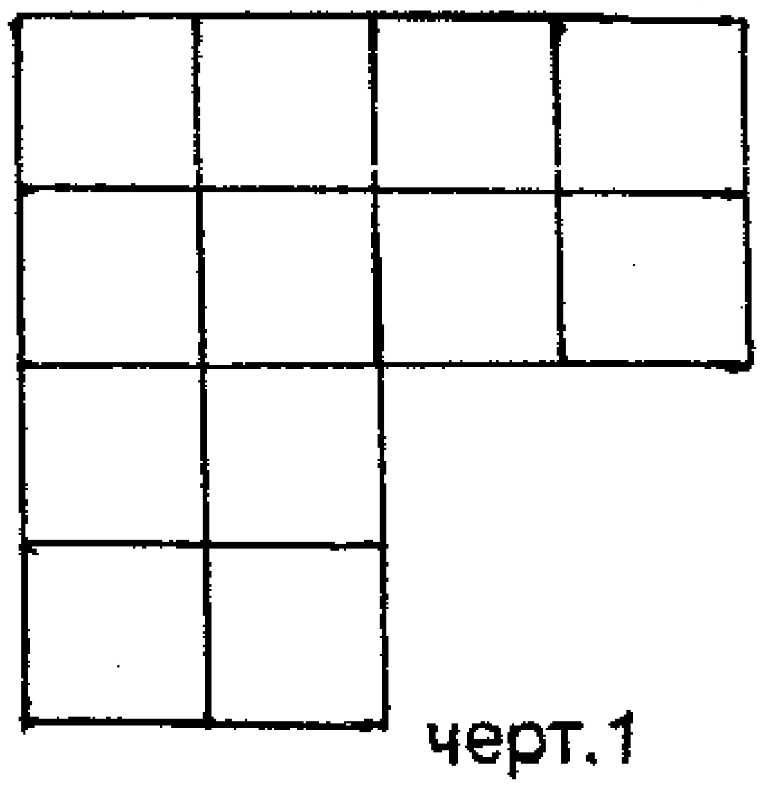
Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА IV КЛАС

---

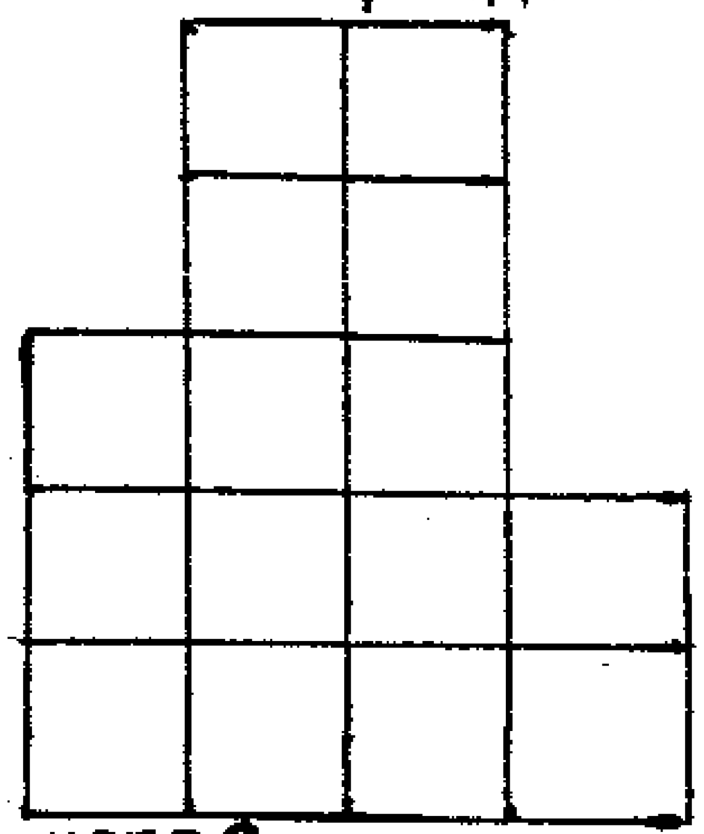
1 зад. а/Нека $A=(3+8.12).24-2\,376:9$, а $B=246-48:(3.10-22)-(864:8+9).2$. Да се намери неизвестното число x, ако $(38\,336:8+1128:x)-(792+5.800)=A:(44.B)$.

б/Четири деца изяждат 4 банана за 5 минути.Колко банана ще изядат 8 деца за 20 минути?Колко деца ще изядат 40 банана за 20 минути?

2 зад. Фигурата , изобразена на първия чертеж се състои от 12 еднакви квадратчета.Можете ли да я разделите на четири фигури ,образувани от тези квадратчета, с еднаква форма и равни лица?Фигурата, изобразена на втория чертеж се състои от 15 еднакви квадратчета. Можете ли да я разделите на пет фигури ,образувани от тези квадратчета, с еднаква форма и равни лица?/покажете разделянето с чертеж,ако го е възможно/.



черт.1



черт.2

3 зад. В един паркинг има общо 75 автомобили и мотоциклети,които имат общо 259 колела.Три от мотоциклетите били с кош,а останалите мотоциклети- без кош.Колко са автомобилите и колко са мотоциклетите без кош?/всички автомобили имат по 4 колела,всеки мотоциклет с кош има по 3 колела,а всеки мотоциклет без кош -по 2 колела/.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА V КЛАС

---

1 зад. Намерете лицето на правоъгълник с ширина x см и дължина y см, ако x е числото, за което е вярно равенството: $3:(2-9:6{,}78)=4+5:x$, а y е числената стойност на израза:

$$\frac{2{,}25-0{,}25:1\frac{2}{3}}{0{,}8\,.\,12{,}5}\cdot\frac{7{,}75.\left(19{,}98+\frac{1}{50}\right)}{0{,}31\,.\,15}.$$

Измежду всички правоъгълници със същото лице намерете този, който без остатък може да се нареже на квадрати със страна 2см.

2 зад. Колко най-много правоъгълни картички с размери 3 см и 5 см могат да бъдат изрязани от правоъгълен картон с размери:
а/ 7 см и 15 см ; б/ 15 см и 22 см ?

3 зад. Пътешественик тръгва от връх А за връх В. Спира да пренощува и си мисли: "Ако бях изминал още 2 км, то третината от пътя щеше да остане зад мен. Но ако утре преодолея разстояние, два пъти по-голямо от днешното, вечерта ще пренощувам на такова разстояние от В, на каквото съм сега от А." Колко километра път предстои на пътешественика да измине?

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА VI КЛАС

1 зад. Числата а и в са отрицателни. Кое от тях е по-голямо, ако:

$$|a| = \left(3:(-2.(-2)+(-5,5)) - \left(-\frac{2}{3}\right).(-0,5+|-1,25|)\right):\left(-5\frac{1}{5}\right);$$

$$|в| = \frac{\left(-1+\frac{12}{13}\right)-2.\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(1-1\frac{8}{13}+1\frac{1}{39}\right)}{8+4.\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(|-2|-\left|-2\frac{1}{2}\right|\right)} \quad ?$$

2 зад. В триъгълника ABC са построени отсечката CM / M лежи на AB/, която разделя страната AB на две равни части и отсечката AP / P лежи на BC /. Отсечките CM и AP се пресичат в точка Q. Ако е известно, че BP:CP = 3 : 1 да се намери отношението AQ : QP.

3 зад. При организиране на пролетен празник за шестокласници в едно училище / те са по-малко от 100/, забелязали, че независимо дали поръчват масите да бъдат за 4, 6 или 7 човека, две места остават празни. Като знаете, че $\frac{1}{7}$ от момичетата и $\frac{3}{20}$ от момчетата ще участват в празничната програма по спортни танци, определете колко ще са танцовите двойки?

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА VII КЛАС

---

1 зад. а/ Да се разложи изразът $A = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ на множители ;

б/ Да се докаже ,че изразите $B = \left(\dfrac{(-1)^{n+2} + (-1)^{n}}{(-1)^{n+3} + (-1)^{n+1}}\right)^{2n+1}$ и

$C = (n+3)^3 + 3.(n+3)^2.(1-n) + 3.(n+3).(1-n)^2 + (1-n)^3$ не зависят от естественото число $n$.

2 зад. В два съда е имало общо 64 литра вода.От първия съд взели 20% от намиращата се в него вода и я сипали във втория.След това от втория съд взели 20% от намиращата се в него вода и я сипали в първия.Тогава се оказало,че в двата съда има едно и също количество вода.По колко литра вода е имало във всеки съд първоначално?

3 зад. Даден е правоъгълният триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C. Построена е височината CH/ H лежи на AB /.Пресечната точка на ъглополовящите на ъглите HAC и HCB е означена с M,а пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл ACH и правата през M , перпенди - кулярна на CH - с N.Да се докаже ,че BN е ъглополовяща на ъгъл ABC.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
Тема за VIII клас , VIII подготвителен клас и VIII редовен клас

---

1 зад. Един кръчмар решил да разреди ракията в едно буренце и отлял 5 литра от него,след което го допълнил с вода.Това му се видяло малко и отново повторил същата процедура.За нещастие на кръчмаря дошли контрольори на проверка.Те установили,че ракията в бурето е $25^\circ$ вместо $36^\circ$, както пишело в документите на кръчмаря.Намерете колко литра ракия е имало в бурето.

2 зад. Нека M е средата на страната BC на успоредника ABCД , N е пресечната точка на правата AM с диагонала BД, а P е пресечната точка на правите AД и CN .Да се докаже,че :

а/ AP=AД

б/ CP=BД тогава и само тогава ,когато AB=AC.

