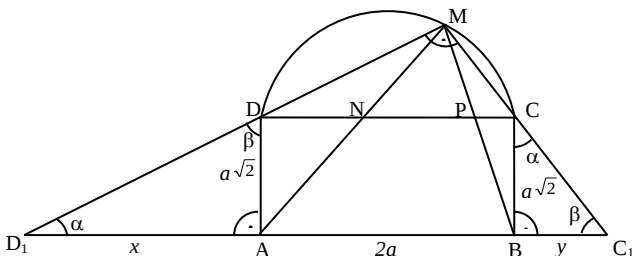
$\Rightarrow$  решения са  $(6,5; -2,5)$  и  $(6,5; 2,5)$

**2 зад.:** а)  $\left. \begin{aligned} \angle AD_1D + \angle ADD_1 &= 90^\circ \\ \angle AD_1D + \angle BC_1C &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle ADD = \angle BC_1C$

$\angle D_1AD = \angle C_1BC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BC_1C \sim \triangle ADD_1$  (I<sup>вн</sup> признак)  $\Rightarrow$

$$\frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{y} \Rightarrow x \cdot y = 2a^2$$

б)  $AC_1^2 + D_1B^2 = (2a+y)^2 + (x+2a)^2 = 4a^2 + 4a \cdot y + y^2 + x^2 + 4a \cdot x + 4a^2 = (x+y+2a)^2 - 2xy + 4a^2 = (x+y+2a)^2 = C_1D_1^2$ . Но  $\triangle MDC$  е хомотетичен



на  $\Delta MD_1C_1$  с център на хомотетия т. М и коефициент  $k = \frac{CD}{C_1D_1}$

$$\Rightarrow DP = k \cdot D_1B, \quad CN = k \cdot C_1A. \quad CN^2 + DP^2 = (k \cdot C_1A)^2 + (k \cdot D_1B)^2 = k^2 \cdot (C_1A^2 + D_1B^2) = k^2 \cdot C_1D_1^2 = (k \cdot C_1D_1)^2 = CD^2 = (2a)^2 = 4a^2, \\ \text{защото } CD = AB = 2a \text{ по условие.}$$

**3 зад.:** Понеже даденото уравнение по условие няма реални корени, то дискриминантата му е отрицателна, т.е.

$$\left(p - \frac{8q}{p}\right)^2 - 4 \cdot q < 0 \quad \Rightarrow \quad q > 0. \quad \text{Представяме полученото}$$

неравенство за дискриминантата във вида  $p^4 - 20 \cdot p^2 \cdot q + 64 \cdot q^2 < 0$  или още:  $(p^2 - 4 \cdot q)(p^2 - 16 \cdot q) < 0$ . Понеже  $q > 0$ , то  $p^2 - 4 \cdot q > 0 \Rightarrow p^2 - 4 \cdot q > 0$  и  $p^2 - 16 \cdot q < 0$ . Първото от двете неравенства показва, че  $x^2 + p \cdot x + q = 0$  има два различни реални корена. Ако означим тези корени с  $x_1$  и  $x_2$ , от второто неравенство и от формулите на Виет получаваме следното неравенство:  $(x_1 + x_2)^2 - 16 \cdot x_1 \cdot x_2 < 0$ , т.е.  $x_1^2 - 14 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 < 0$ . Понеже  $q = x_1 \cdot x_2 > 0$ , то  $x_2$  е различно от нула и можем да разделим двете страни на последното неравенство с  $x_2^2$ . Така получаваме:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 - 14 \cdot \frac{x_1}{x_2} + 1 < 0 \Rightarrow \text{стойностите на } \frac{x_1}{x_2} \text{ ще лежат между}$$

корените на уравнението  $y^2 - 14y + 1 = 0$ , които са  $\sqrt{3}$  и  $7 + 4\sqrt{3}$ ,

$$\text{т.е. } 7 - 4\sqrt{3} < \frac{x_1}{x_2} < 7 + 4\sqrt{3}.$$

### ТЕМА ЗА 10 КЛАС

**1 зад.:** Да се намерят стойностите на реалния параметър  $a$ , при който  $\log_a\left(m + \frac{5}{4}\right) < 0$ , където  $m$  е най-малкото

$$\text{решение на неравенството } \left(\sqrt{1+x} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1-x} + 1\right) < \frac{x}{4}$$

(6т.)

