

1996 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

1 зад. Намерете неизвестното число:

а) $852 : 6 - 117 = x - 357$;

б) $3 \cdot x = 820\,924 + 82\,406$;

в) $x : 4 = 101\,201 - 81\,179$;

г) $143\,276.3 + x = 1\,000\,000 - 99186$

2 зад. Турист изминал 120 км за 9 дни с една и съща скорост. Първата половина от пътя той изминал за 3 дни, като вървял по 4 часа на ден. По колко часа на ден е вървял туристът през втората половина от пътя.

3 зад . а) Квадрат със страна 9 см и правоъгълник имат равни лица. Да се намери обиколката на правоъгълника, ако едната му страна е три пъти по-малка от страната на квадрата.

б) Двор има форма на правоъгълник и обиколка, равна на намерената обиколка в подточка а). Посочете възможните размери на този двор в метри, ако знаем, че те са естествени числа. При кои от тях площта на двора ще бъде най-голяма?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

1 зад. а) $x = 382$; б) $x = 301\,110$; в) $x = 80\,088$; г) $x = 470\,986$.

2 зад. $120:2 = 60$ км – изминати за 3 дни, всеки ден по 4 часа. Останалите 60 км са изминати за $9 - 3 = 6$ дни със същата скорост. Следователно туристът е вървял два пъти по-малко часа на ден, т. е. $4 : 2 = 2$ часа на ден.

Или $(60 : 3) : 4 = 5$ км/ден през първата половина на пътя, откъдето $(60 : 6) : 5 = 2$ часа всеки ден през втората половина на пътя.

3 зад. а) $S_{\text{кв.}} = 81 \text{ кв.м} = S_{\text{прав.}} = a \cdot b$, където $a = 9:3 = 3 \text{ м}$

$\Rightarrow b = 81:3=27 \text{ м}$ и $P = 2 \cdot (3+27) = 60 \text{ м}$.

б) От $P = 2 \cdot (a + b) = 60 \Rightarrow a + b = 30 \text{ м}$

a/b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b/a	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
S	29	56	81	104	125	144	161	176	189	200	209	216	221	224	225 max

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

1 зад. За да нахраним общо 56 кучета и котки, са необходими 304 кренвирша. Всяка котка изядва по 5 кренвирша, а всяко куче – по 7 кренвирша. Колко са котките и кучетата?

2 зад. Да се пресметне числото:

$$A = \frac{(1+93) \cdot (1+\frac{93}{2}) \cdot (1+\frac{93}{3}) \dots (1+\frac{93}{95})}{(1+95) \cdot (1+\frac{95}{2}) \cdot (1+\frac{95}{3}) \dots (1+\frac{95}{93})}$$

Числото А е намалено първоначално с 15%, след това – с още 20%. Какъв е общият процент на намалението?

3 зад. Дадена е сумата $S=1+2+3+4+\dots+107$.

Покажете, че S се дели на 18.

б) Намерете най-голямото трицифрено число N, за което $S+N$ се дели на 10.

в) Намерете най-малкото естествено число M, за което $S-M$ се дели на 15.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

1 зад. Най-напред ще дадем на всяко животно по 5 кренвирша. Ще раздадем общо $56 \cdot 5 = 280$ кренвирша. Останалите $304 - 280 = 24$ кренвирша трябва да дадем по два на всяко от кучетата. Следователно кучатата са $24 : 2 = 12$. Тогава котките са $56 - 12 = 44$

2 зад.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{(1+93) \cdot (1+\frac{93}{2}) \cdot (1+\frac{93}{3}) \dots (1+\frac{93}{95})}{(1+95) \cdot (1+\frac{95}{2}) \cdot (1+\frac{95}{3}) \dots (1+\frac{95}{93})} = \frac{94 \cdot \cancel{95} \cdot \cancel{96} \dots \cancel{188}}{96 \cdot \cancel{97} \cdot \cancel{98} \dots \cancel{188}} = \\ & = \frac{94 \cdot \cancel{95} \cdot \cancel{96} \dots \cancel{188}}{96 \cdot \cancel{97} \cdot \cancel{98} \dots \cancel{188}} = \frac{2 \cdot 3 \dots 93}{2 \cdot 3 \dots 95} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{б) I намаление} - 15\% \text{ от } 1 = \frac{15,1}{100} = \frac{15}{100}$$

$$\text{II намаление} - 20\% \text{ от } 1 - \frac{15}{100} = \frac{20}{100} \cdot \frac{85}{100} = \frac{1700}{10000} = \frac{17}{1000}$$

$$\text{Окончателна стойност на числото: } 1 - (\frac{15}{100} + \frac{17}{1000}) = 1 - \frac{32}{100} = \frac{68}{100}$$

Следователно общият процент на намаление е 32%.