3 зад. За кои цели стойности на x и y е изпълнено равенството

$7.(x-y)+x.y=8$?

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА IX КЛАС

---

1 зад. а/Опростете израза за допустимите стойности на променливата:

$$\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right):\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\ ;$$

б/Да се реши уравнението: $\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x^2-ax}=\frac{1}{x}$ относно $x$.

2 зад. От върха на тъпия ъгъл B в ромба ABCД са спуснати перпендикуляри BE и BF съответно към страните AД и ДC, които пресичат диагонала AC съответно в точките M и N. Определете лицето на фигурата MNEF, ако диагоналите на ромба са с дължини 160 см и 120 см.

3 зад. Дадени са естествени числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, . . . , $x_{100}$, за които $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x_{100}}}=20$. Да се докаже, че поне две от дадените числа са равни.

---

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА X КЛАС

---

1 зад. Да се реши системата

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\frac{65}{36}\\ xy-x+y=118\,.\end{vmatrix}$$

2 зад. Даден е изразът

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+k(\sin^4 x+\cos^4 x),$$

където k е реален параметър.

а/ Да се намерят всички стойности на k, така че f(x) да не зависи от x.

б/ Да се намерят всички стойности на k, за които уравнението $f(x)=0$ има решение и да се реши уравнението $f(x)=0$ при $k=-0{,}7$.

3 зад. Страната BC на триъгълника ABC има дължина $\sqrt{3}$ и ъгъл $ABC=30^\circ$. Центърът на окръжността, която минава през A и се допира до BC в точка C, лежи върху правата AB. Да се намери радиусът на вписаната в триъгълника ABC окръжност.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 13.03.99 г.
ТЕМА ЗА XI И XII КЛАС

---

1 зад. Намерете границите на следните функции:

а/ $f(x) = \sqrt{(x+a).(x+b)} - x$ при $x \to +\infty$

б/ $f(x) = x^{\frac{4}{3}}.\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right)$ при $x \to +\infty$

2 зад. Да се намерят стойностите на реалния параметър а ,за които неравенството

$$a.4^{x^2} + (a-1).2^{x^2+2} + a - 1 > 0$$

е изпълнено за всяко реално число х.

3 зад. В правилна триъгълна пирамида SABC ( с връх S ) точката М е средата на SA, а N дели SB така,че SN : NB = 5 : 12. Успоредната проекция на правата MN дели ръба AC на отсечките AK = 6 cm и KC = 8 cm. Да се намери отсечката от проекцията на MN ,заключена между AC и BC.

## Кратки решения на задачите за IV клас:

1 зад. а) $A = (3+8.12).24 - 2376:9 = 99.24 - 264 = 2376 - 264 = 2112$ (2 точки)

$B = 246 - 48:(3.10-22) - (864:8+9).2 = 246 - 6 - 117.2 = 240 - 234 = 6$ (2 точки)

$(38336:8 + 1128:x) - (792+5.800) = A:(44.B)$

$(4792 + 1128:x) - (792+4000) = 2112:(44.6)$

$(4792 + 1128:x) - 4792 = 2112:264 \Rightarrow 4792 + 1128:x = 4792 + 8$

$4792 + 1128:x = 4800 \Rightarrow 1128:x = 8 \Rightarrow x = 1128:8 \Rightarrow \boxed{x = 141}$ (2 точки)

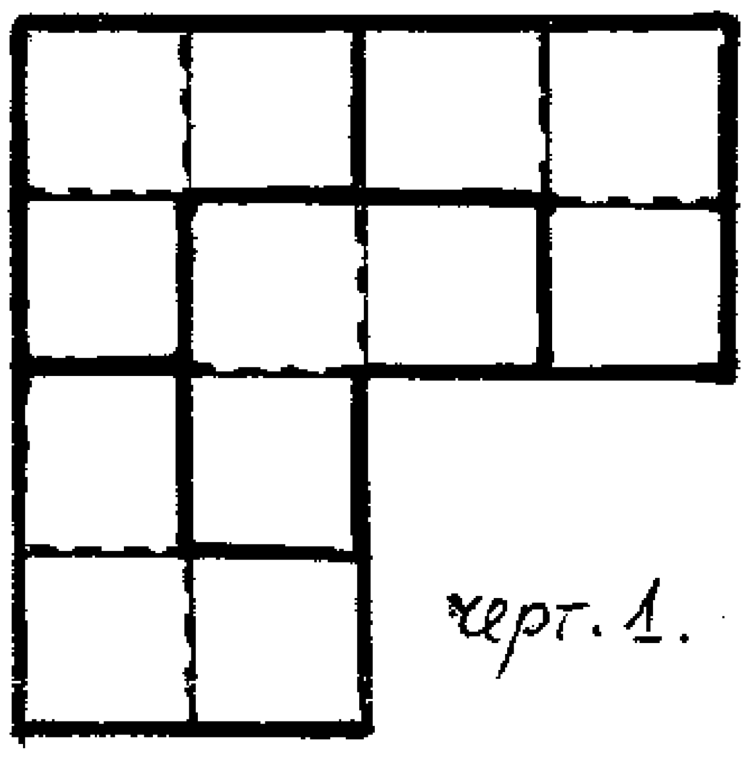
б) 4 деца изядат 4 банана за 5 мин ⇒

1 дете изяжда 1 банан за 5 мин ⇒

1 дете ще изяде 4 банана за 20 мин

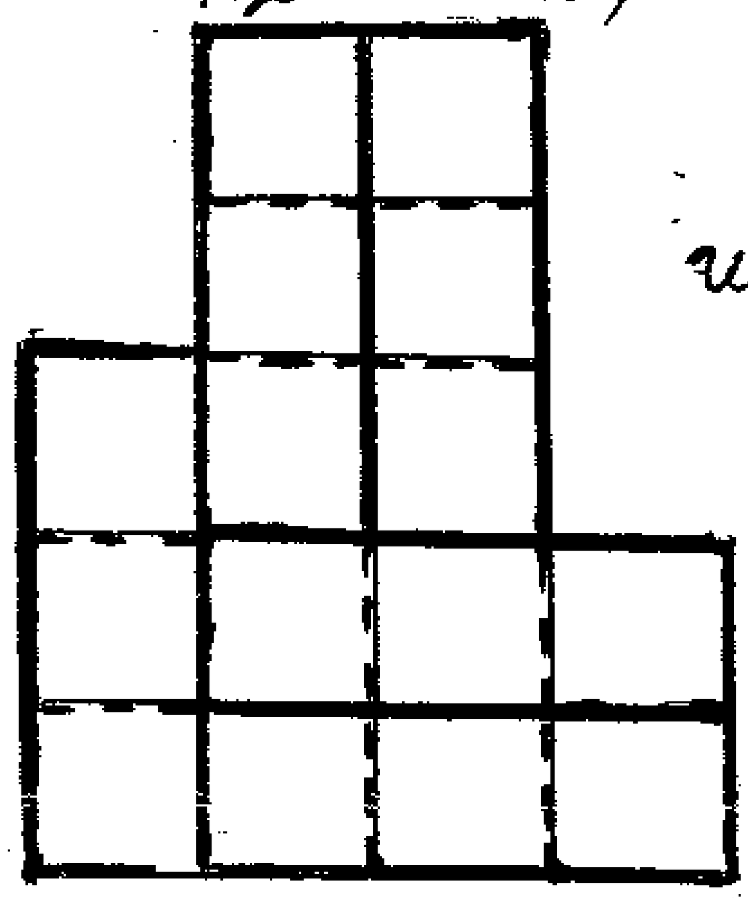
⇒ <u>8 деца ще изядат 32 банана за 20 мин</u> (1,5 точки) и <u>10 деца ще изядат 40 банана за 20 мин</u> (1,5 точки)

2 зад.

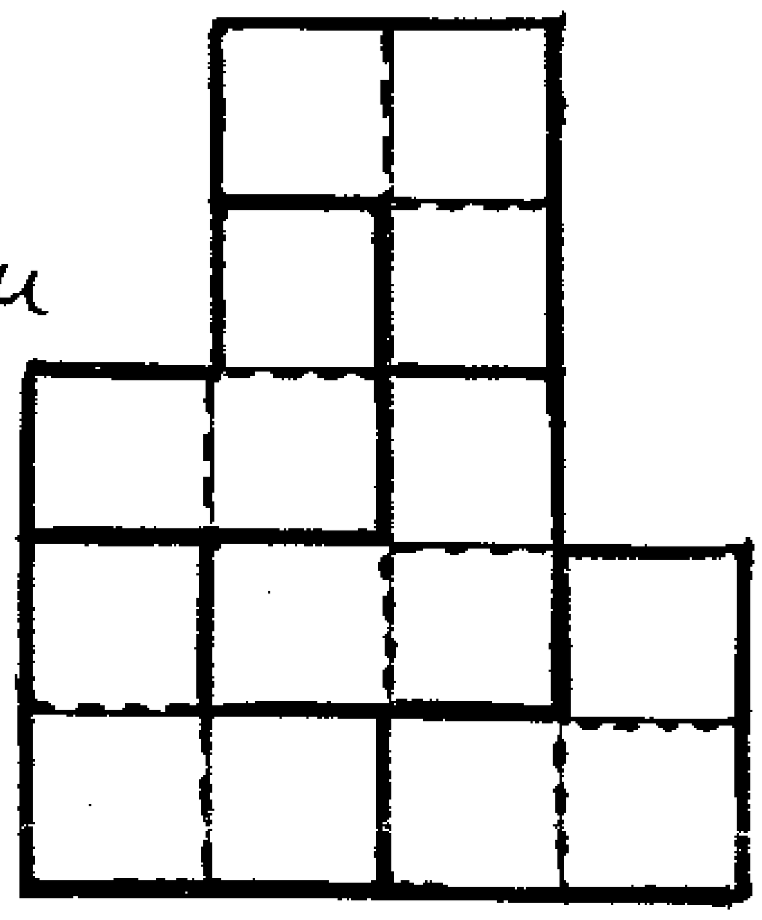


черт. 1.