**2 зад.:** ABCD е равнобедрен трапец с основи AD и BC, като AB=CD=a, AC=BD=b, BC=c, а M е произволна точка от

дъгата ВС на окръжността, описана около ABCD. Намерете отношението  $\frac{BM+MC}{AM+MD}$ .

(7т.)

**3 зад.:** В редицата 1,4,10,19,.....разликите от два съседни члена образуват аритметична прогресия. Да се намерят формули за n-тия член и за сумата от първите n числа на дадената редица.

(7т.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

### 1 зад.:

**I-ви начин)**  $(\sqrt{1+x}-1) \cdot (\sqrt{1-x}+1) < \frac{x}{4}$  умножаваме двете

страни на неравенството с  $\varphi(x) = \sqrt{1+x}+1 > 0$  и получаваме:

$$4 \cdot \left( (\sqrt{1+x})^2 - 1 \right) \cdot (\sqrt{1-x}+1) < x \cdot (\sqrt{1+x}+1)$$

$$4 \cdot (1+x-1) \cdot (\sqrt{1-x}+1) - x \cdot (\sqrt{1+x}+1) < 0$$

$$4x \cdot (\sqrt{1-x}+1) - x \cdot (\sqrt{1+x}+1) < 0$$

$$x \cdot (4\sqrt{1-x} + 4 - \sqrt{1+x} - 1) < 0$$

$$x \cdot (4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3) < 0$$

Следователно:

|                                                                               |     |                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------|
| $x > 0$<br>$4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3 < 0$<br>$1+x \geq 0$<br>$1-x \geq 0$ | или | $x < 0$<br>$4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3 > 0$<br>$1+x \geq 0$<br>$1-x \geq 0$ |
| $\Leftrightarrow$                                                             |     |                                                                               |
| $0 < x \leq 1$<br>$\sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x} + 3$                              | или | $-1 \leq x < 0$<br>$\sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x} + 3$                             |

Неравенството няма решение, защото лявата му страна е най-много  $\sqrt{2}$ , а дясната му страна е най-малко 3. Аналогично се

установява, че решение са всяко  $x$ :  $-1 \leq x < 0 \Rightarrow m = -1$

$$\log_a \left( -1 + \frac{5}{4} \right) = \log_a \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow a > 1$$

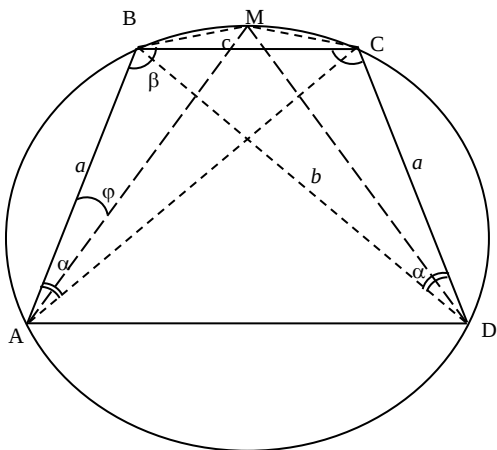
**II -ри начин)** ДМ:  $1 + x \geq 0$  и  $1 - x \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$  и с непосредствена проверка се установява, че  $x = -1$  е решение на неравенството  $\Rightarrow m = -1 \Rightarrow \log_a \frac{1}{4} < 0$  и  $a > 1$

### 2 зад.:

Нека  $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ ,  $\angle CBA = \angle CDA = \beta$ ,  $\angle BAM = \varphi$

$$\left. \begin{aligned} \angle MBC = \frac{MC}{2} = \angle MAC = \alpha - \varphi \\ \angle MCB = \frac{BM}{2} = \angle MAB = \varphi \end{aligned} \right\}$$

От синусова теорема



следват равенствата:  
 $BM = \sin \varphi \cdot 2R$ ,  $MC = \sin(\alpha - \varphi) \cdot 2R$ ,  
 $AM = \sin(\beta + \alpha) \cdot 2R$ ,  $MD = \sin(\beta + \varphi) \cdot 2R$ ,  
 $c = \sin \alpha \cdot 2R$ ,  $b = \sin \beta \cdot 2R$ ,  
 $a = \sin(180^\circ - (\beta + \alpha)) \cdot 2R = \sin(\beta + \alpha) \cdot 2R$ .

