

1997 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

1 зад. а/ Намерете неизвестното число x :

$$x + 12\text{км}750\text{м} - 8\text{км}260\text{м} = 21\text{км}700\text{м};$$

$$x : 2 - 3549 = 618 - 324;$$

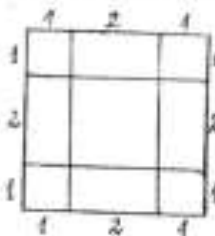
$$477 : (x - 3) = 808 - 799;$$

$$16673 - (7562 + 3 \cdot x) = 6321.$$

б/ Намерете най-малкото ^{цело} число x , за което е изпълнено:

$$199,5 - (3 \cdot x - 134) < 2,3 : 5 + 856 : 4$$

2 зад. На чертени се виждат квадрати и техните размери в сантиметри. Да се определи броят на всички квадрати и да се измери обиколът от лицата и обиколът от обиколите им:



3 зад. На земята поле от единия диагонал на шахматна дъска с размери 10x10 мм панела. На коня "хед" можем да пренесем едновременно две панела в по едно поле едновременно; не се разрешават никакви други премествания. Възможно ли е десетте панела да се подредят върху пай - долния ред на дъската?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 4 КЛАС

1 зад. а) $x = 17\text{ км } 310\text{ м}$; $x = 7686$; $x = 56$; $x = 330$.

б) Решаваме като равенство и получаваме $x = 295$.

За $x = 296, 297, \dots$ се получава, че е изпълнено условието.

За $x = 294, 293, \dots$ се получава, че не е изпълнено условието.

Следователно търсеното най-малко цяло число $x = 296$.

2 зад. На чертежа има четири квадрата, всеки от които е със страна 1 см и лице 1 кв.см, един квадрат в центъра със страна 2см и лице 4 кв.см, четири квадрата със страна 3 см и лице 9 кв.см и един квадрат със страна 4 см и лице 16 кв.см. Общият брой на квадратите е 10. Сборът от лицата им е $4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 60$ кв.см. Сборът от обиколките им е $4 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 1 \cdot 16 = 88$ см.

3.зад. Да приемем за единица разстоянието между центровете на две съседни полета. Най-долната пешка е в първия ред. Следващата трябва да се придвижи на разстояние 1, за да попадне там. Третата отдолу нагоре пешка трябва да измине разстояние 2 и т.н., пътят на десетата пешка е 9. Общото разстояние, на което трябва да се придвижат всички пешки е $0+1+2+3+\dots+9=45$ - **нечетно число**. От друга страна всеки разрешен ход увеличава изминатото до момента разстояние с 2, поради което след произволен брой ходове разстоянието е **четно** число. Следователно пешките не могат да се наредят върху най-долния ред на дъската.

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

1 зад. а) Да се пресметне:

$$\frac{\left(2,2 - \frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{3}{7} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} : \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) + 8\frac{9}{11} - \frac{\left(1,6 + \frac{11}{5}\right) \cdot \frac{1}{1,9} \cdot 4,3}{\left(\frac{12}{5} - 1,3\right) \cdot 4\frac{3}{10}}$$

б) Да се подредят по големина дробите:

$$\frac{100}{101}, \quad \frac{101}{102}, \quad \frac{999}{1000}, \quad \frac{1995}{1996}$$

2 зад. Цифрата на десетиците на едно двуцифрено число е два пъти по-голяма от цифрата на единиците му. Сборът на даденото число с числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, е равен на 99. Да се намери числото. Да се намерят делителите на това число. Кои от делителите са прости и кои са съставни числа?

б) Да се намерят всички трицифрени числа, които се делят на 9 и две от цифрите на които съвпадат с цифрите на намереното двуцифрено число от подточка а).

3 зад. Дължината на страната на един правоъгълник е 5 пъти по-голяма от страната на квадрата.

а) Намерете страната на квадрата, ако е известно, че лицата на двете фигури са равни.