(2 точки)



или



черт. 2

(за един от начините – 2 точки, за двата начина – 3 точки)

3 зад.

$3.3 = 9$ колела (мот. с кош)

(2 точки) $259 - 9 = 250$ колела (авт. и мот. без кош)

$2.72 = 144$ колела

$250 - 144 = 106$ колела повече

$106 : 2 = $ <u>53 (авт.)</u> (3 точки)

$75 - 3 = 72$ (авт. и мот. без кош)

$72 - 53 = $ <u>19 (мот. без кош)</u> (1 точка)

Проверка: $53.4 + 19.2 + 3.3 =$
$= 212 + 38 + 9 =$
$= 259$ колела

зад. 1 а) 6 точки
б) 3 точки
зад. 2) 5 точки
зад. 3) 6 точки

# Кратки решения на задачите за V клас:

**1 зад.**

$3 : (2 - 9 : 6{,}78) = 4 + 5 : x$

$3 : \left(\underbrace{\frac{2}{1} - \frac{150}{113}}_{113}\right) = 4 + 5 : x$

$3 : \frac{76}{113} = 4 + 5 : x$

$\underbrace{\frac{339}{76} - \frac{4}{1}}_{76} = 5 : x$

$\frac{35}{76} = 5 : x \Rightarrow x = 5 : \frac{35}{76} = \frac{76}{7} = 10\frac{6}{7}$

$\boxed{x = \frac{76}{7}}$ (2,5 точки)

$y = \frac{2{,}25 - \frac{25}{100} \cdot \frac{3}{5}}{10} \cdot \frac{7{,}75 \cdot 20}{4{,}65}$

$y = \frac{2\frac{1}{4} - \frac{3}{20}}{10} \cdot \frac{155 \cdot 100}{465}$

$y = \frac{42}{200} \cdot \frac{100}{3} = 7$

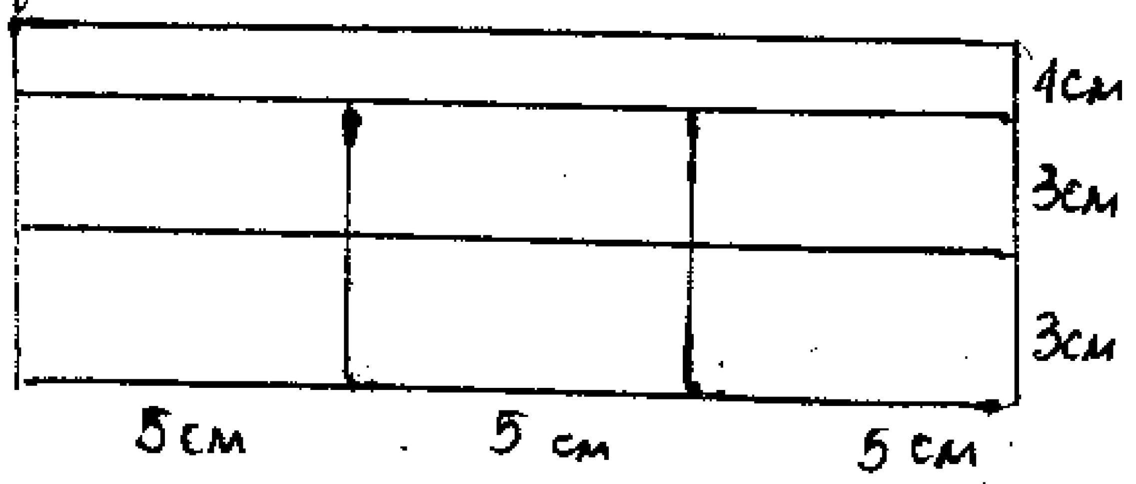
$\boxed{y = 7}$ (3 точки)

$a = 7$ см, $b = \frac{76}{7}$ см $\Rightarrow S_{\square} = 76$ кв. см (0,5 точки)

$76 = 1.76 = 4.19 = 2.38 \Rightarrow$

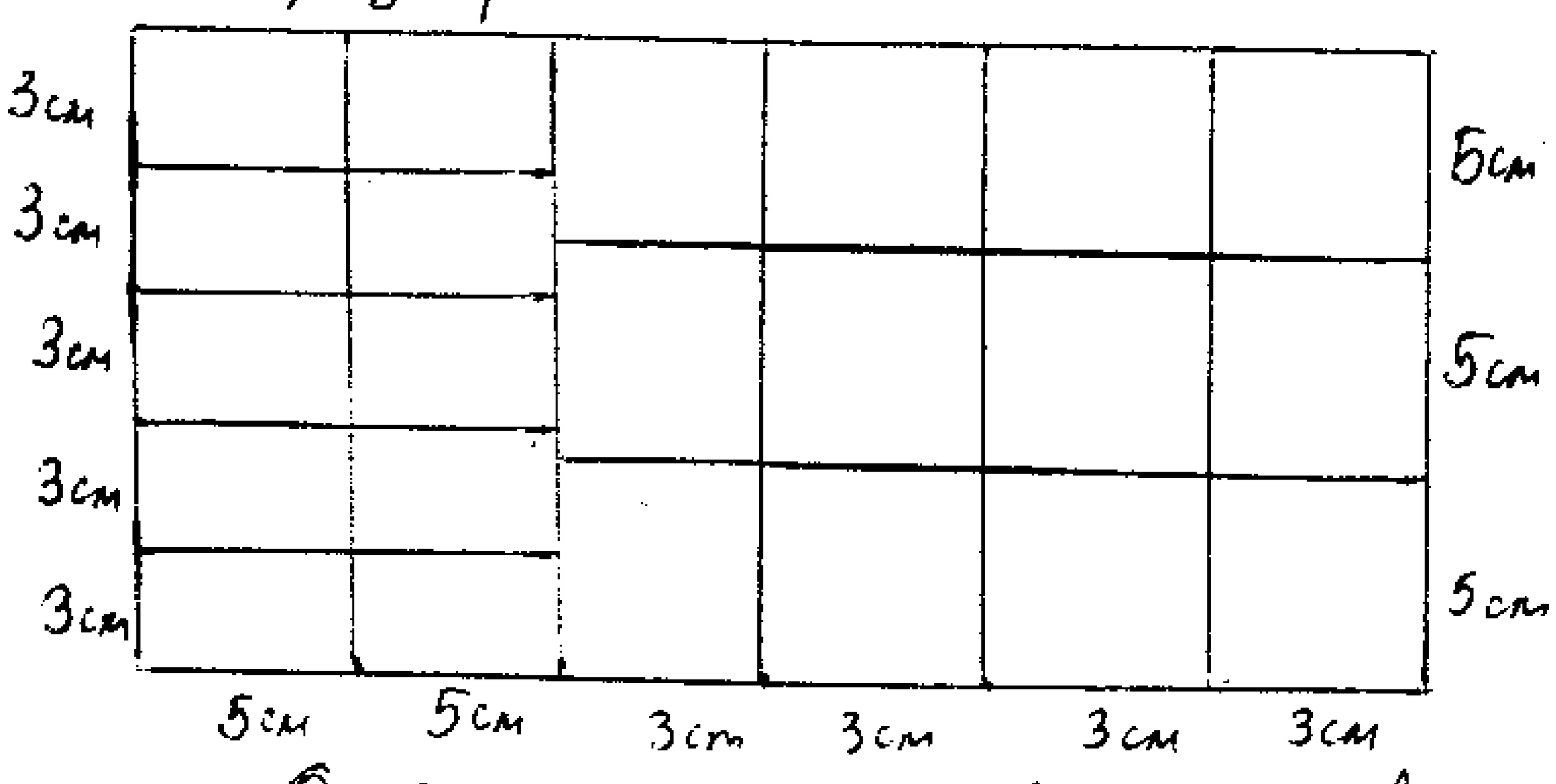
За да може да се нареже на квадрати със страна 2 см правоъгълникът с такова лице трябва да има страни 2 см и 38 см (1 точка)

**2 зад.** а) Всяка картичка има лице 15 кв.см. Следователно от картон с размери 7 см на 15 см не могат да се изрежат повече от 7 картички. Но ако могат да се изрежат 7 картички, страната на картона с дължина 7 см трябва да бъде покрита изцяло с отсечки с дължина 3 см и 5 см. Ясно е, че само със страни от 3 см това е невъзможно, защото 7 не се дели на 3, а ако върху страната е нанесена една отсечка с дължина 5 см, остават 2 см, които не могат да бъдат покрити. Следователно максималният брой картички е 6, както се вижда и от чертежа:




(3 точки)

б) Ясно е, че максималният брой картички ще е 22, ако покрием изцяло картона с размери 15 см на 22 см. Това е възможно, както се вижда от чертежа:




(3 точки)

**3 зад.** От думите на пътешественика става ясно, че изминатия от него път е $\frac{1}{4}$ от цялото разстояние (2 точки). Ако изминатият път е с 2 км повече, то той се оказва $\frac{1}{3}$ от същото разстояние (2 точки). Следователно тези 2 км се оказват $\frac{1}{12}$ от пътя $\Rightarrow S = 24$ км (2 точки). I ден са изминати 6 км и следователно остават 18 км за изминаване (1 точка)

зад. 1) 7 точки зад.2 а) 3 точки б) 3 точки зад.3) 7 точки

Кратки решения на задачите за VI клас!