Тогава:

$$\frac{BM + MC}{AM + MD} = \frac{\sin \varphi + \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta + \varphi)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right)}{2 \sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha) + \sin \beta} = \frac{c}{a + b} \end{aligned}$$

**3 зад.:** Означаваме с  $a_n$  членовете на дадената редица и с  $b_n$  членовете на аритметичната прогресия, като  $b_1 = 3$  и  $d = 3$   
 $a_2 - a_1 = b_1$

$$a_3 - a_2 = b_2$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

Сумираме всички равенства, откъдето се получава:  $a_n -$

$$a_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = \left[ \frac{2b_1 + (n-2)d}{2} \right] (n-1)$$

$$a_n - 1 = \left[ \frac{2 \cdot 3 + (n-2) \cdot 3}{2} \right] (n-1) = \frac{3}{2} (n^2 - n) \Rightarrow a_n = \frac{3}{2} (n^2 - n) + 1$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{3}{2} ((1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n)) + n = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) + n = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \\ &= \frac{n}{4} (n+1)(2n+1) - \frac{3}{4} n(n+1) + n = \frac{n}{4} (n+1)(2n+1-3) + n = \frac{n}{2} (n^2 + 1) \end{aligned}$$

## ТЕМА ЗА 11 КЛАС

**1 зад.:** Дадена е редицата  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , определена от условията:  $a_1 = -2$ ,  $a_n = \frac{2+a_{n-1}}{1+2a_{n-1}}$  за всяко естествено  $n > 1$  и

редицата  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , определена с условието  $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$  за всяко естествено  $n \geq 1$ .

а) Да се докаже, че всички членове на първата редица са различни от -1.

б) Да се намери формула за общия член на втората редица и границата ѝ, когато  $n$  расте неограничено.

(7т.)

**2 зад.:** В прав кръгов конус е вписана правилна триъгълна призма с долна основа върху основата на конуса и върхове на горната основа върху околната му повърхнина. Основното сечение на конуса е равнобедрен триъгълник, а всички ръбове на призмата са равни. Да се намери отношението на пълната повърхнини на двете тела.

(6т.)

**3 зад.:** Решете уравнението:

$$\sqrt{\cos \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 0$$

(7m.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 КЛАС

**1 зад.: а)** Допускаме, че съществува стойност на  $k$ , за която  $a_k = -1$ . Тогава

$$-1 = \frac{2 - a_{k-1}}{1 + 2a_{k-1}} \Rightarrow -1 - 2a_{k-1} = 2 + a_{k-1}, -3a_{k-1} = 3 \Rightarrow a_{k-1} = -1.$$

Аналогично получаваме  $a_{k-2} = a_{k-3} = a_{k-4} = \dots = a_1 = -1$ . Но по условие  $a_1 = -2 \Rightarrow$  не съществува  $k$ , при което  $a_k = -1$

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \left( \frac{2 + a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}} - 1 \right) \div \left( \frac{2 + a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}} + 1 \right) =$$

$$\text{б) } = \frac{2 + a_{n-1} - 1 - 2a_{n-1}}{2 + a_{n-1} + 1 + 2a_{n-1}} = \frac{-(a_{n-1} - 1)}{3(a_{n-1} + 1)} = -\frac{1}{3} b_{n-1}$$

