

1998 ГОДИНА

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

зад. 1. Да се намерят числата **а**, **в** и **с**, ако:

$a = (42\,444 : 2 - 6\,073 \cdot 3) : 3$; $b = (250 \cdot 4 - 666) \cdot 3$; $111\,111 - c = 110\,112$. Да се сравнят получените числа по големина. Кое число трябва да се прибави към **с**, за да се получи сборът на **а** и **в**? Намерете неизвестното число **Х** от равенството:

$(1 + X) + (3 + X) + (5 + X) + (7 + X) + \dots + (97 + X) + (99 + X) = 2\,550$ (*с многоточие са означени пропуснатите числа от същия вид*).

зад. 2. Дадени са 4 клечки с дължина 5 см и 6 клечки с дължина 3 см. Може ли /без да се чупят клечките/ с тях да се построят следните фигури:

а) квадрат?

б) правоъгълници и да се определи кой от правоъгълниците има най-малко и кой – най-голямо лице?

зад. 3. Ако **А**, **С**, **Д** и **М** са естествени числа и $C + D = 245$, $2A + M = 2\,170$, $C + M = 1\,770$, $A + 2D = 735$, да се изчисли тяхната сума $A + C + D + M$.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 4 КЛАС

зад. 1. $a = 1001$; $b = 1002$; $c = 999 \Rightarrow c < a < b$

$x + c = a + b \Rightarrow x + 999 = 1001 + 1002 \Rightarrow x = 1004$

$(1 + X) + (3 + X) + (5 + X) + (7 + X) + \dots + (97 + X) + (99 + X) = 2550$

$(1 + 3 + \dots + 97 + 99) + (X + X + \dots + X) = 2550$

$(1 + 99) \cdot 25 + 50 \cdot X = 2550 \Rightarrow 50 \cdot X = 50 \Rightarrow X = 1$

зад. 2. а) $4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 38$, а 38 не се дели на 4 без остатък $\Rightarrow$ не може да се построи квадрат;

б) Може да се построят следните правоъгълници:

1) $a = 3+3+3$ и $b = 5+5 \Rightarrow S = 90$ кв.см;

2) $a = 3+3$ и $b = 5+5+3 \Rightarrow S = 78$ кв.см;

3) $a = 3$ и $b = 5+5+3+3 \Rightarrow S = 48$ кв.см;

4) $a = 3+3+3+5$ и $b = 5 \Rightarrow S = 70$ кв.см;

Следователно, $S_{\max} = 90$ кв.см; $S_{\min} = 48$ кв.см

зад. 3. Ако умножим $C + M = 1770$ с 2 и съберем почленно равенствата, се получава

$$3A + 3C + 3Д + 3M = 6690 \Rightarrow A + C + Д + M = 6690 : 3 \Rightarrow A + C + Д + M = 2230$$

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

зад. 1. а) Колко % от израза А е изразът В, където:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{26}{2 + 1,1 \cdot 10}}; B = \frac{(1^4 + \frac{1}{4}) \cdot (3^4 + \frac{1}{4}) \cdot (5^4 + \frac{1}{4}) \cdot (7^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4}) \cdot (4^4 + \frac{1}{4}) \cdot (6^4 + \frac{1}{4}) \cdot (8^4 + \frac{1}{4})}$$

б) Да се докаже, че

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$$

(с многоточие са означени пропуснатите дроби от същия вид).

зад. 2. От квадратна пластинка е отрязана правоъгълна ивица с ширина 4 см. От останалата част е отрязана още една правоъгълна ивица с ширина 6 см. В резултат на това се получила правоъгълна пластинка с обиколка 60 см. Да се намери страната на квадратната пластинка и лицето на правоъгълната пластинка.

зад.3. Имаме три съда с вместимост съответно 10 литра, 7 литра и 3 литра. Най-големият съд е пълен с течност. Как с помощта само на тези три съда течността може да се раздели на две части?