1 зад. $|a| = \left(3 : (-2.(-2) + (-5,5)) - \left(-\frac{2}{3}\right).(-0,5 + |-1,25|)\right) : \left(-5\frac{1}{5}\right) =$

$= \left(3 : (4 - 5,5) + \frac{2}{3}.(-0,5 + 1,25)\right) : \left(-\frac{26}{5}\right) =$

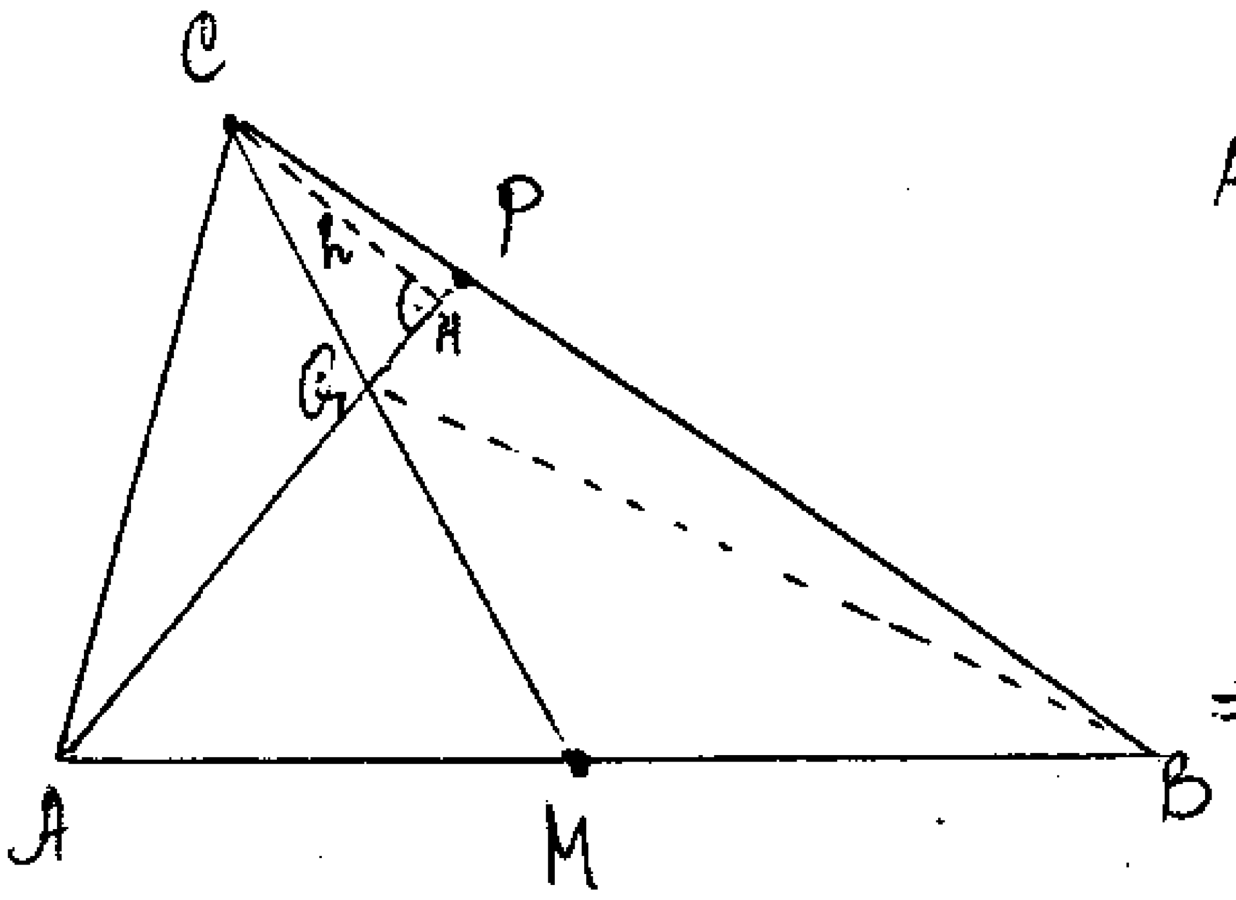
$= \left(3 : (-1,5) + \frac{2}{3}.0,75\right) : \left(-\frac{26}{5}\right) = (-2 + 0,5) : \left(-\frac{26}{5}\right) = +1,5.\frac{5}{26} = \frac{15}{52}$ (2,5 точки) $\Rightarrow a = -\frac{15}{52}$ (0,5 точки)

$|b| = \dfrac{\left(-1 + \frac{12}{13}\right) - 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(1 - 1\frac{8}{13} + 1\frac{1}{39}\right)}{8 + 4.\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(|-2| - |-2\frac{1}{2}|\right)} = \dfrac{-\frac{1}{13} + 1 + \frac{16}{39}}{8 - 2 - (2 - 2,5)} = \dfrac{1\frac{1}{3}}{6,5} = \frac{8}{39} \Rightarrow b = -\frac{8}{39}$

(2,5 точки) (0,5 точки)

$a = -\frac{15}{52}^{(3} = -\frac{45}{156}$, $b = -\frac{8}{39}^{(4} = -\frac{32}{156} \Rightarrow$ $a < b$ (1 точка)

2 зад.




$AM = MB \Rightarrow S_{\Delta AMQ} = S_{\Delta BQM}$, $S_{\Delta AMC} = S_{\Delta BCM} \Rightarrow$

$S_{\Delta AQC} = S_{\Delta BCQ}$, но $S_{\Delta BCQ} = S_{\Delta CQP} + S_{\Delta BPQ}$
(2 точки)

$\Rightarrow S_{\Delta AQC} = S_{\Delta CQP} + S_{\Delta BPQ}$ (1 точка)

От $BP : CP = 3 : 1 \Rightarrow S_{\Delta BPQ} : S_{\Delta CQP} = 3 : 1$ (2 точки) $\Rightarrow S_{AQC} = S_{\Delta CQP} + 3S_{\Delta CQP} \Rightarrow$

$S_{\Delta AQC} = 4S_{\Delta CQP}$ (1 точка) $\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta AQC}}{S_{\Delta CQP}} = \dfrac{4}{1}$, но $S_{\Delta AQC} = \dfrac{AQ.CH}{2}$, $S_{\Delta CQP} = \dfrac{QP.CH}{2} \Rightarrow$

$\dfrac{\frac{AQ.CH}{2}}{\frac{QP.CH}{2}} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow$ $AQ : QP = 4 : 1$ (1 точка)

3 зад. Единственото число < 100, което се дели без остатък на 4, 6 и 7 е 84 (1 точка)
От това, че винаги остават по две свободни места следва, че шестокласниците са 82.
(1 точка)
Щом $\frac{3}{20}$ от момчетата танцуват, то те са 20, 40, 60 или 80. (1 точка)
Но тогава момичетата ще са съответно 62, 42, 22 или 2. (1 точка)
Броят на танцуващите момичета е $\frac{1}{7}$ от всички момичета $\Rightarrow$ те са 42, а момчетата са 40. (1 точка)
Тогава броят на танцовите двойки е $\frac{1}{7}.42 = \frac{3}{20}.40 = 6$ (1 точка)

зад. 1) 7 точки
зад. 2) 7 точки
зад. 3) 6 точки

## Кратки решения на задачите за VII клас:

1зад. а) $A = x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5 = x^4(x+3y)-5x^2y^2(x+3y)+4y^4(x+3y) =$

$= (x+3y)(x^4-5x^2y^2+4y^4) = (x+3y)(x^4-x^2y^2-4x^2y^2+4y^4) = (x+3y)\left(x^2(x^2-y^2)-4y^2(x^2-y^2)\right) =$
(1 точка)

$= (x+3y)(x^2-y^2)(x^2-4y^2) = \underline{(x+3y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)}$ (1 точка)
(1 точка)

б) $B = \left(\dfrac{(-1)^{n+2}+(-1)^n}{(-1)^{n+3}+(-1)^{n+1}}\right)^{2n+1} = \begin{cases} \left(\dfrac{1+1}{-1-1}\right)^{2n+1} = -1 & \text{за } n \text{ – четно число} \\ \left(\dfrac{-1-1}{1+1}\right)^{2n+1} = -1 & \text{за } n \text{ – нечетно число} \end{cases}$

$\Downarrow$

(2 точки) $\underline{B = -1 \text{ за } \forall n \in N}$ (изп., че $(-1)^n = 1$ за $n=2k$, $(-1)^n=-1$ за $n=2k+1, k\in N$)

$C = (n+3)^3+3.(n+3)^2(1-n)+3(n+3)(1-n)^2+(1-n)^3 = ((n+3)+(1-n))^3 = 4^3 = \underline{64}$ (2 точки)

2зад. $x$ л вода в I съд $(x>0)$
$64-x$ л вода във II съд $(x<64)$ } (1 точка)

20% от $x = \dfrac{x}{5}$ л (прелети от I съд във II съд) $\Rightarrow$ В първият съд има $x-\dfrac{x}{5} = \dfrac{4x}{5}$ л (вода) (1 точка)

$64-x+\dfrac{x}{5} = 64-\dfrac{4}{5}x$ л (вода във II съд) (1 точка)