3 зад.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 53 + 54 + 55 + \dots + 105 + 106 + 107 = (1 + 107) \cdot 53 + 54 =$$

$$108 \cdot 53 + 54 = 5\,778$$

а) $S = 3 \cdot 18 \cdot 107 \Rightarrow 18$ дели 5 778

б) $N = 992 \quad S + N = 5\,778 + 992 = 6\,770 \Rightarrow 10$ дели 6 770

в) $M = 3 \quad S - M = 5\,778 - 3 = 5\,775 = 15 \cdot 385 \Rightarrow 15$ дели 5 775

ТЕМА ЗА 6 КЛАС

1 зад. На конкурсен изпит по математика се явили определен брой ученици. От тях 10% не решили нито една задача и получили слаба оценка. Броят на решените задачи за отличен представлява $\frac{1}{4}$ от броя на решените за слаб, а останалите ученици, явили се на изпита, са 1085.

Да се намери колко ученици са се явили на изпита?

б) Да се определи броя на приетите ученици, като се знае, че броят на учениците, получили оценка среден, добър и много добър, е съотношение 8:16:7 и в училището са приети само ученици, получили отлични и много добри оценки.

2 зад. Върху страната АВ и диагонала АС на успоредника ABCD са взети съответно точки М и Р, такива че АМ:МВ=1:3 и АР:РС=1:4. Да се определи каква част от лицето на успоредника е лицето на четириъгълника BCPM.

3 зад. Да се намери сборът от цифрите на произведението на числата

$$A = \underbrace{999 \dots 999}_{1996 \text{ пъти}} \quad B = \underbrace{555 \dots 555}_{1996 \text{ пъти}}$$

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

1 зад.

а) Брой на слабите оценки – $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Брой на отличните оценки – $\frac{1}{4}$ от $\frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

$$1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{40}\right) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} - \text{брой на останалите оценки.}$$

Нека x е броя на учениците, явили се на изпит ($x > 0$, x – цяло число) $\frac{7}{8}$ от $x = 1085 \Rightarrow \frac{7}{8} \cdot x = 1085 \Rightarrow x = 1085 : \frac{7}{8} = \frac{1085 \cdot 8}{7} = 1240$

б) k – брой на оценките за една част ($8+16+7=31$ части всичко)

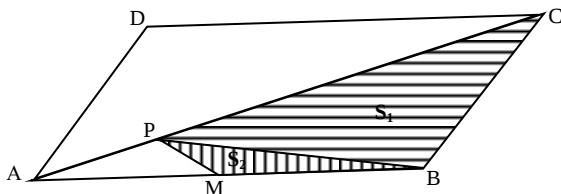
$$\left. \begin{array}{l} \text{Брой на средните оценки} - 8k \\ \text{Брой на добрите оценки} - 16k \\ \text{Брой на много добрите оценки} - 7k \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8k + 16k + 7k = 1085 \\ 31k = 1085 \\ k = 1085 : 31 = 35 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{броят на петиците е } 7 \cdot 35 = 245$$

Броят на отличниците е $\frac{1}{40}$ от $1240 = \frac{1240}{40} = 31 \Rightarrow$ броят на приетите ученици е $245 + 31 = 276$

2 зад. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S$

$\triangle ABP$ и $\triangle PBC$ имат една и съща височина от върха B , но основата PC е 4 пъти по-голяма от основата $AP \Rightarrow S_{\triangle PBC} = \frac{4}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} S\right) = \frac{2}{5} S = S_1$



$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} S\right) = \frac{1}{10} S$$

$\triangle AMP$ и $\triangle MBP$ имат една и съща височина от върха P , но основата MB е 3 пъти по-голяма от основата

$$AM \Rightarrow S_{\triangle MBP} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABP} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{10} S\right) = \frac{3}{40} S = S_2 \Rightarrow S_{MBCP} = S_1 + S_2 = \frac{2}{5} S + \frac{3}{40} S = \frac{19}{40} S$$