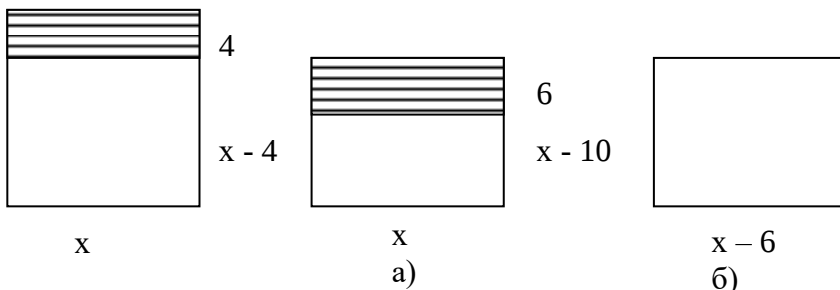
РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

зад.1. а) $A = 1; B = \frac{1}{145} \Rightarrow \frac{20}{29} \% \text{ от } A = B.$

б)

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = 100 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2}$$

Зад.2. Означаваме с x страната на квадратната пластинка. След отрязване на правоъгълна ивица с ширина 4 см е останала правоъгълна пластинка със страни x см и $(x - 4)$ см. Сега за отрязване на втората правоъгълна ивица с ширина 6 см са възможни два случая:



1) Правоъгълната ивица с ширина 6 см се отрязва, както е показано на черт.а). Останалата пластинка има форма на правоъгълник със страни x см и $(x - 10)$ см. $\Rightarrow x > 10$ см и

$x + x - 10 = 60 : 2 \Rightarrow x = 20$ см ($20 > 10$). Правоъгълната пластинка има страни 20 см и 10 см и лице $20 \cdot 10 = 200$ кв.см.

2) Правоъгълната ивица с ширина 6 см се отрязва, както е показано на черт.б). Останалата пластинка има форма на правоъгълник със страни $(x - 4)$ см и $(x - 6)$ см. $\Rightarrow x - 4 + x - 6 = 60 : 2 \Rightarrow x = 20$ см ($20 > 10$). Правоъгълната пластинка има страни 16 см и 14 см и лице $16 \cdot 14 = 224$ кв.см.

зад. 3. Количеството вода в трите съда в даден момент означаваме (a ; v ; c), като a , v , c са цели числа и $0 \leq a \leq 10$; $0 \leq v \leq 7$; $0 \leq c \leq 3$. Съответните преливания са: (10, 0, 0); (3, 7, 0); (3, 4, 3); (6, 4, 0); (6, 1, 3); (9, 1, 0); (9, 0, 1); (2, 7, 1); (2, 5, 3); (5, 5, 0) или (10, 0, 0); (7, 0, 3); (7, 3, 0); (4, 3, 3); (4, 6, 0); (1, 6, 3); (1, 7, 2); (8, 0, 2); (8, 2, 0); (5, 2, 3); (5, 5, 0).

ТЕМА ЗА 6 КЛАС

зад. 1. Да се изчисли частното на A и B , ако

$$A = (1,88 + 2\frac{3}{25})(-\frac{3}{16}) + (-\frac{0,216}{0,4} + 0,46)(-\frac{1}{4});$$

$$B = 0,3275 - (2\frac{15}{88} + \frac{4}{33}) \cdot \frac{9}{110} - \frac{81}{400}$$

Да се намери стойността на израза

$$|||a| - 2a| + 3a| - 4a| \text{ за } a = \frac{1}{1998} \text{ и } a = -1\frac{1}{4}$$

зад. 2. Лицето на успоредника ABCD е 42 кв.см, а точките М и Р са среди съответно на страните му АВ и ВС. Намерете лицата на триъгълниците АВР и ВСМ.

а) Ако О е пресечната точка на АР и СМ, докажете че лицата на триъгълниците АМО и СРО са равни.

б) Ако разстоянията от точка О до страните АВ и ВС са равни, докажете че успоредникът ABCD е ромб.

зад. 3. Да се намери броя на нулите, с които завършва произведението $1.2.3.4.5.....98.99.100$.