20% от $\left(64-\dfrac{4x}{5}\right) = \dfrac{1}{5}\left(64-\dfrac{4x}{5}\right)$ л (прелети от II съд в I съд) $\Rightarrow$ Във II съд има $\dfrac{4}{5}\left(64-\dfrac{4x}{5}\right)$ л (1 точка)

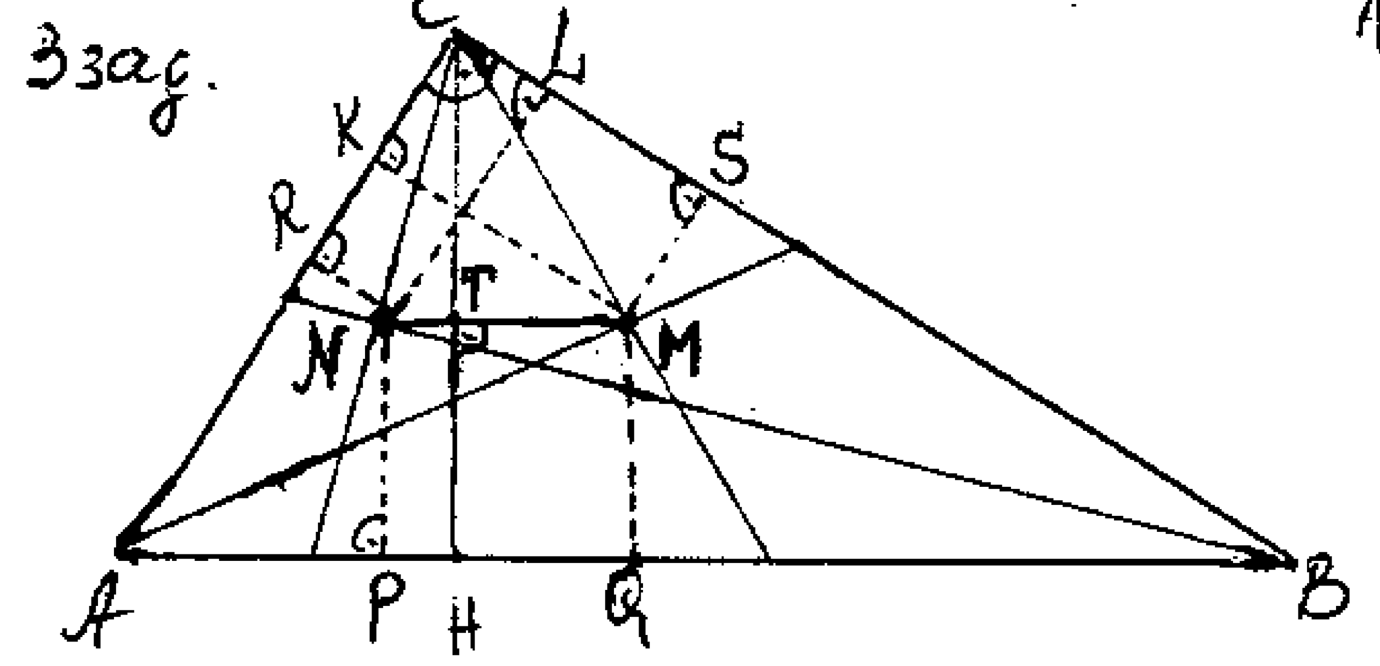
$\dfrac{4x}{5}+\dfrac{1}{5}\left(64-\dfrac{4x}{5}\right)$ л (вода в I съд) (1 точка)

Съгласно условието $\dfrac{4x}{5}+\dfrac{1}{5}\left(64-\dfrac{4x}{5}\right) = \dfrac{4}{5}\left(64-\dfrac{4x}{5}\right)$ (1 точка) $\Rightarrow$

$\dfrac{4x}{5}+\dfrac{64}{5}-\dfrac{4x}{25} = \dfrac{256}{5}-\dfrac{16x}{25} \Rightarrow 20x+320-4x = 1280-16x \Rightarrow 32x = 960 \Rightarrow x=30$

<u>В първия съд е имало 30 л вода, а във втория – 34 л вода</u> (0,5 точки)

3зад.



Построяване $NP\perp AB (P\in AB)$, $NR\perp AC (R\in AC)$, $MK\perp AC (K\in AC)$, $NL\perp BC (L\in BC)$, $MS\perp BC (S\in BC)$ и $MQ\perp AB (Q\in AB)$

Нека $CH\cap MN = T$; $CS=CT$ ($\triangle CSM \cong \triangle CTM$), $NP=MQ$, $MK=MQ$ ($M\in$ ъгл. на $\angle A$), $MK=SC$ ($KMSC$ – правоъгълник),

$CT=CR$ ($\triangle CRN \cong \triangle CNT$), $NL=CR$ ($RNLC$ – правоъгълник) $\Rightarrow$

$NP=MQ=MK=SC=CT=RC=NL \Rightarrow NP=NL \Rightarrow$ т. $N$ е от ъгл. на $\angle ABC \Rightarrow$

<u>$BN$ е ъглополовяща на $\angle ABC$</u> (Общо 6,5 точки – по една точка за всяко обосновано равенство на отсечки и 0,5 точки за извода, само за идеята за доказателство – 1 точка)

зад 1а) 3 точки б) 2+2=4 точки зад 2) 6,5 точки зад 3) 6,5 точки

Кратки решения на задачите за VIII клас:

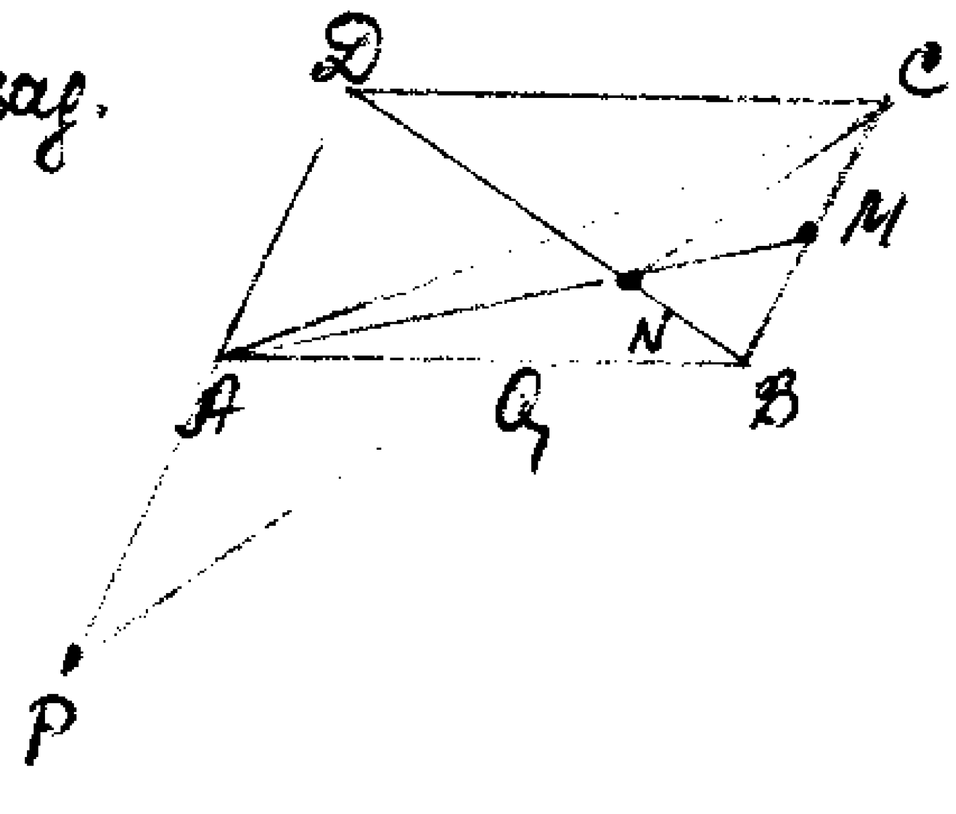
1 зад. Ще използваме формулата за концентрация на разтвор $K=\frac{m}{M}$. Избираме за неизвестно $x$ ($x>0$) първоначалното количество ракия. Като се има предвид, че при отливане не се променя концентрацията, а при доливане не се променя количеството алкохол $m$, попълваме таблицата:

| | M | K | m |
|---|---|---|---|
| Начален разтвор | $x$ | $36^\circ$ | $\frac{36}{100}\cdot x$ |
| Първо отливане | $x-5$ ($x>5$) | $36^\circ$ | $\frac{36}{100}(x-5)$ |
| Първо доливане | $x$ | $\frac{36(x-5)}{100\cdot x}$ | $\frac{36}{100}(x-5)$ |
| Второ отливане | $x-5$ | $\frac{36(x-5)}{100x}$ | $\frac{36(x-5)^2}{100x}$ |
| Второ доливане | $x$ | $\frac{36(x-5)^2}{100x^2}$ | $\frac{36(x-5)^2}{100x}$ |

Съгласно условието на задачата получаваме уравнението:

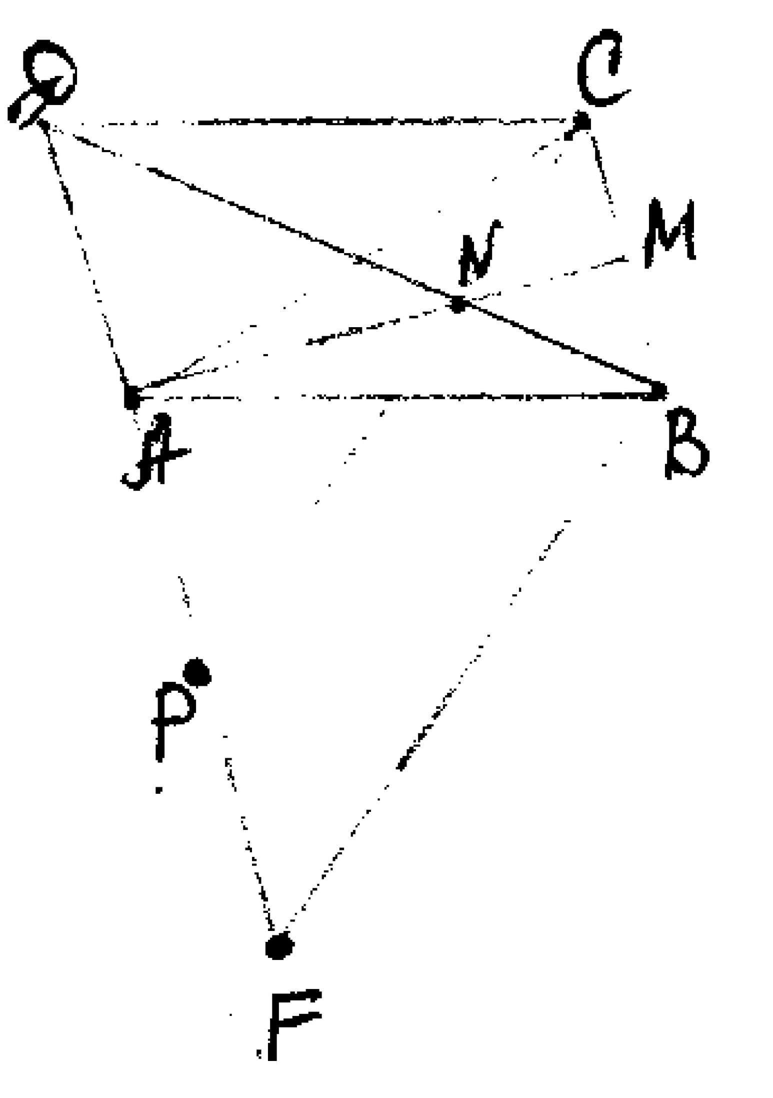
$$\frac{36(x-5)^2}{100x^2}=\frac{25}{100}\Rightarrow\frac{6(x-5)}{x}=5\Rightarrow 6x-30=5x\Rightarrow \underline{x=30\text{ (литра)}}$$

2 зад.




а) Разглеждаме $\triangle ABC$. В него правите $AM$ и $BD$ са медиани и следователно $N$ е негов медицентър. Ако $Q$ е пресечната точка на $CP$ с $AB$, то $Q$ ще е среда на $AB$. Лесно се вижда, че $\triangle APQ\cong\triangle BCQ$, откъдето $AP=BC=AD$.

б) Нека $AB=AC$. Тогава $\triangle ABC$ е равнобедрен и $AM$ е медиана в този триъгълник. Лесно се вижда, че $\triangle NBC$ – равнобедрен ($NM$ е медиана и височина в него), откъдето $BN=CN$. Аналогично $NA$ е медиана и височина в $\triangle PND$ и следователно $PN=DN$, т.е. $PC=PN+CN=DN+BN=BD$.




Нека $CP=BD$. През $B$ прекарваме права $BF\parallel CP$. Очевидно $PFBC$ е успоредник $\Rightarrow\angle CPD=\angle BFP$.
$\triangle DBF$ – равнобедрен ($CP=BF$) $\Rightarrow\angle NDA=\angle BFP=\angle CPD\Rightarrow$ $DN=NP$. Понеже $A$ е среда на $PD$, то $NA\perp AD$ и $NA\perp BC$. Следователно $AM\perp BC$, откъдето следва че $\triangle ABC$ е равнобедрен, т.е. $AB=AC$.

3 зад. Даденото равенство записваме във вида
$7x-7y+xy=8 \iff 7x-7y+xy-49=-41 \iff$
$x(7+y)-7(y+7)=-41 \iff (7-x)(7+y)=41$
Тъй като числото 41 е просто, последното равенство е вярно само в случаите, когато първият множител е равен на 1, -1, 41 или -41. Получаваме четири решения:
$x=6, y=34$; $x=8, y=-48$; $x=-34, y=-6$; $x=48, y=-8$

1 зад.) 7 точки
2 зад. а) 3 точки б) 4 точки (по 2 точки за всяко от двете твърдения)
3 зад.) 6 точки

Кратки решения на задачите за IX клас:

1 зад. а) $\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right):\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x})^2}\right):\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}=$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}\right):\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}=\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})+\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-\cancel{(\sqrt{1-x})^2}+\sqrt{1-x^2}+\cancel{(\sqrt{1-x})^2}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{1-x^2}\cdot|x|}{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{при } 0<x<1\\ -1 & \text{при } -1<x<0\end{cases}$$ (3 точки)

б) $\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x^2-ax}=\frac{1}{x}\iff\underbrace{\frac{\overset{x}{x}}{x-a}+\frac{\overset{1}{a}}{x(x-a)}=\frac{\overset{x-a}{1}}{x}}_{x(x-a)}\iff$

$x^2+a=x-a$ и $x\neq0,\ x\neq a$

$x^2-x+2a=0$, $D=1-8a\geqq0$ при $a\leqq\frac{1}{8}$, а $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{2}$

Ще проверим за кои $a\leqq\frac{1}{8}$ имаме $x_1=0,\ x_2=0,\ x_1=a$ и $x_2=a$, за да изключим тези стойности на $a$ от разглеждане:

$x_1=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2}=0$ – уравнението няма корени поради $1>0$ и $\sqrt{1-8a}\geqq0$;

$x_2=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2}=0\iff\sqrt{1-8a}=1\iff1=1-8a$ /по дефиниция на корен/ $\Rightarrow a=0$;

$x_1=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2}=a\iff\sqrt{1-8a}=2a-1$ – уравнението няма корени, тъй като $2a-1<0$ при $a\leqq\frac{1}{8}$;

$x_2=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2}=a\iff\sqrt{1-8a}=1-2a\iff(1-2a)^2=1-8a$, тъй като $1-2a>0$ при $a\leqq\frac{1}{8}$

$\Rightarrow 1-4a+4a^2=1-8a$, $4a^2+4a=0$, $4a(a+1)=0\Rightarrow a=0,\ a=-1$

$\Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2}$ е корен за всяко $a\leqq\frac{1}{8}$, а $x_2=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2}$ е корен при $a\leqq\frac{1}{8}$, $a\neq0$ и $a\neq-1$

И така, уравнението има корени $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{2}$ при $a\leqq\frac{1}{8}$, $a\neq0$ и $a\neq-1$; корен $x_1=1$ при $a=0$ и $x_1=2$ при $a=-1$; няма корени при $a>\frac{1}{8}$. (4 точки)

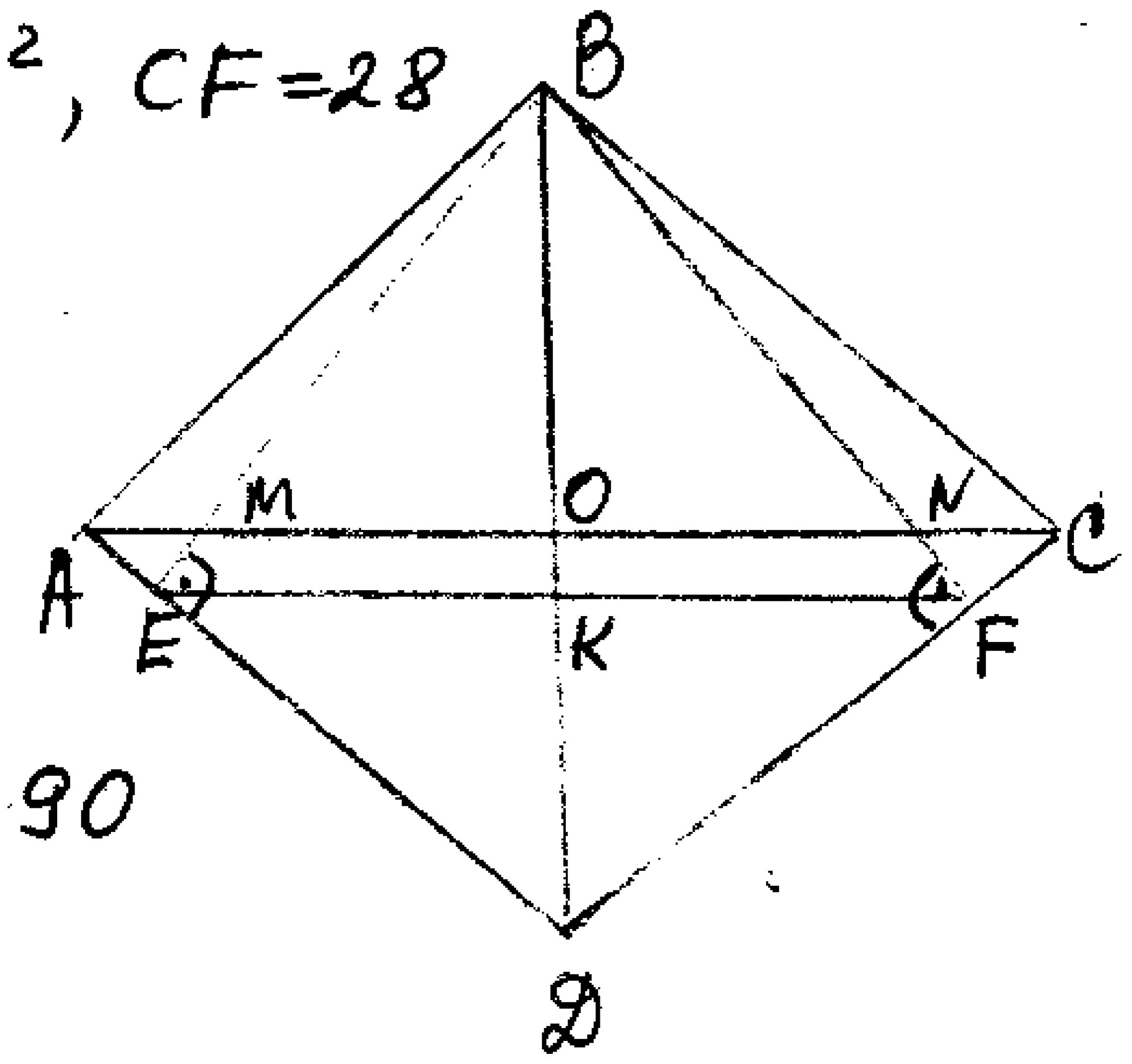
2 зад. $EMNF$ - трапец (?), $S = \frac{MN+EF}{2} . OK$

$\triangle ACD \sim \triangle EFD$, $\frac{EF}{AC} = \frac{DF}{DC}$

$CD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$, $CD = 100$ ; $S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2} = CD.BF \Rightarrow$

$0,5.160.120 = 100.BF$, $BF = 96$.