б) Намерете страната на квадрата при условие, че лицето на правоъгълника е 3 пъти по-голямо от лицето на квадрата.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

1 зад. а)

$$2,2 - \frac{4}{5} = 2,2 - 0,8 = 1,4$$

$$5,2 - 2\frac{2}{5} = 5,2 - 2,4 = 2,8$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{12}{5} - 1,3 = 2,4 - 1,3 = 1,1$$

$$1,6 + \frac{11}{5} = 1,6 + 2,2 = 3,8$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1,4 \cdot \frac{10}{7}}{2,8 : \frac{3}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} : \frac{2}{6} + \frac{97}{11} - \frac{3,8 \cdot \frac{1}{1,9} \cdot 4,3}{1,1 \cdot \frac{43}{10}} = \\ &= \frac{2}{1,2} + \frac{1}{3} + 2 + \frac{97}{11} - \frac{8,6}{\frac{11}{10} \cdot \frac{43}{10}} = \\ &= 2 : \frac{12}{10} + 2\frac{1}{3} + \frac{97}{11} - \frac{86}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{10}{43} = \\ &\frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \frac{97}{11} - \frac{20}{11} = \frac{12}{3} + \frac{77}{11} = 4 + 7 = 11 \end{aligned}$$

б) Използваме, че:

$$\frac{100}{101} = 1 - \frac{1}{101}; \frac{101}{102} = 1 - \frac{1}{102}; \frac{999}{1000} = 1 - \frac{1}{1000}; \frac{1995}{1996} = 1 - \frac{1}{1996} \text{ и}$$

$$\frac{1}{101} > \frac{1}{102} > \frac{1}{1000} > \frac{1}{1996} \Rightarrow \frac{100}{101} < \frac{101}{102} < \frac{999}{1000} < \frac{1995}{1996}$$

2 зад. а) Ако x са единиците на търсеното число, то $2x$ са десетиците му и числото е $10.2x + x = 21x$. Числото записано със същите цифри, но в обратен ред, е равно на $10x + 2x = 12x$. Следователно $21x + 12x = 99$, откудето се получава, че $x = 3$. И така, търсеното число е 63. Делителите на числото 63 са числата: 1;3;7;9;21;63. От тях прости числа са 3 и 7, съставни са 9, 21 и 63.

б) Нека $\overline{abc}$ е трицифрено число (a е естествено число от 1 до 9, b и c са естествени числа от 0 до 9). Ако $9/\overline{abc} \Rightarrow 9/(100a + 10b + c) \Rightarrow 9/[(99a + 9b) + (a + b + c)]$, но $9/(99a + 9b) \Rightarrow 9/(a + b + c)$. Аналогично се доказва, че за да

се дели едно число на 9, трябва сумата от цифрите му да се дели на 9.

Две от цифрите му са 3 и 6. Нека трета цифра е у. Тогава $3+6+у$ трябва да се дели на 9, но тъй като $0 \leq у \leq 9$, то числото може да бъде само 0 или 9.

Търсените числа са: 306;360;369;396;603;630;639;693;936;963

3 зад. I-ви начин

$5.x.(x-20) = x.x$	$5.x.(x-20) = 3.x.x$	$x-20$	
$x.(5.(x-20)) = x.x$	$x.(5.(x-20)) = x.(3.x)$		
$\Rightarrow 5.(x-20) = x$	$\Rightarrow 5.(x-20) = 3.x$		$5x$
a) $\Rightarrow 5.x - 100 = x$	б) $\Rightarrow 5x - 100 = 3x$		
$\Rightarrow x + 100 = 5.x$	$\Rightarrow 3x + 100 = 5x$		x
$\Rightarrow 5.x - x = 100$	$\Rightarrow 5x - 3x = 100$		
$(5-1).x = 100$	$\Rightarrow (5-3).x = 100$		
$4.x = 100 \Rightarrow x = 25 \text{ см.}$	$2x = 100 \Rightarrow x = 50 \text{ см.}$		x

II-ви начин

a) $5.x.(x-20) = x.x \Rightarrow 5/x.x \Rightarrow 5/x; x > 20 \Rightarrow x = 25$

б) аналогично

ТЕМА ЗА 6 КЛАС

1 зад. а) Да се пресметне стойността на израза:

$$A = \frac{(1,88 + 2\frac{3}{25}) \cdot (-\frac{3}{16})}{0,625 - \frac{13,26}{18} \cdot \frac{26}{9}} + \frac{(\frac{0,216}{0,15} + 0,56)(-0,5)}{(7,7 : 24\frac{3}{4} + \frac{2}{15}) \cdot 4,5}$$

б) Да се намери абсолютната стойност и противоположното число на А. Напишете всички цели числа х, за които е вярно:

$$|A| < |x| < -A + 2.$$

2 зад. Сега моите години се отнасят към годините на брат ми както 3:5. След 5 години аз ще бъда на толкова години, на колкото беше брат ми преди 5 години. На колко години съм аз сега и на колко години е брат ми?

3 зад. Дадена е триъгълна пирамида с основа ABC и връх Д. Лицето на основата е $S \text{ cm}^2$, а височината на пирамидата е h. Нека М е средата на ръба АВ, точка N е от ръба ВС такава, че $BN:NC=2:1$, а точка Р е от ръба АС такава, че $AP:PC=3:1$.