3 зад. Числото $A = \underbrace{999\dots99}_{1996 \text{ пъти}} = \underbrace{1000\dots00}_{1996 \text{ пъти}} - 1$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } A \cdot B &= (\underbrace{999\dots99}_{1996 \text{ пъти}}) \cdot (\underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}}) = (\underbrace{1000\dots00}_{1996 \text{ пъти}} - 1) \cdot (\underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}}) = \\ &= (\underbrace{1000\dots00}_{1996 \text{ пъти}}) \cdot (\underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}}) - (\underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}}) = \underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}} \underbrace{000\dots00}_{1996 \text{ пъти}} - \underbrace{555\dots55}_{1996 \text{ пъти}}. \end{aligned}$$

Последните 1996 цифри на умаляемото са нули и изваждането се извършва лесно. Получаваме: $A \cdot B =$

$$= (\underbrace{999 \dots 99}_{1996\text{пъти}}) \cdot (\underbrace{555 \dots 55}_{1996\text{пъти}}) = \underbrace{555 \dots 55}_{1995\text{пъти}} \underbrace{444 \dots 445}_{1996\text{пъти}}. \text{ Сборът от}$$

$$\text{цифрите } A.B \text{ е } 1995.5 + 1996.4 + 1.5 = 1996.5 + 1996.4 = 1996.9$$

$$= 17964$$

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

1 зад. Дадени са функциите $f(x) = ax - 1$ и

$$g(x) = \frac{a(x-1)}{2} + \frac{3x-2}{3} + \frac{3a+1}{6}$$

а) Да се определи параметъра a така, че уравнението $f(x) = 0$ и $g(x) = 1$ да са равносилни в множеството на целите числа.

б) Да се намерят целите стойности на a , за които уравнението $|f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}$ има корени естествени числа.

2 зад. Един влак трябва да измине разстоянието между гарите А и В по разписание за определено време. Ако влакът тръгне от А и се движи със скорост 75 км/ч, ще пристигне в гара В 48 минути по-рано, а ако се движи с 50 км/ч, за определеното време ще стигне на 40 км преди гара В.

Да се намери: а) разстоянието между двете гари;

б) скоростта, която трябва да се движи влакът, за да спази разписанието.

3 зад. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ъгъл $\angle BAC = 30^\circ$, в който AA_1 и BB_1 са височините съответно към BC и AC. Ако разстоянието $A_1B_1 = 10$ см, да се намери разстоянието от точката B_1 до страната BC.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

1 зад. След привеждане под общ знаменател функцията $g(x)$ приема вида: $g(x) = \frac{(a+2)x-1}{2}$

а) Уравнението $f(x) = 0$, т.е. $ax - 1 = 0$ има решение при $a \neq 0$ и то е $x = \frac{1}{a}$, което е цяло число за $a = 1$ или $a = -1$.

Уравнението $g(x) = 1$ се свежда до $(a+2) \cdot x = 3$ и за $a = 1$ има корен $x = 1$, за $a = -1$ има корен $x = 3$. Вече е ясно, двете

уравнения са равносилни в множеството на целите числа само за $a = 1$

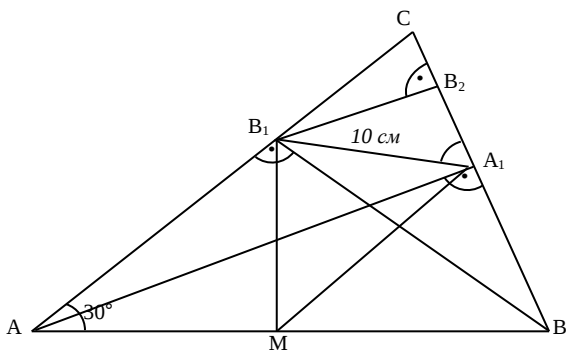
б) Лесно се получава, че $f(x) - g(x) = \frac{(a-2)x-1}{2}$ и даденото уравнение се свежда до уравненията $(a-2).x-1=1$ и $(a-2).x-1=-1$. Оттук следва, че $(a-2).x=2$ или $(a-2).x=0$. Ако $a=2$ второто уравнение има за решения всички числа /следователно и естествените/, а за $a \neq 2$ от първото намираме $x = \frac{2}{a-2}$. Този израз представя естествено число, когато $a-2=1$, $a-2=2$, т.е. за $a=3$, $a=4$.