От $\triangle BCF$ : $CF^2 = BC^2 - BF^2$, $CF^2 = 100^2 - 96^2$, $CF = 28$




$DF = CD - CF = 72$

$EF = 115,2$

$\frac{OK}{OD} = \frac{CF}{CD}$ /т. Талес/ $\Rightarrow OK = 16,8$

$\triangle BMN \sim \triangle BEF \Rightarrow \frac{MN}{EF} = \frac{BO}{BK} \Rightarrow MN = 90$

$S_{EMNF} = \frac{90+115,2}{2} . 16,8 = \underline{\underline{1723,68 \text{ см}^2}}$ (6 точки)

3 зад. Да допуснем, че дадените числа са две по две различни. Тогава без ограничение на общността можем да считаме, че

$1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{100}$.

Оттук следва, че $n \leq x_n$ за всяко $n = 1, 2, \ldots, 100$. (1)

От друга страна $\sqrt{n-1} < \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ (2)

Следователно $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}} \overset{(2)}{<} 2(\sqrt{1}-0) + 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + \ldots + 2(\sqrt{100}-\sqrt{99}) = 20$

Но тогава $20 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}} < 20$,

което е противоречие. Заключаваме, че поне две от дадените числа са равни. (7 точки)

Зад. 1а) 3 точки б) 4 точки зад. 2) 6 точки зад. 3) 7 точки

# Кратки решения на задачите за X клас:

1 зад. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = u > 0 \Rightarrow u - \frac{1}{u} = \frac{65}{36} \Rightarrow 36u^2 - 65u - 36 = 0$

$D = 4225 + 5184$

$D = 9409$

$u_{1,2} = \frac{65 \pm 97}{72}$ $\nearrow u_1 = \frac{9}{4}$ $\searrow u_2 = -\frac{4}{9} < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x - y = 2$

$\left| \begin{array}{l} x - y = 2 \\ xy - x + y = 118 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x = 2 + y} \Rightarrow y(2+y) - (2+y) + y = 118$

$2y + y^2 - 2 - \cancel{y} + \cancel{y} = 118$

$y^2 + 2y - 120 = 0$

$D = 121$

$y_{1,2} = -1 \pm 11$ $\nearrow y_1 = -12 \Rightarrow x_1 = -10$ $\searrow y_2 = 10 \Rightarrow x_1 = 12$

Решения: $(-10; -12)$; $(12; 10)$

2 зад.

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x) =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) +$$
$$+ k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x + k(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}) =$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + k(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}) = k + 1 - (3 + 2k)\frac{\sin^2 2x}{4}.$$

а) Очевидно $f(x)$ няма да зависи от $x$ само когато $3 + 2k = 0$, т. е. при $k = -\frac{3}{2}$.

б) Уравнението $f(x) = 0$ е еквивалентно със $\sin^2 2x = \frac{4(1+k)}{3+2k}$ при $k \neq -\frac{3}{2}$. Следователно $0 \leq \frac{4(1+k)}{3+2k} \leq 1$, откъдето

$$-1 \leq k \leq -\frac{1}{2}.$$

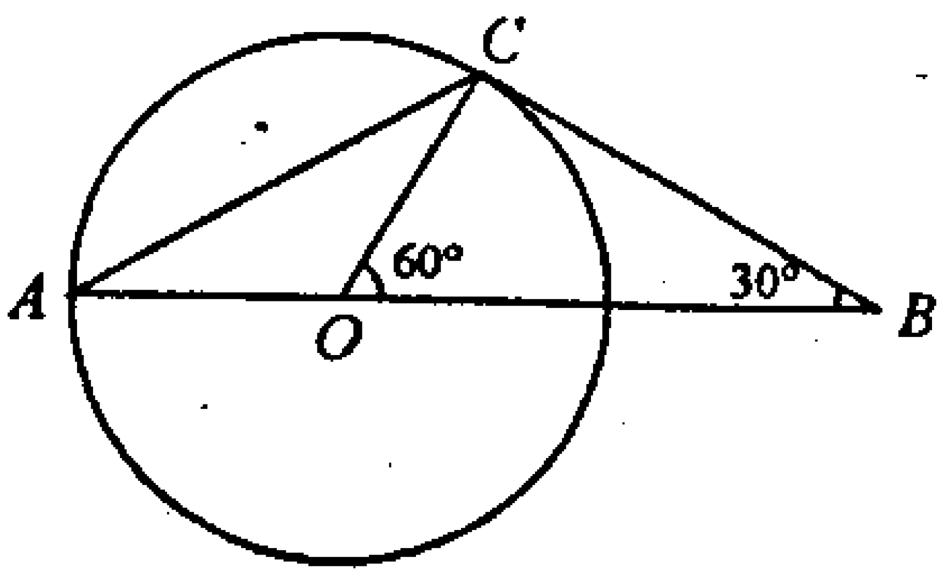
в) Понеже $-0,7 \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ и $\frac{4(1+k)}{3+2k} = \frac{4(1-0,7)}{3-1,4} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{3}{4}$, получаваме уравнението $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$, откъдето $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. След решаването на получените уравнения получаваме $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, където $k$ е произволно цяло число.

3зад. 1.

Нека $O$ е центърът на окръжността, която минава през $A$ и $C$, а $R$ е радиусът ѝ. Тъй като $BC$ се допира до тази окръжност, а $OC$ е радиус, то $OC \perp BC$. От правоъгълния триъгълник $OBC$ получаваме $OC = BC\operatorname{tg}30^\circ = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$. Следователно $OA = OC = R = 1$ и $\sphericalangle BOC = 60^\circ$.

Възможни са два случая:

а) Когато $O$ е между $A$ и $B$. Сега $\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BOC = 30^\circ$. Следователно $AC = BC = \sqrt{3}$. Също така $AB = AO + OB = 1+2 = 3$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Тогава полупериметъра $p$ на триъгълника $ABC$ е



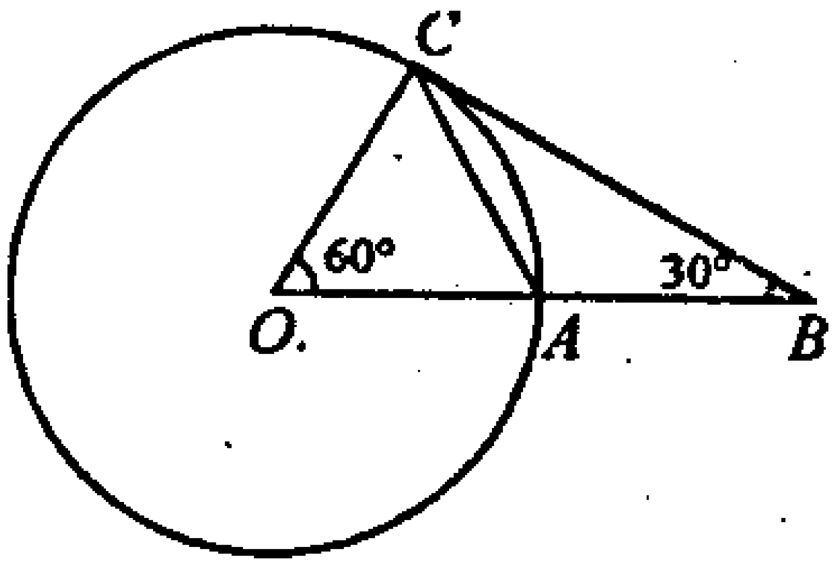

$$p = \sqrt{3} + \frac{3}{2},$$

а лицето му $S$ е

$$S = \frac{1}{2}3.\sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Тогава за радиуса $r$ на вписаната в триъгълника $ABC$ окръжност получаваме

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{2\sqrt{3}+3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2(2\sqrt{3}+3)} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{2} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{2}.$$




б) Центърът $O$ е външна точка за страната $AB$. Тъй като $\sphericalangle OBC$ е остър, то в този случай $A$ е между $O$ и $B$. Тогава триъгълникът $OAC$ е равностранен и следователно $\sphericalangle BAC = 120^\circ$, а $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. От друга страна $AB = OB - OA = 2 - 1 = 1$. Така получаваме, че $AB = AC = 1$ и $p = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Сега за лицето $S$ имаме