Равенството  $b_n = -\frac{1}{3} b_{n-1}$  показва, че втората редица е

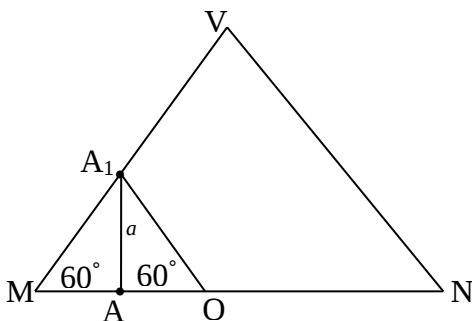
геометрична прогресия с частно  $-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow b_n = b_1 \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ Но } b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \frac{-2 - 1}{-2 + 1} = 3$$

$$\Rightarrow b_n = 3 \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}} = 0$$

**2. зад.:** Да разгледаме основото сечение  $MNV$  на конуса, което съдържа околния ръб  $AA_1$  на призмата. Нека  $AA_1 = a$ . Центърът  $O$  на основата на конуса съвпада с центъра на основата на призмата, която по условие е равностранен триъгълник със страна  $a$ . Следователно отсечката  $AO$  има дължина, равна на  $\frac{2}{3}$  от височината на този равностранен триъгълник, т.е.

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Тогава} \quad \operatorname{tg} \angle AOA_1 = \frac{AA_1}{AO} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ \text{ така че}$$



$\angle AOA_1 = 60^\circ$ . От друга страна  $\angle AMA_1 = 60^\circ$ , понеже  $\triangle MNV$  е равностранен. Оказа се, че  $\triangle MOA_1$  е също равностранен с височина  $AA_1 = a$  и страна  $MO$ , равна на

$$\text{радиуса } R \text{ на основата на конуса} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\text{Образователната } l_{\text{конуса}} = 2R$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{п.пов.кон}} &= S_1 = \pi R(R+l) = 3\pi R^2 = 4\pi a^2 \\ S_{\text{п.пов.пр.}} &= S_2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{8\pi}{6 + \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 0$$

**3. зад.:**

$$DM: \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq 0 \\ \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2} &\geq 0 \end{aligned} \right. \quad (1) \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{aligned} x &\neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ x &\neq (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\cos \frac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$$

$$3\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - (\operatorname{tg} x)^2}, \quad \operatorname{tg} x = z \quad (DM: z \neq \pm 1)$$

$$(1-z^2)3z = 2z \Rightarrow 3z(1-z^2) - 2z = 0 \Rightarrow z(3-3z^2-2) = 0$$

$$\Rightarrow z(1-3z^2) = 0$$

$$z = 0 \in \mathcal{DM} \text{ или } z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \in \mathcal{DM}$$

$$\text{a) } x = k\pi \in \textcircled{2} \quad \text{б) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{2} \quad \text{в) } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{2}$$

$$\text{a) } x = k\pi \in \textcircled{1}$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} - \underbrace{3\operatorname{tg} k\pi}_{=0} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} - \underbrace{\operatorname{tg} 2k\pi}_{=0} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \frac{k\pi}{2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| > 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \in$$

и е решение на уравнението

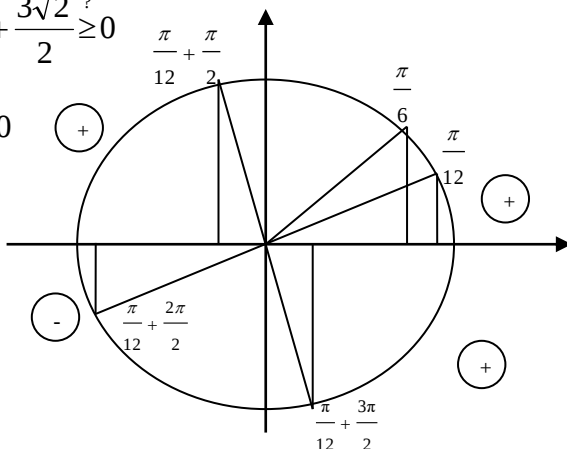
$$\text{б) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{1}$$

$$\left| \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - 3\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} + k\pi \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} 2 \left( \frac{\pi}{6} + k\pi \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \stackrel{?}{\geq} 0$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{?}{\geq} 0$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{6} \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 4l, 4l+1, 4l+3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 4l\pi \quad (k = 4l)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (4l+1)\pi \quad (k = 4l+1)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + (4l+3)\pi \quad (k = 4l+3)$$