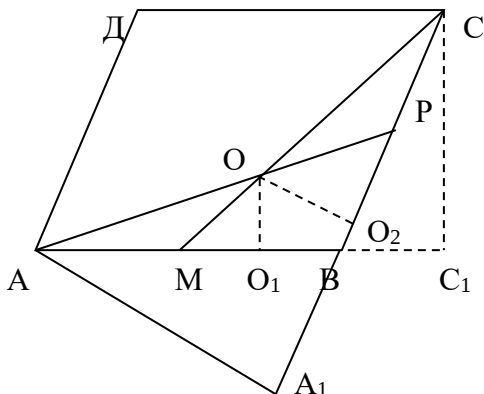
РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

зад. 1. $A = -1$; $B = -\frac{1}{16}$; $\frac{A}{B} = 16$;

$$|||a| - 2a| + 3a| - 4a| = 0 \text{ за } a = \frac{1}{1998}$$

$$|||a| - 2a| + 3a| - 4a| = 5 \text{ за } a = -1\frac{1}{4}$$

зад. 2.



$$S_{ABP} = \frac{BP \cdot AA_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AA_1 = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABP} = \frac{42}{4} = 10,5 \text{ cm}^2$$

$$S_{BCM} = \frac{1}{2} MB \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot CC_1 = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow S_{BCM} = \frac{42}{4} = 10,5 \text{ cm}^2$$

$$S_{AMO} = S_{ABP} - S_{MBPO} = S_{BCM} - S_{MBPO} = S_{CPO};$$

$$\text{б) } S_{AMO} = \frac{1}{2} AM \cdot OO_1; S_{CPO} = \frac{1}{2} CP \cdot OO_2; S_{AMO} = S_{CPO}; OO_1 =$$

$$OO_2 \Rightarrow AM = CP, \text{ но}$$

$$AM = \frac{AB}{2}; CP = \frac{CB}{2} \Rightarrow AB = CB \Rightarrow \text{ABCD е ромб.}$$

зад. 3. Броят на нулите, с които завършва това произведение, е равен на сбора от броя на петиците, които се срещат в разлагането на всеки множител. От всеки 5 последователни числа има точно едно, което се дели на 5. Като разделим числата от 1 до 100 на $100:5 = 20$ групи от по 5 последователни числа, забелязваме, че има точно 20 числа, които се делят на 5. Но числата 25, 50, 75 и 100 се делят на $25 = 5 \cdot 5$. Затова броят на нулите, с които завършва разглежданото произведение, е равен на $20 + 4 = 24$.

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

зад. 1. Да се пресметне:

$$\text{а) } \frac{(2 \cdot 3)^2 \cdot (-1)^{2n} - (-2)^3 \cdot (-1)^{2n+1}}{-2^4 - 2 \cdot (-1)^{2n-1}}; \text{ б) } (a^{n+1} - \frac{1}{3}b^3)^3.$$

Да се докаже, че $31^{11} < 17^{14}$.

Да се намери за коя стойност на n частното от делението на числата $3^{997} + 3^{1330} + 3^{1662} + 3^{n-4}$ и 3 е точен куб.

зад. 2. Даден четириъгълникът ABCD, за който $AB \parallel CD$, $AB > CD$ и $\angle B = \angle C = 90^\circ$. Ъглополовящата на $\angle BAD$ минава през средата M на страната BC. През точката M е построена права, перпендикулярна на AD, която пресича страната AD във вътрешната точка P. Да се докаже, че: а) $MP = MC$; б) AM и DM са симетралите съответно на отсечките BP и CP; в) $AD = AB + CD$; г) триъгълниците AМD и BPC са правоъгълни; д) $BP \parallel MD$ и $AM \parallel PC$.

зад.3. а) Три неделни дни в един месец са четни дати. Какъв ден от седмицата е датата 20-ти от този месец?

б) В една година през март имало 5 понеделника и 5 сряди. Какъв ден от седмицата е бил 3 март?