Точка К е от ръба ВД и е на разстояние $\frac{h}{2}$ от равнината на основата. Да се намери отношението на обемите на пирамидите АВСД и АМНРК.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

1 зад. а)

$$1,88 + 2 \frac{3}{25} = \frac{188}{100} + \frac{53}{25} = \frac{47}{25} + \frac{53}{25} = \frac{100}{25} = 4$$

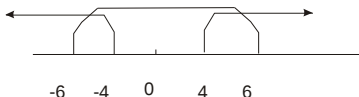
$$\frac{13}{18} : \frac{26}{9} = \frac{13 \cdot 9}{18 \cdot 26} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{0,216}{0,15} + 0,56 = \frac{216}{150} + \frac{56}{100} = \frac{36}{25} + \frac{14}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

$$7,7 : 24 \frac{3}{4} = \frac{77}{10} : \frac{99}{4} = \frac{77 \cdot 4}{10 \cdot 99} = \frac{14}{45}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{4 \left(-\frac{3}{16} \right)}{0,625 - 0,25} + \frac{2 : \left(-\frac{5}{10} \right)}{\left(\frac{14}{45} + \frac{2}{15} \right) \cdot \frac{45}{10}} = \\ &= \frac{-\frac{3}{4}}{0,375} + \frac{-4}{\frac{20}{45} \cdot \frac{45}{10}} = \\ &= \left(-\frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1000}{375} + (-2) = -\frac{250}{125} + (-2) = -4 \end{aligned}$$

$$б) |A| = |-4| = 4; -A = -(-4) = 4$$



$$x = ? (x \in \mathbb{Z}), \text{ ако } 4 < |x| < 6 \Rightarrow x = -5; 5$$

2 зад. x – години на лицето ($x \in \mathbb{N}$); y – години на брата ($y \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow y - 5 = x + 5 \Rightarrow (x + 5) + 5 = y, \text{ но по условие}$$

$$x + 10 = y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x}{x+10} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 \cdot x = 3 \cdot (x+10)$$

$$5x = 3x + 30 \Rightarrow 30 = 5x - 3x \Rightarrow 30 = 2x \Rightarrow x = 15 \text{ години}$$

$$y = x + 10 \Rightarrow y = 15 + 10 = 25 \text{ години}$$

3. зад.

$$V_1 = V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h$$

$$V_2 = V_{AMNPK} = \frac{1}{3} S_{AMNP} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{AMNPK}} = \frac{\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot S_{AMNP} \cdot \frac{h}{2}} \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{AMNPK}} = (S_{\triangle ABC} \cdot h) : \left(S_{AMNP} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot h \cdot 2}{S_{AMNP} \cdot h}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2 \cdot S}{S_{AMNP}} = ?$$

$$S_{AMNP} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle ANP}$$

$$\text{От } AM=MB \text{ и } \frac{BN}{NC} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \right) = \frac{1}{3} S$$

$$\text{От } \frac{AP}{PC} = \frac{3}{1} \text{ и } \frac{CN}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\triangle ANP} = \frac{3}{4} S_{\triangle ANC} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \right) = \frac{1}{4} S$$

$$\text{От горенаписаното} \Rightarrow S_{AMNP} = \frac{1}{3} S + \frac{1}{4} S = \frac{7}{12} S$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2S}{\frac{7}{12} S} = 2S : \left(\frac{7}{12} S \right) = \frac{2S \cdot 12}{7 \cdot S} = \frac{24}{7}$$

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

1 зад. Дадени са многочлените

$$M = x^3 - x^2 - 4x + 4 \text{ и } N = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Да се разложат M и N на множители от първа степен.

б) Да се реши уравнението $M+N=0$.

2 зад. В ромба ABCD ъгъл BAD е равен на 60° , а права l пресича страните му AD и DC съответно в точките M и N така, че $DM+DN=AB$. Да се докаже, че:

$$\angle ABM = \angle DBN \text{ и } \angle DBM = \angle CBN;$$

Триъгълникът BMN е равнобедрен.

$BM_1 + BN_1 = \frac{3}{2} AB$, където M_1 и N_1 са петите на перпендикулярите, спуснати съответно от M към AB и от N към BC.