2 зад. Да означим с x часа определеното време за пътя от A до B ($x > 0$)

$$\left(x - \frac{48}{60}\right) \cdot 75 = x \cdot 50 + 40 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{5}\right) \cdot 75 = x \cdot 50 + 40 \Leftrightarrow 75x - 60 = 50x + 40 \\ \Leftrightarrow 25x = 100 \Rightarrow x = 4$$

$$S = 4.50 + 40 = 240 \text{ км}, V = \frac{S}{t} = \frac{240}{4} = 60 \text{ км/ч}$$

3 зад. Да означим с M средата на AB . От свойството на медианата към хипотенузата следва, че $\angle MA_1B = \angle MBA_1 = \beta$



и $\angle MB_1A = \angle MAB_1 = \alpha$. Ето защо $\angle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle BMA_1 = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow \angle A_1MB_1 = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$.

От равнобедрения $\triangle MB_1A_1$ намираме:

$$\angle MB_1A_1 = \angle MA_1B_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \angle CA_1B_1 = 180^\circ - \angle MA_1B - \angle MA_1B_1 = \alpha = 30^\circ$$

$\triangle A_1B_1B_2$ – правоъгълен с остър $\angle B_2A_1B_1 = 30^\circ \Rightarrow B_1B_2 =$

$$\frac{A_1B_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см.}$$

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

1 зад. Дадено е уравнението $a^2x - 4x + b = 2a^2 - 5a$, където реалното число a е параметър, а b е най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството

$$\sqrt{1 - \sqrt{32x + 8x^2}} < 3 - 2x. \text{ Да се реши уравнението.}$$

б) Да се определи за кои цели стойности на a коренът на уравнението е естествено число.

2 зад. Страната на AB на ΔABC има дължина a см. Точките M , N , P и Q са средите съответно на BC , AM , CN и AP . Правата CQ пресича AB в точката S . Да се намери дължината на отсечката AS .

3 зад. Да се докаже, че за всяко естествено n числото $n^2 + 3n + 5$ не се дели на 121.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПОДГОТВИТЕЛЕН И 8 КЛАС

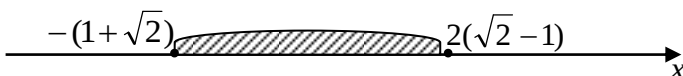
1 зад.

$$\text{а) } \sqrt{1 - \sqrt{32x + 8x^2}} = \sqrt{(1 - \sqrt{8x})^2} = |1 - \sqrt{8x}|$$

$$|1 - \sqrt{8x}| < 3 - 2x \Leftrightarrow -(3 - 2x) < 1 - \sqrt{8x} < 3 - 2x$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{8x} < 3 - 2x \\ 2x - 3 < 1 - \sqrt{8x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x < 1 \\ (1 + \sqrt{2})x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \quad (1 - \sqrt{2} < 0) \\ x < \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -(1 + \sqrt{2}) \\ x < 2(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in \left(-1 - \sqrt{2}; 2(\sqrt{2} - 1) \right)$$

$$1)) \Rightarrow b = -2$$

Тогава уравнението добива вида:

$$a^2x - 4x - 2 = 2a^2 - 5a$$

$$(a^2-4).x=2a^2-5a+2$$

$$(a-2)(a+2).x=2a^2-4a-a+2$$

$$(a-2)(a+2).x=2a(a-2)-(a-2)=(a-2)(2a-1)$$

I сл.) Ако $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{2a-1}{a+2}$

II сл.) Ако $a=2$, то уравнението има вида $0.x=0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ е решение

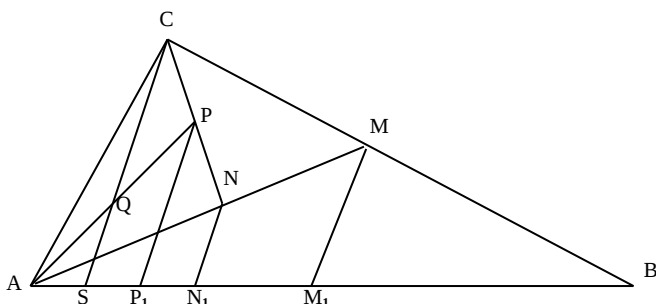
III сл.) Ако $a=-2$, то уравнението добива вида $0.x=20$ – няма решение

б) Решението $x = \frac{2a-1}{a+2} = \frac{2a+4-4-1}{a+2} = 2 - \frac{5}{a+2}$

За да е изпълнено $\frac{5}{a+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+2 = \pm 1$ или $a+2 = \pm 5 \Rightarrow a = -1; -3; 3; -7$. За $a = -1 \Rightarrow x = -3 \notin \mathbb{N}$; за $a = -3 \Rightarrow x = 7 \in \mathbb{N}$; за $a = 3 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N}$; за $a = -7 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Ако $a = -3; 3; 7$, то решението е естествено число

2 зад. Построяваме $PP_1 // CS$, $NN_1 // CS$ и $MM_1 // CS$.