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

зад. 1. а) -2; б)

$$(a^{n+1} - \frac{1}{3}b^3)^3 = a^{3n+3} - a^{2n+2} \cdot b^3 + \frac{1}{3}a^{n+1} \cdot b^6 - \frac{1}{27}b^9$$

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}; 17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56} \Rightarrow 31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14};$$

$$(3^{997} + 3^{1330} + 3^{1662} + 3^{n-4}) : 3 = 3^{996} + 3^{1329} + 3^{1661} + 3^{n-5} = 3^{996} \cdot (1 + 3 \cdot 3^{332} + 3 \cdot (3^{332})^2 + 3^{n-1001}) \Rightarrow n-1001 = 3 \cdot 332 \Rightarrow n = 1001 + 996 \Rightarrow n = 1997$$

зад. 2. а) т.М лежи на ъглополовящата на $\angle BAD \Rightarrow MB = PM$, но $BM = CM \Rightarrow PM = CM$;

б) $MP = MB$ и $AB = AP \Rightarrow AM$ е симетрала на PB ; $MC = MP$, $MP \perp AD$, $MC \perp DC \Rightarrow$ т.М лежи на ъглополовящата на $\angle CDA$, т.е. $\angle CDM = \angle PDM \Rightarrow \triangle PMD \cong \triangle CMD \Rightarrow DC = DP \Rightarrow MD$ е симетралата на PC ;

в) $AD = AP + PD = AB + DC$;

г) AM и DM са ъглополовящите на прилежащите на бедрото AD ъгли $\Rightarrow \angle AMD = 90^\circ \Rightarrow \triangle AMD$ е правоъгълен.

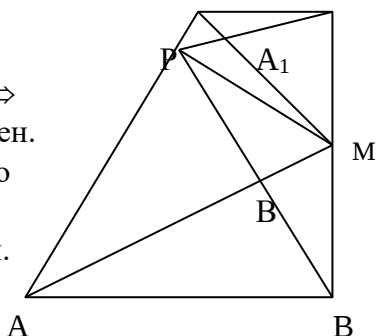
Ако $AM \cap PB = T.B_1$; $DM \cap PC = T.A_1$, то

B_1MA_1P е правоъгълник $\Rightarrow$

$\angle BPC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BCP$ е правоъгълен.

д) B_1MA_1P е правоъгълник $\Rightarrow$

$BP \parallel MD$ и $AM \parallel PC$.



зад.3. а) Две последователни недели могат да бъдат на дати с различни четност и от условието следва, че неделите в месеца са 5; първата четна неделя е задължително на 2-ро число; втората – на 16-то число и третата на 30-то число $\Rightarrow$ датата 20 е четвъртък;

б) $31:4=7$ (ост.3) $\Rightarrow$ един ден от седмицата се повтаря най-много 5 пъти $\Rightarrow$ 3 март е сряда.

ТЕМА ЗА ПОДГОТВИТЕЛЕН 8 КЛАС

зад. 1. Да се решат уравненията:

а) $||2x - 3 - 5| = a$, a – параметър;

б) $|3ax + 2| = 1 - a$, a – параметър.

зад. 2. Даден е равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), в който диагоналите AC и BD се пресичат в точката O и $AC = AB + CD$.

а) Да се намери ъгъл AOB ;

б) Да се докаже, че средите на отсечките BO , CO и AD са върхове на равнобедрен триъгълник.