3 зад. Трима братя трябвало да разделят помежду си някаква сума пари. Един от тях предложил да ги разделят в

отношение 7:6:5, каквото било отношението на годините им. Друг предложил да делят в отношение 6:5:4 /отношението на ръста им/. При две разпределения редът на братята се запазва, но един от тях при второто разпределение ще получи 120 лв. повече, отколкото при първата разпределение. Колко лева е трябвало да разпределят помежду си братята и по колко лева би получил всеки при второто разпределение?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

1 зад. а)

$$N = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

$$M = x^3 + 3x^2 - 4 = (x^3 - 1) + (3x^2 - 3) = (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)(x+1) =$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1 + 3x + 3) = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2$$

б)

$$M + N = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+2) + (x-1)(x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-2+x+2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \cup x = 1 \cup x = -2$$

2 зад. От ABCD – ромб, $\Rightarrow AB = BC = CD = AD$

$\triangle ABD$ – равнобедрен ($AD = AB$) и $\angle BAD = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ – равностранен

$\angle CDB = \angle ABD = 60^\circ$ (кръстни ъгли)

$\angle ADB = \angle CBD = 60^\circ$ (кръстни ъгли)

$\Rightarrow \angle DCB = 60^\circ$ и

$\triangle DBC$ – равностранен

$AM + MD = AD = AB$ и

$DM + DN = AB$

$\Rightarrow AM = DN$ аналогично

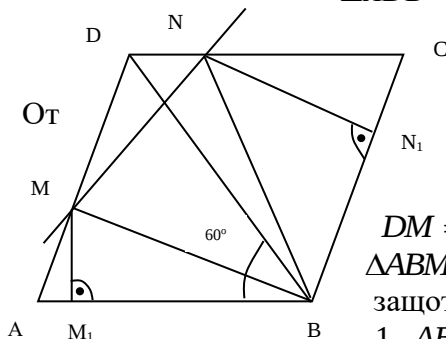
$DM = CN$

$\triangle ABM \cong \triangle DBN$ (по първи признак),

защото:

1. $AB = DB$;

2. $\angle MAB = \angle NDB = 60^\circ$; 3. $AM = DN$



$$\Rightarrow \angle ABM = \angle DBN \text{ (съответни ъгли) } *$$

Аналогично $\triangle DMB \cong \triangle CNB$ (по първи признак), защото:

$$1. MD = NC; 2. \angle MDB = \angle NCB = 60^\circ; 3. DB = BC$$

$$\Rightarrow MB = NB^{**} \text{ и } \angle MBD = \angle NBC \text{ (съответни ъгли) или}$$

$$\angle MBD = \angle ABD - \angle ABM = 60^\circ - \angle ABM =$$

$$= \angle DBC - \angle DBN = \angle NBC$$

$$\angle ABM + \angle MBD = \angle ABD = 60^\circ = \angle DBN + \angle MBD = \angle MBN$$

$$*, ** \Rightarrow \triangle MBN - \text{равнобедрен} (MB = BN); \angle MBN = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MBN - \text{равностранен}$$

От $\triangle AM_1M$ – правоъгълен с остър

$$\angle AMM_1 = 30^\circ \Rightarrow AM_1 = \frac{AM}{2}$$

$$\text{От } \triangle CN_1N - \text{правоъгълен с остър } \angle CNN_1 = 30^\circ \Rightarrow CN_1 = \frac{CN}{2}$$

$$\Rightarrow BM_1 = AB - AM_1 = AB - \frac{AM}{2}; BN_1 = BC - CN_1 = AB - \frac{CN}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM_1 + BN_1 = AB - \frac{AM}{2} + AB - \frac{CN}{2} = 2 \cdot AB - \frac{AM + CN}{2} =$$

$$= 2 \cdot AB - \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} AB$$

3 зад. x – общата сума ($x > 0$)

$$\text{I дел.: I-}7k; \text{ II-}6k; \text{ III-}5k(\text{лв.}) \Rightarrow 7k + 6k + 5k = x(\text{лв.}) \Rightarrow 18k = x$$

$$\text{II дел.: I-}6l; \text{ II-}5l; \text{ III-}4l(\text{лв.})$$

$$\Rightarrow 6l + 5l + 4l = x(\text{лв.}) \Rightarrow 15l = x \Rightarrow 18k = 15l \Rightarrow l = \frac{18k}{15} = \frac{6k}{5} \Rightarrow$$

$$\text{II дел.: I-}6 \cdot \frac{6k}{5}; \text{ II-}5 \cdot \frac{6k}{5}; \text{ III-}4 \cdot \frac{6k}{5}(\text{лв.}) \Rightarrow \frac{36}{5}k - 7k = 120 \Rightarrow \frac{1}{5}k = 120$$

$$\Rightarrow k = 120 : \frac{1}{5} = 120 \cdot 5 = 600 \Rightarrow x = 18 \cdot 600 = 10800 \text{ лв.}$$

$$\text{При II дел.: Iбр.- } \frac{36}{5} \cdot 600 = 4320(\text{лв.}); \text{ IIбр.- } 6 \cdot 600 = 3600(\text{лв.});$$

$$\text{IIIбр.- } \frac{24}{5} \cdot 600 = 2880(\text{лв.})$$

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

1 зад. а) Да се реши неравенството $(a-b)^2 \cdot x < (b-a)^3$, където a и b са параметри.