Нека $AS = x$ см; QS е средна отсечка в $\triangle AP_1P \Rightarrow SP_1 = AS = x$ см.



PP_1 е
средна
отсечка в
трапеца
 $SN_1NC \Rightarrow$
 $P_1N_1 = SP_1 =$
 x см. NN_1 е
средна
отсечка в
 $\triangle AM_1M \Rightarrow$

$N_1M_1 = AN_1 = 3.x$ см. MM_1 е средна отсечка в $\triangle SBC \Rightarrow$
 $BM_1 = SM_1 = 5.x$ см. $AB = AS + SP_1 + P_1N_1 + N_1M_1 + M_1B =$
 $x + x + x + 3.x + 5.x = 11.x = a \Rightarrow AS = x = \frac{a}{11} \Rightarrow AS = \frac{a}{11}$ см.

3 зад. $n^2 + 3.n + 5 = n^2 - 16 + 3.n - 12 + 33 =$
 $= (n-4)(n+4) + 3(n-4) + 33 = (n-4)(n+7) + 33$

Ако 121 дели $n^2 + 3.n + 5 \Rightarrow (n-4)(n+7) + 33 = 121.k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Но 11 дели 33 и 11 дели $121k \Rightarrow 11$ дели $(n-4)$ или 11 дели $(n+7)$. Тъй като $(n+7) - (n-4) = 11 \Rightarrow 11$ дели $(n-4)$ и 11 дели $(n+7) \Rightarrow 121$ дели $(n-4)(n+7) \Rightarrow 121$ дели 33 – противоречие.

ТЕМА ЗА 9 КЛАС

1 зад. Решете системата:

$$y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$$

$$z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0$$

$$x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$$

2 зад. В правоъгълния триъгълник е вписана окръжност и през допирните ѝ точки с катети са построени прави, успоредни на хипотенузата. Отсечките от тези прави, заключени между катетите, са 15 см и 20 см. Да се намери хипотенузата.

3 зад. Дадени са сто последователни прости числа $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$. Да се определи броя на нулите, на които завършва числото

$$A = p_1(p_1^2 \cdot p_2)(p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3)(p_1^4 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 \cdot p_4) \dots (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \dots p_{100})$$

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 КЛАС

1 зад.

$$y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \quad \left| \quad y^3 = 9(x^2 - 3x + 3) \right.$$

$$z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \Leftrightarrow \left| \quad z^3 = 9(y^2 - 3y + 3) \right.$$

$$x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \quad \left| \quad x^3 = 9(z^2 - 3z + 3) \right.$$

$D = 9 - 12 = -3 < 0$, $a = 1 > 0$. Следователно $y > 0$, $z > 0$, $x > 0$.
изваждаме от двете страни на уравненията 27 и получаваме:

$$y^3 - 27 = 9(x^2 - 3x) = 9x(x - 3)$$

$$z^3 - 27 = 9(y^2 - 3y) = 9y(y - 3) \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 27 = 9(z^2 - 3z) = 9z(z - 3)$$

$$(y - 3)(y^2 + 3y + 9) = 9x(x - 3)$$

$$(z - 3)(z^2 + 3z + 9) = 9y(y - 3)$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 9z(z - 3)$$

Умножаваме уравненията и получаваме:

$$(x-3)(y-3)(z-3) \cdot \underbrace{[(y^2 + 3y + 9)(z^2 + 3z + 9)(x^2 + 3x + 9) - 9x \cdot 9y \cdot 9z]}_A = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2 + 3y + 9 \geq 9y \text{ за } \forall y \in \mathbb{R}, \text{ като равенство се достига за } y = 3 \\ z^2 + 3z + 9 \geq 9z \text{ за } \forall z \in \mathbb{R}, \text{ като равенство се достига за } z = 3 \\ x^2 + 3x + 9 \geq 9x \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ като равенство се достига за } x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \geq 0 \text{ за } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ и } A = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 3$$