**В)**  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) - \operatorname{tg} 2\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| \geq 0$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

$$\left| \cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) \right| \leq 1, \left| \frac{5\sqrt{3}}{2} \right| > 1 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \in \textcircled{1} \quad \text{и е решение на уравнението}$$

Отговор:

$$x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 4l\pi; x = \frac{\pi}{6} + (4l+1)\pi; x = \frac{\pi}{6} + (4l+3)\pi$$

### ТЕМА ЗА 12 КЛАС

**1. зад.:** Нека  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

а) Да се намери най-малката стойност на  $f(x)$ .

б) Да се докаже, че за всяко реално число  $a$  уравнението  $f(x) = a$  има най-много три отрицателни корена.

(7m.)

**2. зад.:** Да се намери отношението на дължините на страните на триъгълник, в който вписаната окръжност разделя една от ъглополовящите на три части в последователно отношение 1:4:5.  
(6т.)

**3. зад.:** В триъгълна пирамида ABCD ръбът AD има дължина 1 и е перпендикулярен на равнината (ABC). Равнината (BCD) сключва с равнините (ABC), (ABD) и (ACD) ъгли с голедини съответно  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  и  $60^\circ$ . Да се пресметнат дължините на ръбовете на пирамидата и радиуса на описаната около пирамидата сфера.  
(7т.)

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 12 КЛАС

**1 зад.:**

**а)**

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \left(\underbrace{\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x}}_{\geq 0}\right)^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow f_{\min} = 2$$

за  $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = 0$ , т.е. за  $x = -\frac{1}{2}$

**б)** Допускаме, че уравнението  $f(x) = a$  има четири

отрицателни корена.  $f(x) = a \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = a \quad (1).$

Полагаме  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = z \Rightarrow x^2 = (x+1)^2 z$

$$\Rightarrow -x^2 + x^2 z + 2xz + z = 0 \Rightarrow (z-1)x^2 + 2zx + z = 0 \quad (2)$$

(1)

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = a \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = a (z \neq 0), z^2 - az + 1 = 0 (z \neq 0)$$

с корени  $z_1, z_2$ . уравнение (1) има 4 отрицателни корени  $\Leftrightarrow$  уравнение (2) за  $z_1$  и  $z_2$  има отрицателни корени. Това е

ИЗПЪЛНЕНО, АКО

$$D = z^2 - z(z-1) \geq 0$$

$$-\frac{2z}{z-1} < 0 \text{ (формула на Виет за } x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ z-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow z > 1$$

$$\frac{z}{z-1} > 0 \text{ (формула на Виет за } x_1 \cdot x_2)$$

От уравнение (3) щом  $z > 1$ , т.е.  $z_1 > 1$  и  $z_2 > 1$ , то

$$\Rightarrow \begin{cases} D = a^2 - 4 \geq 0 \\ (z_1 - 1) + (z_2 - 1) > 0 \text{ (ф.Виет)} \\ (z_1 - 1)(z_2 - 1) > 0 \text{ (ф.Виет)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+2) \geq 0 \\ z_1 + z_2 > 2 \\ z_1 z_2 - (z_1 + z_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-2)(a+2) \geq 0 \\ a > 2 \\ 1-a+1 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  системата няма решение, допуснатото е невъзможно