б) Да се провери дали числото $c = (\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$

е решение на неравенството $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \cdot x < (5\sqrt{2} + 1) \cdot (1 - 5\sqrt{2})$

в) Да се реши уравнението $\left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$.

г) Да се реши уравнението $\sqrt{2}x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

2 зад. Даден е триъгълник ABC и права l . Да се намери разстоянието от медицентъра на триъгълника до l , ако разстоянията от A, B и C до нея са съответно a , b и c .

3 зад. Да се намерят всички цели числа n , за които $n^4 + 1$ се дели на $n + 1$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

1 зад. а) $(a-b)^2 \cdot x < (b-a)^3 \Leftrightarrow (b-a)^2 \cdot x < (b-a)^3$. При

$(b-a)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq b \Rightarrow x < b-a$, при $(b-a)^2 = 0 \Leftrightarrow b = a \Rightarrow$ неравенството е от вида $0 \cdot x < 0$ и няма решение.

б) $c = 21$ не е решение, защото неравенството е от вида $0 \cdot x < -49$ и няма решение.

в) I нач.

$$\left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x - \frac{8}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \text{ или } x - \frac{4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

II *нач.*

$$\left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x - \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ или } x - \frac{5}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow x = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ или } x = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{III } \text{нач.} \left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}.x^2 - 5.x + 2\sqrt{2} = 0 \\ a = \sqrt{2}; b = -5; c = 2\sqrt{2} \Rightarrow D = 25 - 16 = 9 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, x_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{г) } \sqrt{2}.x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}.x^3 + (\sqrt{2})^4 - 3x^2 - 3\sqrt{2}.x = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\left(x^3 + (\sqrt{2})^3\right) - 3x(x + \sqrt{2}) &= \sqrt{2}(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}.x + 2) - 3x(x + \sqrt{2}) = \\ &= (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}.x^2 - 2x + 2\sqrt{2} - 3x) = (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}.x^2 - 5x + 2\sqrt{2}) = \\ &= (x + \sqrt{2})(\sqrt{2}.x^2 - 4x - x + 2\sqrt{2}) = (x + \sqrt{2})\left[\sqrt{2}.x^2 - (\sqrt{2})^4.x - (x - 2\sqrt{2})\right] = \\ &= (x + \sqrt{2})\left[\sqrt{2}.x(x - (\sqrt{2})^3) - (x - 2\sqrt{2})\right] = (x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(\sqrt{2}.x - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})(\sqrt{2}.x - 1) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{2} = 0 \text{ или } x - 2\sqrt{2} = 0 \text{ или } \sqrt{2}.x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ или } x = 2\sqrt{2} \text{ или } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* уравнението може да се реши и по друг начин.

2 зад.

G – медицентър $GG_1 \perp l, GG_1 = x (x > 0)$

$AA_1 \perp l, BB_1 \perp l, CC_1 \perp l$

1 случай: l не пресича AB, BC, AC

$M = AG \cap BC, MM_1 \perp l$

$O \in AG, AO = OG \Rightarrow AO = OG = GM$

$OO_1 \perp l$

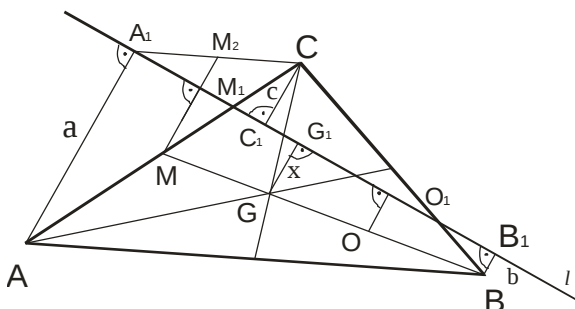
MM_1 – средна отсечка в трапеца $BB_1C_1C \Rightarrow MM_1 = \frac{c+b}{2}$