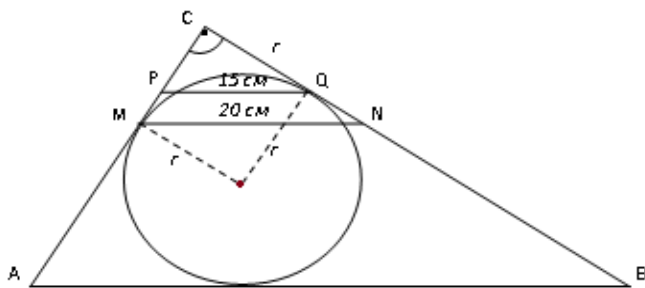
I сл. Ако $A = 0 \Rightarrow x = y = z = 3$

II сл. Ако $A > 0 \Rightarrow (x-3)(y-3)(z-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ или $y = 3$ или $z = 3$

Но ако $x = 3 \Rightarrow z = 0$ или $z = 3$ /от третото уравнение на системата/. Но $z > 0 \Rightarrow z = 3$ и $y = 3$ /чрез аналогични разсъждения/. Аналогично ако $y = 3 \Rightarrow x = z = 3$ и ако $z = 3 \Rightarrow x = y = 3$. Следователно единствено решение на системата е $x = y = z = 3$.

2 зад. $\triangle MNC \sim \triangle PQC \Rightarrow \frac{MN}{PQ} = \frac{MC}{PC} \Rightarrow \frac{20}{15} = \frac{r}{\sqrt{15^2 - r^2}} \Rightarrow$

$$r = 12 \text{ см};$$



$$CP = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ см}$$

Ако r_1 е радиуса на вписаната окръжност в $\triangle PQC$, то $15 + 2r_1 = 9 + 12$ ($PQ + 2r_1 = CP + CQ$) $2r_1 = 21 - 15 \Rightarrow r_1 = 3 \text{ см}$

$$\triangle PQC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{15}{AB} \Rightarrow AB = 60 \text{ см.}$$

3 зад. I сл.) Ако $p_1 > 2$, то $p_2 \geq 3, p_3 \geq 5, \dots \Rightarrow p_i \neq 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) за $i = 1, 2, \dots, 100$. Тъй като едно число завършва на нула, ако се

дели на 2 и 5, то в A няма четен множител (2) и следователно A не може да завършва на 0.

II сл.) Ако $p_1=2$, то $p_3=5$. Тогава в числото A има следните множители:

$$p_1 \cdot p_1^2 \cdot p_1^3 \dots p_1^{100} = 2^{1+2+3+\dots+100} = 2^{5050}; \quad p_3 \cdot p_3^2 \cdot p_3^3 \dots p_3^{98} \\ = 5^{1+2+3+\dots+98} = 5^{4851}$$

$$\Rightarrow A = 2^{5050} \cdot 5^{4851} \cdot \underbrace{p_2^l \cdot p_4^m \dots p_{100}}_{A_2} = 10^{4851} \cdot \underbrace{2^{199}}_{A_1} \cdot A_2 = 10^{4851} \cdot A_1 \Rightarrow$$

броят на нулите е 4581

ТЕМА ЗА 10 КЛАС

1 зад. Даден е триъгълник ABC с ъгли α , β , γ и страни a , b , c . Да се докаже, че:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

ако страните a , b и c образуват аритметична прогресия, то и

$$\cot g \frac{\alpha}{2}, \quad \cot g \frac{\beta}{2}, \quad \cot g \frac{\gamma}{2} \text{ образуват аритметична прогресия.}$$

2 зад. Две окръжности, допиращи се вътрешно в точка А са пресечени с права p , перпендикулярна на централата им, която пресича окръжностите в точки В и С, намиращи се в една и съща полуравнина относно централата им. Да се докаже, че радиусът на окръжността, описана около триъгълника ABC не зависи от избора на правата p .

3 зад. Да се намерят всички естествени числа x , y и z , за които

$$1 = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2}$$

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

1 зад.

$$\text{a) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \tau = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \tau$$

$$\begin{aligned}
&= 2\cos \frac{180^\circ - \tau}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \tau = \\
&= 2\sin \frac{\tau}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{\tau}{2} = (2\sin \frac{\tau}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \\
&2\sin^2 \frac{\tau}{2}) + 1 = 2\sin \frac{\tau}{2} (\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\tau}{2}) + 1 = \\
&= 2\sin \frac{\tau}{2} (\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}) + 1 = \\
&2\sin \frac{\tau}{2} \cdot 2\sin \frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{4} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{4} + 1 = \\
&= 4\sin \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + 1
\end{aligned}$$