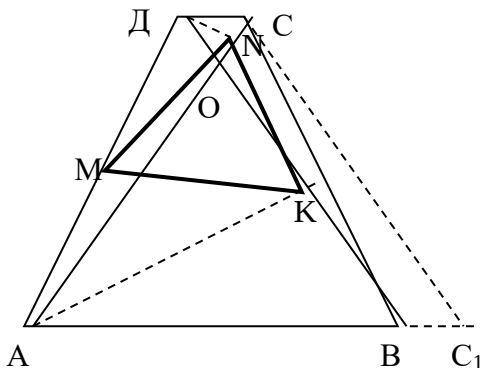
зад. 3. Всяка точка от равнината е оцветена в бяло, синьо, червено или жълто. Предполагаме, че при това оцветяване има поне по една точка от всеки цвят. Да се докаже, че съществува права, върху която има поне три разноцветни точки.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА ПОДГОТВИТЕЛЕН 8 КЛАС

зад. 1. а) 1) При $a < 0$ няма решение; 2) При $0 < a < 5$ има 4 решения; 3) При $a > 5$ има 2 решения; 4) При $a = 0$ има 2 решения: 4 и -1; 5) При $a = 5$ има 3 решения: 6,5; -3,5; 1,5.

б) 1) При $a = 0$ или $a > 1$ няма решение; 2) При $a < 0$ или $0 < a < 1$ има 2 решения: $x_1 = (-a - 1)/3a$; $x_2 = (a - 3)/3a$; 3) при $a = 1$ има 1 решение $-2/3$.

зад. 2. $CC_1 \parallel DB$, $AB \cap CC_1 = C_1$; $AC = AB + CD$
 $= AB + BC_1 = AC_1 \Rightarrow$
 $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. Но
 $\angle AC_1C = \angle ABD =$
 $\angle BAC \Rightarrow \triangle ACC_1$ и
 $\triangle ABO$ са равнобедрени
 $\Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$, $AK -$



медиана и височина $\Rightarrow \triangle AKD$ – правоъгълен $\Rightarrow AM = MD = MK$, но $AM = MD = AD/2 = BC/2$, $NK = BC/2$. $\Rightarrow MK = NK$. Аналогично се доказва, че $\triangle DOS$ – равностранен $\Rightarrow DN$ – медиана и височина $\Rightarrow \triangle AND$ – правоъгълен $\Rightarrow AM = MD = MN \Rightarrow MK = NK = MN$, т.е. $\triangle MKN$ – равностранен.

Зад.3. Да допуснем противното: нека точките върху всяка права са оцветени най-много в два цвята. Да вземем три разноцветни точки А, В, С, например бяла, синя и червена. Тогава всички точки от правата АВ са бели или сини, върху ВС – сини или червени, върху СА – бели или червени. Но в равнината има поне една жълта точка Д. Очевидно, тя не лежи на никоя от правите АВ, ВС, СА. Тогава налице е една от възможностите: АД пресича ВС; ДВ пресича СА; ДС пресича АВ. Нека, например, АД пресича ВС в точката Е. Тогава Е е синя или червена, тъй като е върху ВС. От друга страна, тя е бяла или жълта, понеже лежи върху АД. Достигнахме до противоречие.

ТЕМА ЗА 9 КЛАС

зад. 1. Решете: а) неравенството $\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 2} \leq x$;

б) уравнението $\sqrt{x+10} = 2 + \sqrt{-x}$;

в) системата
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$$

Докажете, че: $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

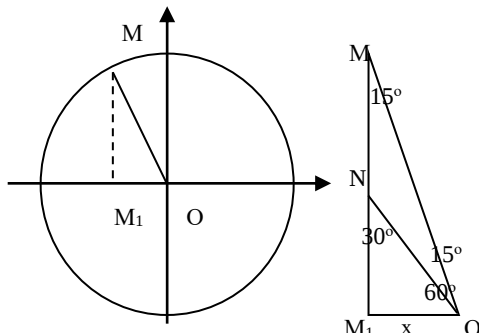
зад. 2. Дадени са аритметичните прогресии 3, 6, 9, ..., 999 и 10, 14, 18, ..., 998. Докажете, че общите за двете прогресии числа образуват аритметична прогресия и намерете броя на членовете и сумата ѝ.