OO_1 – средна отсечка в трапеца $AGG_1A_1 \Rightarrow OO_1 = \frac{a+x}{2}$

GG_1 – средна отсечка в трапеца $OMM_1O_1 \Rightarrow 2GG_1 = OO_1 + MM_1$

$$\Rightarrow 2x = \frac{a+x}{2} + \frac{c+b}{2} \Rightarrow x = \frac{a+b+c}{3}$$

2 случай: l пресича две от страните на $\triangle ABC$, например AC и BC



$$BG \cap AC = M, MM_1 \perp l$$

$$O \in BG \text{ и } BO = OG \Rightarrow BO = OG = GM$$

$$OO_1 \perp l$$

$$OO_1 \text{ – средна отсечка в трапеца } BB_1G_1G \Rightarrow OO_1 = \frac{x+b}{2}$$

$$MM_2 \text{ – средна отсечка в } \triangle ACA_1 \Rightarrow MM_2 = \frac{a}{2}$$

$$M_1M_2 \text{ – средна отсечка в } \triangle A_1C_1C \Rightarrow M_1M_2 = \frac{c}{2}$$

$$GG_1 \text{ – средна отсечка в трапеца } MOO_1M_1$$

$$2GG_1 = OO_1 + MM_1 \Rightarrow 2GG_1 = (MM_2 - M_1M_2) + OO_1$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{x+b}{2} \Rightarrow x = \frac{a+b-c}{3}$$

Аналогично се доказва, че $x = \frac{a+c-b}{3}$, ако l пресича AB и BC

и $x = \frac{b+c-a}{3}$, ако пресича AB и AC .

3 зад.

$$n^4 + 1 = (n^2 - 1)^2 + 2(n^2 - 1) + 2 = [(n-1)(n+1)]^2 + 2(n-1)(n+1) + 2 =$$

$$= (n-1)^2(n+1)^2 + 2(n-1)(n+1) + 2 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$(n+1)(n^4 + 1) \Rightarrow (n+1)/2 \Rightarrow n+1=1 \text{ или } n+1=-1 \text{ или } n+1=2 \text{ или } n+1=-2$$

$$\Rightarrow n = 0; -2; -3$$

ТЕМА ЗА 9 КЛАС

1 зад. Дадена е системата:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 14 \\ x^2 + y^2 = 2(1+a) \end{cases}$$

x, y – неизвестни; a – реален параметър/. Да се намерят:

решенията на системата при $a = \frac{5}{2}$;

б) стойностите на реалния параметър a , при които системата има точно две решения.

2 зад. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катети AC и BC . Точка M е среда на катета BC . Окръжност k , минаваща през точките A и M се допира да описаната около триъгълник ABC окръжност. Окръжността k пресича правата BC освен в точка M и в точка N . Да се докаже, че правата AN минава през средата на височината CH на триъгълника ABC .

3 зад. От нечетните числа са образувани групите (1) , $(3,5)$, $(7,9,11)$,....., като n -тата група има n члена. Да се намери сумата от членовете в k -тата група.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 КЛАС

1зад. а).

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 14 \\ x^2 + y^2 = 2\left(1 + \frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} * x+y = \sqrt{14} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} ** x+y = -\sqrt{14} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$$

*

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{14} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{14} - x \\ x^2 + (\sqrt{14} - x)^2 = 7 \end{cases} \quad 2x^2 - 2\sqrt{14}x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \\ = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \sqrt{14} - \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

**

$$\begin{cases} x+y = -\sqrt{14} \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{14} - x \\ x^2 + (-\sqrt{14} - x)^2 = 7 \end{cases} \quad 2x^2 + 2\sqrt{14}x + 7 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \\ = -\frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow y_{3,4} = -\sqrt{14} + \frac{\sqrt{14}}{2} = -\frac{\sqrt{14}}{2} = -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

решенията са: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

б) Нека a – търсената стойност на параметъра и (x_0, y_0) – решения на системата $\Rightarrow (-x_0, -y_0), (-y_0, -x_0), (y_0, x_0)$ са също решения на системата. $(x_0, y_0) \neq (-x_0, -y_0)$, в противен

случай $x_0 = y_0 = 0$ и (x_0, y_0) не удовлетворява първото уравнение на системата. $(x_0, y_0) \neq (-y_0, -x_0)$, в противен

случай $x_0 = y_0 = 0$, а трябва $(x_0 + y_0)^2 = 14$ По условие системата има точно две решения $\Rightarrow (-x_0, -y_0) \equiv (-y_0, -x_0) \Rightarrow y_0 = x_0$

$$\Rightarrow (x_0 + x_0)^2 = 14 \Rightarrow 4x_0^2 = 14 \Rightarrow x_0' = \sqrt{\frac{7}{2}}, x_0'' = -\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow \text{ако}$$