Ще покажем, че $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \leq \frac{1}{8}$, като използваме, че

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\tau}{2} = \\
&\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\tau}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} (1 - \sin \frac{\tau}{2}) \cdot \sin \frac{\tau}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sin \frac{\tau}{2} + \sin \frac{\tau}{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \tau = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} + 1 \leq 4 \cdot \frac{1}{8} + 1 = \frac{3}{2}$$

(равенството се достига при $\alpha = \beta = \tau = 60^\circ$)

6) $\div a, b, c \Rightarrow a - b = b - c$, но $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\tau$ (Синусова теорема)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sin \alpha - \sin \beta = \sin \beta - \sin \tau \Rightarrow \\
&2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2\sin \frac{\beta - \tau}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \tau}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Ho } \alpha + \beta = 180^\circ - \tau \Rightarrow \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} = \sin \frac{\beta - \tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$(\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}) \cdot \sin \frac{\tau}{2} = (\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\tau}{2} -$$

$$\cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} -$$

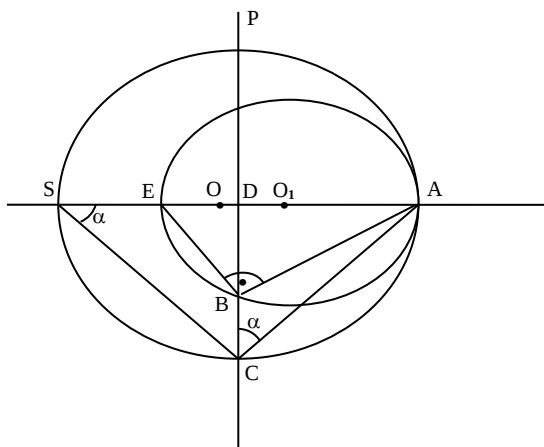
$$\cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$(\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \neq 0)$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}} - \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}} -$$

$$\frac{\cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\tau}{2}} \Rightarrow \cotg \frac{\beta}{2} - \cotg \frac{\alpha}{2} = \cotg \frac{\tau}{2} - \cotg \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\text{имаме } \div \cotg \frac{\alpha}{2}, \cotg \frac{\beta}{2}, \cotg \frac{\tau}{2}$$



2 зад. Нека $\angle ASC = \alpha$

$$\Rightarrow \angle DCA = \alpha$$

$$OA = r, O_1A = r_1$$

x – радиус на окръжността, описана около $\triangle ABC$. От Синусова теорема за

$$\triangle ABC: \frac{AB}{\sin \alpha} = 2x$$

$$\text{От прав. } \triangle ABE: AB = \sqrt{2r \cdot AD}$$

От прав. $\triangle ASC$: $\sin \alpha = \frac{AC}{AS} = \frac{\sqrt{2R \cdot AD}}{2R}$

$$\frac{\sqrt{2r \cdot AD}}{\sqrt{2R \cdot AD}} = 2 \cdot x \Rightarrow x = \sqrt{R \cdot r}, \text{ т.е. не зависи от избора на правата}$$

$$2R$$

p.

3 зад. Нека (x, y, z) е решение на даденото уравнение. Означаваме с a най-малкото от тези числа. Тогава

$$1 = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2} \leq \frac{9}{a^2}, \text{ т.е. } a \leq 3. \text{ Тъй като } a=1 \text{ е невъзможно}$$

$\Rightarrow a=2$ или $a=3$. От горното неравенство $\Rightarrow$ ако $a=3$, то $x=y=z=3$. Остатък $a=2$. Очевидно $z > 2$ и значи имаме два

случая $x=2$ или $y=2$. Нека $x=2$. Тогава (1) $\frac{1}{2} = \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2} \Rightarrow y \geq$

$3, z \geq 3$. Нека b е по-малкото от числата y и z . От (1) $\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{7}{b^2}$,

т.е. $b \leq 3$. Следователно едно от числата y или z е 3. С директна проверка се вижда, че (1) не е изпълнено. Остава да разгледаме случая $y=2$. Чрез аналогични разсъждения се намира, че $x=3, z=12 \Rightarrow (x, y, z) = (3, 3, 3)$ или $(x, y, z) = (3, 2, 12)$.

ТЕМА ЗА 11 и 12 КЛАС

1 зад. Дадена е редицата с общ член

$$a_k = \sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}, \quad k=1, 2, 3, \dots \text{ и нека}$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Да се докаже, че редицата с общ член S_n е сходяща и да се намери нейната граница.