зад. 3. В окръжност с център О и радиус 1 са построени перпендикулярни диаметри АВ и СД, а М е средата на ОВ. Да се намерят радиусите на окръжностите, които се допират до правите СМ, ДМ и до дадената окръжност.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ 9 КЛАС

зад. 1. а) $x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; -2 \right) \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; +\infty \right)$; б) -1;

в) (1;2); (2;1); (-1;-2); (-2;-1); (2;-1); (-1;2); (-2;1); (1;-2);



г) $OM_1 = x$; $ON = MN = 2x$;

$$NM_1^2 + OM_1^2 = ON^2; NM_1^2$$

$$+ x^2 = (2x)^2 \Rightarrow NM_1 = x\sqrt{3};$$

$$MM_1 = x\sqrt{3} + 2x = x(2 + \sqrt{3}); M_1O^2 + MM_1^2 = OM^2;$$

$$x^2 + [x(2 + \sqrt{3})]^2 = 1^2;$$

$$x^2(1+4+3+4\sqrt{3}) = 1;$$

$$x^2 = \frac{1}{8+4\sqrt{3}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 105^\circ = -x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

зад.2. Общият член на първата прогресия е $a_n = 3n$, $n=1, 2, \dots, 333$, а на втората – $b_m = 4m+6 = 2(2m+3)$, $m=1, 2, \dots, 248$. Тогава, $a_n = b_m \Rightarrow 3n = 4m+6 \Rightarrow m = 3m_1$; $n = 4m_1+2$. Следователно, общите членове на двете прогресии са $a_{4m_1+2} = b_{3m_1} = 6+12m_1$, където $3m_1 \leq 248$, т.е. $m_1 = 1, 2, \dots, 82$. Техният брой е 82 и те образуват аритметична прогресия с първи член 18 и разлика 12.

$$S_{82} = \frac{2 \cdot 18 + 81 \cdot 12}{2} \cdot 82 = 41328$$

зад. 3. Ще отбележим, че има 4 окръжности, изпълняващи условието на задачата.

Най-напред да разгледаме окръжността, която се допира до отсечките CM, DM и до дадената окръжност. Тъй като AB се явява ос на симетрия на цялата конструкция, то центърът O_1 на разглежданата окръжност лежи на AM, а тя се допира да

дадената в т.А. Ако означим с Е допирната ѝ точка с СМ, тогава правоъгълните триъгълници СОМ и О₁ЕМ са подобни и следва:

$$\frac{O_1M}{O_1E} = \frac{CM}{CO} \text{ или } \frac{\frac{3}{2} - r_1}{r_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \text{ понеже } CM = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Оттук намираме, че $r_1 = 3(\sqrt{5} - 2)$. Аналогично се постъпва и за намиране радиуса r_2 на окръжността, която се допира до продълженията на СМ, ДМ и до дадената окръжност – в т.В. Нейният център О₂ лежи на ВМ и ако F е допирната ѝ точка с СМ, тогава правоъгълните триъгълници О₂FM и СОМ са

подобни, откъдето следва:
$$\frac{O_2M}{O_2F} = \frac{CM}{CO} \text{ или } \frac{\frac{1}{2} - r_2}{r_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \Rightarrow$$

$r_2 = \sqrt{5} - 2$. Останалите две окръжности имат равни радиуси, защото са симетрично разположени относно диаметъра АВ. Да разгледаме тази, която се допира до отсечката ДМ в т.Р, до продължението на отсечката СМ и до дадената окръжност. Тъй като О₃М и АМ са ъглополовщи на два съседни ъгъла, то О₃М ⊥ АМ, т.е. О₃М || ДО и правоъгълните триъгълници

О₃РМ и ДОМ са подобни, откъдето следва:
$$\frac{O_3M}{O_3P} = \frac{DM}{OM}$$
 Но

от правоъгълния триъгълник ОО₃М чрез Питагоровата теорема изразяваме

$$O_3M = \sqrt{OO_3^2 - OM^2} = \sqrt{(1 - r_3)^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - 2r_3 + r_3^2}.$$

Така получаваме уравнението
$$\sqrt{\frac{3}{4} - 2r_3 + r_3^2} = \sqrt{5}r_3.$$

Оттук намираме, че
$$r_3 = \frac{1}{4}.$$



б) Докажете, че: $tg3\alpha = tg\alpha.tg(60^\circ - \alpha).tg(60^\circ + \alpha)$;

$$\cot g 84^{\circ} . \cot g 36^{\circ} . \cot g 24^{\circ} . \cos 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} .$$

а) Намерете мярката на ъгъла ОСА;

б) Намерете големината на отсечката CO .