**2 зад.:**  $K(O)$  вписана в  $\triangle ABC$ ,  $CM$  – ъглополовяща.

$$k \cap CM = \{K, L\} \text{ (} k \text{ е между } C \text{ и } L). \frac{CO}{OM} = \frac{AC}{AM} = \frac{CB}{MB} \Rightarrow$$

$$\frac{CO}{OM} = \frac{AC+CB}{AM+MB} = \frac{a+b}{c} \Rightarrow$$

$$CO > OM \Rightarrow CK > LM \Rightarrow$$

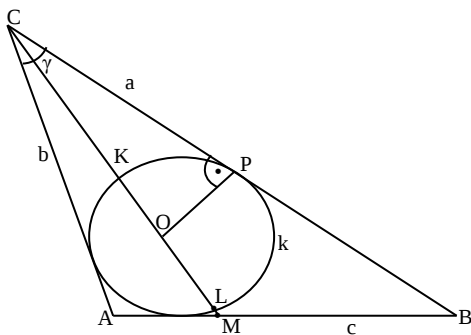
$$\Rightarrow CK : KL : LM = 5 : 4 : 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{CO}{OM} = \frac{CK+OK}{OL+LM} = \frac{5+2}{2+1} = \frac{7}{3}$$

От  $\triangle OPC$  ( $P$  – допирателна точка на  $k$  с  $BC$ ):

$$\frac{OP}{OC} = \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{7} \Rightarrow \cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} =$$

$$= 1 - \frac{8}{49} = \frac{41}{49} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{41}{49}$$



$$\begin{cases} \frac{a+b}{c} = \frac{7}{3} \\ c^2 = a^2 + b^2 - \frac{82}{49}ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = 7c \\ \left(\frac{3a+3b}{7}\right)^2 = a^2 + b^2 - \frac{82ab}{49} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{3a+3b}{7} \\ 9a^2 + 18ab + 9b^2 = 49a^2 + 49b^2 - 82ab \end{cases}$$

$$40a^2 + 40b^2 - 100ab = 0 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 - 10ab = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0$$

Делим на  $b^2 \neq 0$

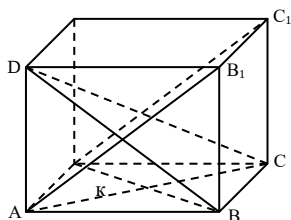
$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0, D=9,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{От } a = 2b \Rightarrow c = \frac{9b}{7} \Rightarrow a : b : c = 14 : 7 : 9$$

$$\text{От } b = 2a \Rightarrow c = \frac{9a}{7} \Rightarrow a : b : c = 7 : 14 : 9$$

**3 зад.:** Построяваме куб, чийто ръб има дължина 1.



означаваме с А, В и С три от върховете на основата му и с AD – единия му околнен ръб. Тетраедът ABCD отговаря на условието на задачата. Очевидно  $AD \perp (ABC)$  и  $AD=1$ . Ъгълът между равнините (ABC) и (BCD) е равен на  $\angle ABD = 45^\circ$  - равнината  $(ABD) \perp BC$ , която е пресечница на (ABC) и (BCD). Ъгълът между равнините (BCD) и (ABD) е равен на  $90^\circ$ . Накрая остава да намерим ъгъла между равнините (BCD) и (ACD). Този ъгъл е равен на ъгъла между две прави, които са съответно перпендикулярни на тези равнини. Едната е  $AB_1$  ( $BB_1$  е околнен ръб на куба), която е  $\perp$  на (BCD), а другата е BK (K е четвъртият връх на основата на куба), която е  $\perp$  на (ACD). Тъй като  $AB_1 \parallel KC_1$  ( $CC_1$  е околнен

ръб на куба), то ъгълът между  $\angle(AB_1, BK) = \angle BKC_1$ . Но  $\triangle BKC_1$  е равнобедрен, откъдето следва, че  $\angle BKC_1 = 60^\circ = \angle((BCD), (ACD))$ . Следователно  $AB=BC=AD=1$ ,  $BD=AC=\sqrt{2}$  и  $CD=\sqrt{3}$ , а радиусът  $r$  на описаната около пирамидата сфера е  $r = 0,5 \cdot CD = 0,5 \cdot \sqrt{3}$  ( $D, A, B, C$  са точки от сферата,  $\triangle DAC$  и  $\triangle DBC$  са правоъгълни с обща хипотенуза  $CD$ , откъдето средата на  $CD$  се намира на разстояние  $0,5 \cdot CD$  от  $A, B, C, D$ ).