2 зад. Дължината на ръба на куб с основа $ABCD$ и околни ръбове AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 е единица. През правата B_1C е прекарана равнина, която пресича ръба AB и съдържа ъгъл 60° с правата A_1B . В какво отношение равнината на сечението дели ръба AB .

3 зад. В шкаф се намират n различни чифта обувки. По случаен начин са извадени $2r$ обувки ($2r < n$). В колко от случаите измежду извадените обувки има поне еди чифт?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 и 12 КЛАС

1 зад.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \\ &+ (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \\ &+ (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\ \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

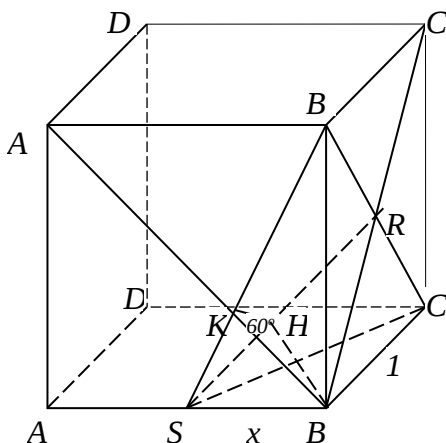
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = \\ &= 1 - \sqrt{2}, \text{ защото } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

2 зад.

Нека $\alpha \cap AB = S$;

 ΔSCB_1 – равнобедрен ($SB_1 = C$)

Означаваме $BS = x$, $\kappa = {}_1B \cap B_1S$

 $\Lambda SBK \sim$

$$\Delta A_1 B_1 K \Rightarrow \frac{A_1 B_1}{BS} = \frac{A_1 K}{BK}; \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{A_1 K}{BK}; \frac{1+x}{x} = \frac{\sqrt{2}}{BK} \Rightarrow BK = \frac{\sqrt{2}x}{x+1}$$

рояваме $BH \perp$ равнината

$(S_1C_1B_1) \Rightarrow H$ е ортоцентър на $\triangle SCB_1$

$$V_{SBCBB_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta SBC} \cdot BB_1 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6} \cdot x$$

$$\begin{aligned}
V_{SBCB_1} &= \frac{1}{3} S_{\Delta SB_1C} \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot B_1C \cdot SR \cdot BH = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot BH = \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{1+2x^2} \cdot BH \Rightarrow \left(CS^2 = x^2 + 1; CR = \frac{CB_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \frac{1}{6} \cdot x = \frac{1}{6} \sqrt{1+2x^2} \cdot BH \\
\Rightarrow BH &= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \\
\text{От } \Delta BHK \text{ } \angle KBH &= BK \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow BK = \frac{BH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot BH}{\sqrt{3}} \Rightarrow BK = \frac{2x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1+2x^2}} \\
\Rightarrow \frac{\sqrt{2}x}{x+1} &= \frac{2x}{\sqrt{3(1+2x^2)}} \Rightarrow 2(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3 зад. Ще докажем, че броят на случаите, при които измежду извадените $2r$ обувки няма нито един чифт е точно $2^{2r} \cdot C_n^{2r}$. Нека сме извадили $2r$ обувки, измежду които няма чифт и нека всяка обувка означим с $A_1, A_2, \dots, A_{2r}$, където A_i – това е вида на един от дадените n чифтове. На извадените $2r$ обувки съпоставяме ненаредени редици от чифтове – техният брой е $\binom{n}{2r}$. Но всеки чифт има 2 обувки $\Rightarrow$ за първата извадена обувка от чифта A_1 има 2 възможности, аналогично за обувката от чифта A_2 също има две възможности и т. н. Следователно на всяка ненаредена редица $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2r}$ от различни чифтове може да се съпоставят 2^{2r} ненаредени редици от различни обувки, измежду които няма чифт. Но броят на тези редици от чифтове е $\binom{n}{2r}$. Съгласно правилото за умножение, броят на начините по които можем да изберем $2r$ обувки от n чифта, измежду които няма чифт е точно $2^{2r} \cdot \binom{n}{2r}$. От всички възможни извадки, които са C_{2n}^{2r} , отстраняваме извадките, при които няма нито един чифт обувки и получаваме $C_{2n}^{2r} - 2^{2r} \cdot \binom{n}{2r} = C_{2n}^{2r} - 2^{2r} \cdot C_n^{2r}$ (брой на случаите, в които измежду извадените обувки има поне един чифт).