зад. 3. Множеството A се състои от поне осем естествени числа, най-малкото общо кратно на които е равно на 210. Най-големият общ делител на кои да е две числа от A е по-голям от 1. Произведението на всички числа от A се дели на 1920 и не е точен квадрат на естествено число. Да се намерят числата, от които е съставено множеството.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10 КЛАС

зад. 1. а) 1 сл.) $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$; 2 сл.) $\sin x = -1$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi (l \in \mathbb{Z})$; 3 сл.) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ и $\sin x \neq 0$

$\Rightarrow \cos x = 1, \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2s\pi (s \in \mathbb{Z}); x = \pm \frac{\pi}{3} + 2t\pi (t \in \mathbb{Z})$. Но

всяко решение от множеството $x = 2s\pi (s \in \mathbb{Z})$ не е решение на даденото уравнение, защото при всяко от тях $\sin x = 0$.

б) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha)$ и $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha)$, откъдето следва исканото. Като приложим доказаното първо равенство получаваме, че $\cot g 84^\circ \cdot \cot g 36^\circ \cdot \cot g 24^\circ \cdot \cos 18^\circ = \sin 18^\circ$, което се доказва, че е $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Използваме, че $2 \cdot 18^\circ = 90^\circ - 3 \cdot 18^\circ$

зад. 2. а) $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$ т.О лежи на окръжността с диаметър $AB \Rightarrow \angle OCA = \angle OBA = 45^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{б) } S_{AOBC} &= S_{ACO} + S_{OCB} = \\ &= \frac{1}{2} b \cdot CO \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} a \cdot CO \cdot \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (a+b) CO \end{aligned}$$

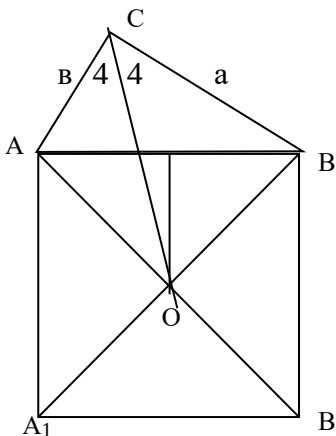
Но $S_{AOBC} = S_{ABC} + S_{AOB}$

$$= \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} \cdot \frac{AB^2}{2} \Rightarrow$$

$$S_{AOBC} = \frac{1}{2} \left(ab + \frac{a^2 + b^2}{2} \right) = \frac{1}{4} (a+b)^2$$

От двете равенства следва, че

$$CO = (a+b) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$



зад. 3. Понеже $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то всяко число n от A има вида $n=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$, където всяко едно от числата $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ е равно на 0 или 1. Тогава числата от A са или нечетни или четни, които не се делят на 4. От друга страна $1920=2^7 \cdot 3 \cdot 5$, което означава, че в A има поне седем четни числа. Четните делители на 210 са 2, $2 \cdot 3=6$, $2 \cdot 5=10$, $2 \cdot 7=14$, $2 \cdot 3 \cdot 5=30$, $2 \cdot 3 \cdot 7=42$, $2 \cdot 5 \cdot 7=70$ и $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=210$ и те са 8 на брой. Ако $2 \in A$, то понеже в A няма взаимно прости числа, ще трябва всички числа от A да са четни, т.е. $A=\{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$. Но тогава произведението на числата от A е равно на $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$, което е точен квадрат. Получихме противоречие с условието. Следователно, $2 \notin A$, но всички останали четни числа от изброените по-горе са в A и, освен това, в A има поне едно нечетно число n . Но от $\text{НОД}(n,6) \neq 1$, $\text{НОД}(n,10) \neq 1$, $\text{НОД}(n,14) \neq 1$ следва, че единствената възможност за n е $n=105$. Окончателно, $A=\{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