при дадено a (x_0, y_0) е решение на системата, то или

$$x_0 = y_0 = \sqrt{\frac{7}{2}}, \text{ или } x_0 = y_0 = -\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

$1 + \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{2} - 1 \right) \cdot 2 = 1 + \kappa^2 - \kappa - 2 = \kappa^2 - \kappa - 1$ (формула за общ член на аритметична прогресия)

Тогава първото нечетно число $k^{тава}$ група е $(\kappa^2 - \kappa - 1) + 2$, т.е. имаме следните k на брой числа $(\kappa^2 - \kappa - 1) + 2.1; (\kappa^2 - \kappa - 1) + 2.2; \dots; (\kappa^2 - \kappa - 1) + 2.k; \Rightarrow$

$$S_k = \frac{(\kappa^2 - \kappa - 1) + 2.1 + (\kappa^2 - \kappa - 1) + 2.k}{2} \cdot k = \frac{(k^2 - k + 1 + k^2 + k - 1)}{2} \cdot k = k^3$$

ТЕМА ЗА 10 КЛАС

1 зад. Дадено е уравнението $\sin 2x = 1 + p \sin x - \cos 2x$ с неизвестно $x \in [0; \pi]$ и параметър p . Да се намерят:

решенията на уравнението при $p = \sqrt{2}$. Броят на решенията на уравнението в зависимост от стойността на p .

2 зад. За ъглите α, β, γ на триъгълник е в сила зависимостта $2 \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = 1$. Да се намери лицето му по дадени γ и параметър $2p$.

3 зад. Да се намерят всички цели стойности на m , за които числото $7m^2 + 10m - 8$ е квадрат на цяло число.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

1 зад. Тъй като $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, уравнението е еквивалентно на $\sin x(p + 2 \sin x - 2 \cos x) = 0$

б) За всяка стойност на p уравнението $\sin x = 0$ има два корена в посочения интервал. Уравнението $p + 2 \sin x - 2 \cos x = 0$ е еквивалентно на $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{p\sqrt{2}}{4}$ и има корени в $[0, \pi]$ само ако

$$-1 \leq \frac{p\sqrt{2}}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p \in [-2\sqrt{2}; 2]. \text{ При } p \in [-2\sqrt{2}; 2] \text{ уравнението има}$$

два корена $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а при $p \in [-2; 2]$ - един корен в $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$p \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2; +\infty) - \text{два корена},$$

$$\text{Окончательно получаем: } p \in [-2\sqrt{2}; -2] - \text{четыре корена},$$

$$p \in (-2; 2] - \text{три корена},$$

а) при $p = \sqrt{2}$ уравнению има три корена $0, \frac{\pi}{12}$ и π

2 зад.

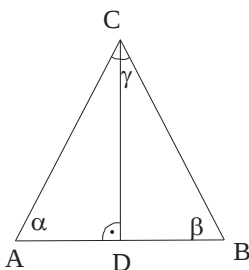
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos [180^\circ - (\alpha + \beta)] = 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi \Rightarrow \alpha - \beta \in (-\pi, \pi) \Rightarrow$$

$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow AC = BC = b = a.$$



$$\text{Нека } AB = c, CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AD = DB = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \\ \angle ACD = \angle BCD = \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin \gamma, b = ?$$

$$\triangle ADC - \text{правоъгълн}, \frac{AD}{AC} = \sin \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\frac{c}{2}}{b} = \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ но } AD + AC = p, \text{ т.е. } \frac{c}{2} + b = p \Rightarrow$$

$$\frac{c}{2} = p - b \Rightarrow \frac{p - b}{b} = \sin \frac{\gamma}{2} \Rightarrow p - b = b \sin \frac{\gamma}{2} \Rightarrow p = b \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \Rightarrow b = \frac{p}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{p}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \gamma = \frac{p^2 \sin \gamma}{2 \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2}$$

3 зад. Да допуснем, че m е цяло число, а $7m^2 + 10m - 8 = (7m - 4)(m + 2)$ е точен квадрат. Възможни са два случая:

$$I \text{ сл.: } 7m-4=(m+2).t^2 \ (t \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{7m-4}{m+2} = 7 - \frac{18}{m+2} \Rightarrow m+2 = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18; \text{ са}$$

стойностите на знаменателя в дясно, при което

частното $\frac{18}{m+2}$ е цяло. От тях до точен квадрат за

$$7 - \frac{18}{m+2} \text{ водят само } m = -11; -4; -3; 1; 4.$$

II. сл.:

$$m+2 = (7m-4)p^2, (p \in \mathbb{Z}) \Rightarrow p^2 = \frac{m+2}{7m-4}; 7p^2 = 1 + \frac{18}{7m-4}$$

$$(7m-4)/18 \Rightarrow 7m-4 = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18. \text{ С проверка за кои}$$

от съответните стойности на m получаваме $\frac{m+2}{7m-4}$ точен квадрат, намираме още и $m=-2$.