ТЕМА ЗА 11 И 12 КЛАСОВЕ

зад. 1. а) Дадена е редица $a+2, 5-2a,$

$$\frac{(5-2a)^2}{a+2}, \dots, \frac{(5-2a)^{n-1}}{(a+2)^{n-2}}, \dots, \text{ където } a \text{ е реален параметър } (a \neq -2,$$

$a \neq \frac{5}{2})$. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които

редицата представлява: - аритметична прогресия; - безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

б) Намерете границата: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2-1}}{x}.$

зад. 2. Даден е триъгълник ABC , за който $AB=15$, $BC=13$, $AC=12$. Да се докаже, че ъглополовящата през A , медианата през B и височината през C се пресичат в една точка.

зад. 3. Основата $ABCD$ на пирамидата $ABCDN$ е равнобедрен трапец с остър ъгъл $\angle DAB = \alpha$. Околните стени сключват с равнината на основата ъгъл β .

а) Намерете обема на пирамидата, ако лицето на основата ѝ е равно на 5 кв.см.

б) Намерете косинуса на ъгъла, който сключват околните стени на пирамидата, съдържащи бедрата на трапеца.

РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11 И 12 КЛАСОВЕ

зад.1. а) За $a=1$ редицата е аритметична прогресия; за $a \in (1; 7)$ редицата е безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

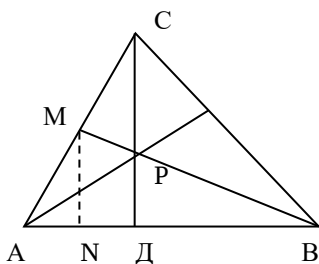
б)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{2} \cdot |x|\sqrt{1-\frac{1}{2x^2}}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-\sqrt{2})|x|}{x} = \sqrt{2} - 1$$

зад. 2. От даденото условие и косинусова теорема определяме: $\cos \alpha = \frac{5}{9}$; $\cos \beta = \frac{25}{39}$; ($\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$).

Следва, че петата Д на височината от С лежи върху АВ. Нека



СД пресича медианата ВМ в т.Р.

АР е ъглополовяща, ако:

$$\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{5}{2}. \quad \text{Ако построим}$$

$MN \perp AB$, то тя е средна отсечка в

$\triangle ACD$ и следователно, $MN \parallel CD$, а

N е средата на АД. Тогава

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BD}{ND} = \frac{2BD}{AD} = \frac{2BC \cos \beta}{AC \cos \alpha} = \frac{5}{2}$$

зад. 3. а) Нека $NO=H$ е височината на пирамидата чрез върха N, а h е дължината на височината на трапеца към основите му. Тъй като околните стени на пирамидата сключват равни ъгли с основата, то в нея може да се опише окръжност с

център O и радиус $h/2$. От тук следва, че $\frac{AB+CD}{2} = BC$ и

$H = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \beta$. Тогава $V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{6} S h \operatorname{tg} \beta$. За определянето на h използваме, че $S = BC \cdot h$,

$$BC = \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow S = \frac{h^2}{\sin \alpha} \Rightarrow h = \sqrt{S \cdot \sin \alpha} \Rightarrow V = \frac{1}{6} S \sqrt{S \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

б) Нека $AD \cap BC = T$, P , T , Q е средата на AB , $MN \perp BC$ ($M \in BC$) и φ е големината на двустенния ъгъл между равнината BPN и равнината APN . Тогава двустенният ъгъл между равнините BPN и QPN е с големина $\varphi/2$ и $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{S_{QPN}}{S_{BPN}}$. Но

$$S_{QPN} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot NO; S_{BPN} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot NM \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{PQ}{BP} \cdot \frac{NO}{MN} = \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad \text{Тогава:}$$

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - 1.$$