ТЕМА ЗА 11 и 12 КЛАС

1 зад. Дадена е функцията $f(x) = \frac{2^x + 2^{1-x} - 3}{2^{x+1} - 4^x}$. Да се намери:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \quad в) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

2 зад. Даден е триъгълник ABC с остър ъгъл ABC равен на φ и ъгъл BCA равен на 2φ . Точката М е обща за страната АВ и окръжността, минаваща през върховете А, С и центъра на описаната около триъгълника окръжност. Да се изразят чрез φ :

а) големината на ъгъл АСМ; б) отношението АМ:АВ.

3 зад. В правилна четириъгълна пирамида ъгълът между два съседни околни ръба е равен на ъгъла между околени ръб и равнината на основата. Да се намерят:

синусът на ъгъла между два съседни околни ръба;

б) обемът на пирамидата, ако дължината на основния ръб е а.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 И 12 КЛАС.

1 зад.
$$f(x) = \frac{(2^x + 2^{1-x} - 3) \cdot 2^x}{(2^{x+1} - 4^x) \cdot 2^x} = \frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2}{4^x(2 - 2^x)} = \frac{(2^x - 1)(2^x - 2)}{4^x(2 - 2^x)} = \frac{1 - 2^x}{4^x}$$

а) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{4^x} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0 - 0 = 0$

в) числителят клони към 1, а знаменателя към 0, при това

$f(x) > 0$ (при съответно поведение на x), т.е. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2 зад. а) Тъй като $3\varphi < 180^\circ \Rightarrow \varphi < 60^\circ$

$\angle AOC = 2\varphi$ (централен ъгъл)

$M \in AB$, (доказва се, че случаят, когато $M \notin AB$ не е възможен)

$\Rightarrow \angle AMC = 2\varphi$ (ГМТ),

но $\angle AMC = \angle MBC + \angle MCB$

$\Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \varphi \Rightarrow \angle ACM = \varphi$

и CM – ъглополовяща на $\angle ACB$

б) $\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM + MB} = \frac{1}{1 + \frac{BM}{AM}}$. Но от основното свойство на

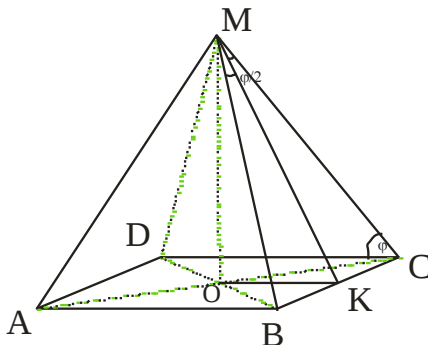
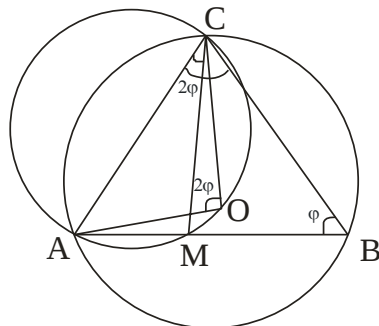
ъглополовящата и синусовата теорема следва, че

$$\frac{BM}{AM} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin(180^\circ - 3\varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} = 4 \cos^2 \varphi - 1$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4 \cos^2 \varphi}$$

3 зад. Нека $MABCD$ е правоъгълна четириъгълна пирамида с основа квадрата $ABCD$, т.е O е ортогонална проекция на т. M в/у равнината на $ABCD$, а т. K е средата на BC

а) Тъй като пирамидата



е правилна, имаме

$$\frac{CO}{CM} = \cos \varphi, \frac{CK}{CM} = \sin \frac{\varphi}{2} \text{ и } CO = \frac{\sqrt{2}}{2} CK \Rightarrow \varphi \text{ е}$$

корен на уравнението $\sqrt{2} \cos \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$. Полагаме $\sin \frac{\varphi}{2} = t$

$$\text{От } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow 2t^2 + \sqrt{2}t - 1 = 0. \text{ То има единствен корен в}$$

интервала $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} = \sin \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ а } \sin \varphi = \sqrt{1-\cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot MO = \frac{1}{3} a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} a^3 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$