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Оттук за $r$ намираме

$$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}.$$

1зад.) 6 точки 2зад. а) 3 точки б) 4 точки 3зад.) 7 точки

# Кратки решения на задачите за XI и XII клас:

1 зад. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right].\left[\sqrt{(x+a)(x+b)} + x\right]}{\left[\sqrt{(x+a)(x+b)} + x\right]} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a+b)x + ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)} + 1} = \underline{\underline{\dfrac{a+b}{2}}}$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\right)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} =$

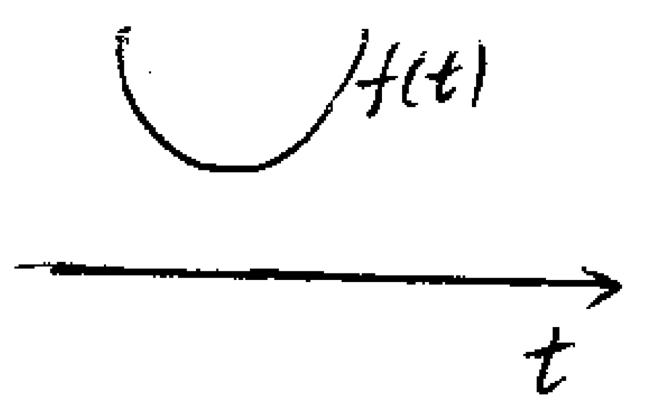
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}\right]} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$

2 зад. Полагаме $t = 2^{x^2}$. Очевидно $t \geqq 1$ за $\forall x$. Нека $f(t) = at^2 + 4(a-1)t + (a-1)$

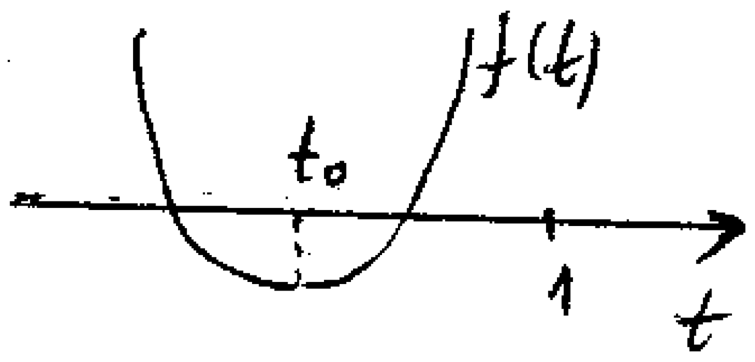
Ако $a = 0$, $f(t) = -4t - 1$ и не е изпълнено $f(t) > 0$ за $\forall t \geqq 1$

Ако $a \neq 0$

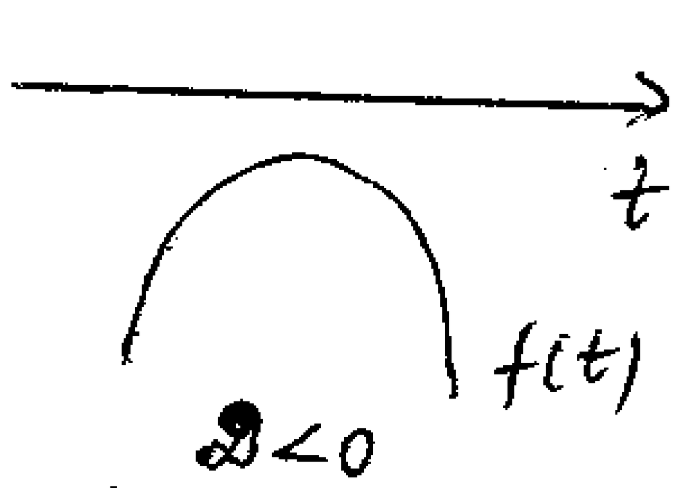
I сл.) $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$ Получаваме $a > 0$, $D = 3(a-1)\left(a - \frac{4}{3}\right) < 0 \Rightarrow a \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$.

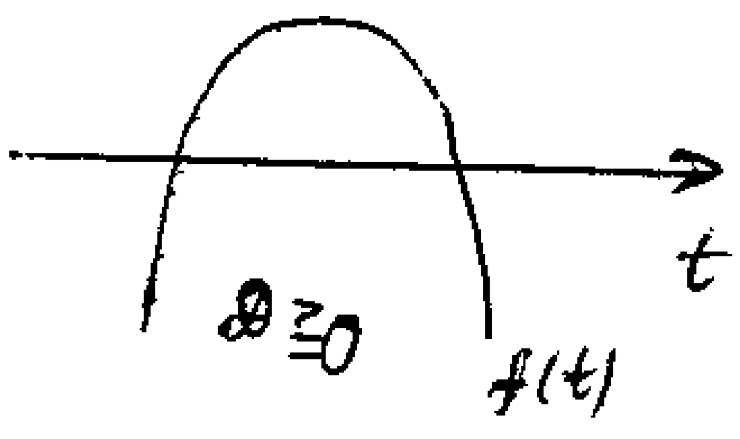



II сл.) $\begin{cases} a > 0 \\ D \geqq 0 \\ f(1) > 0 \\ t_0 = \frac{2(a-1)}{a} < 1 \end{cases}$ Получаваме $\begin{cases} a > 0 \\ D = 3(a-1)\left(a - \frac{4}{3}\right) \geqq 0 \\ f(1) = 6\left(a - \frac{5}{6}\right) > 0 \\ t_0 = -\frac{2(a-1)}{a} < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a \in \left(\frac{5}{6}; 1\right] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$



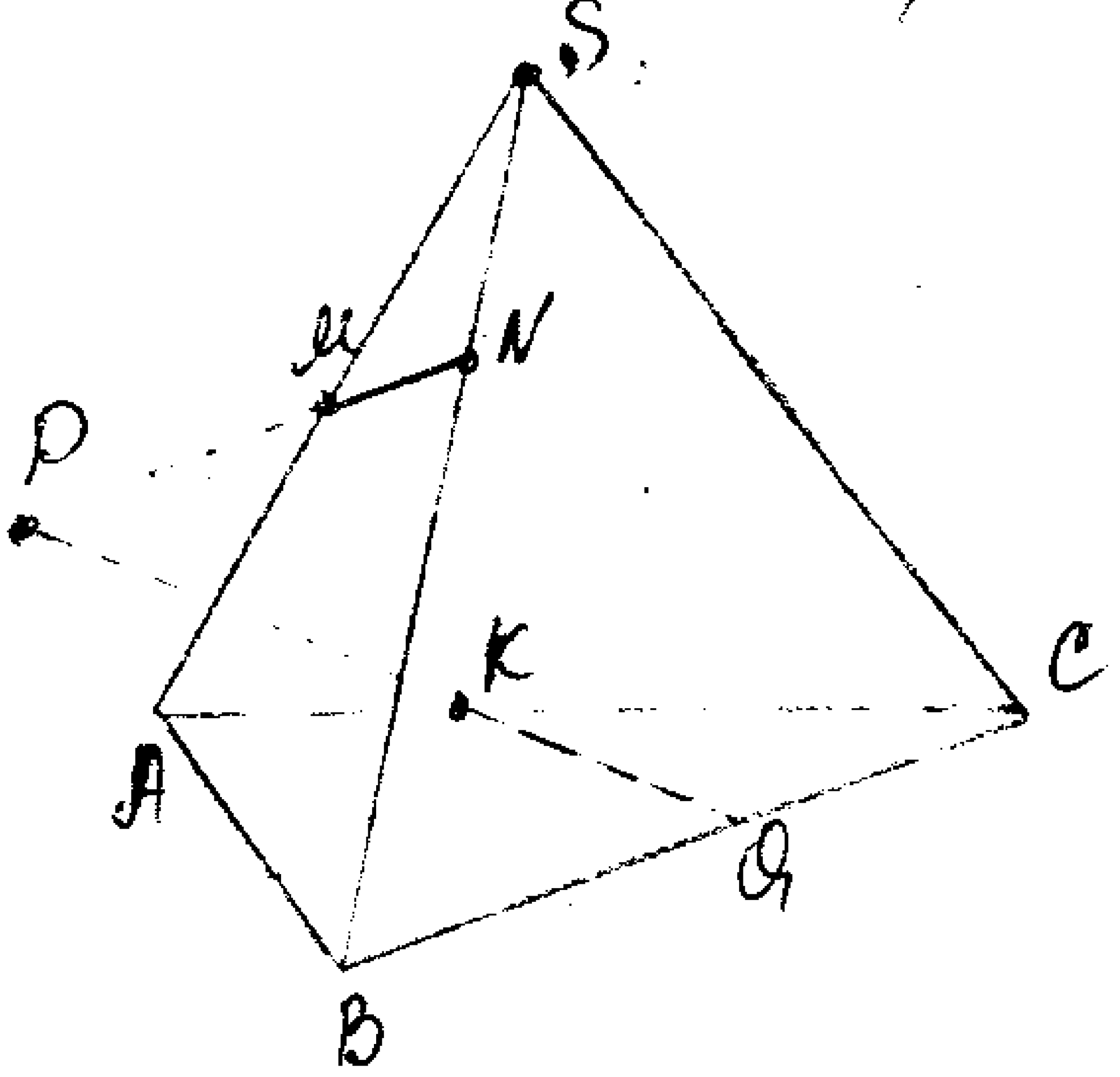

III сл.) При $a < 0$ няма стойност на $a$, за които за $\forall t \geqq 1$ е изпълнено $f(t) > 0$

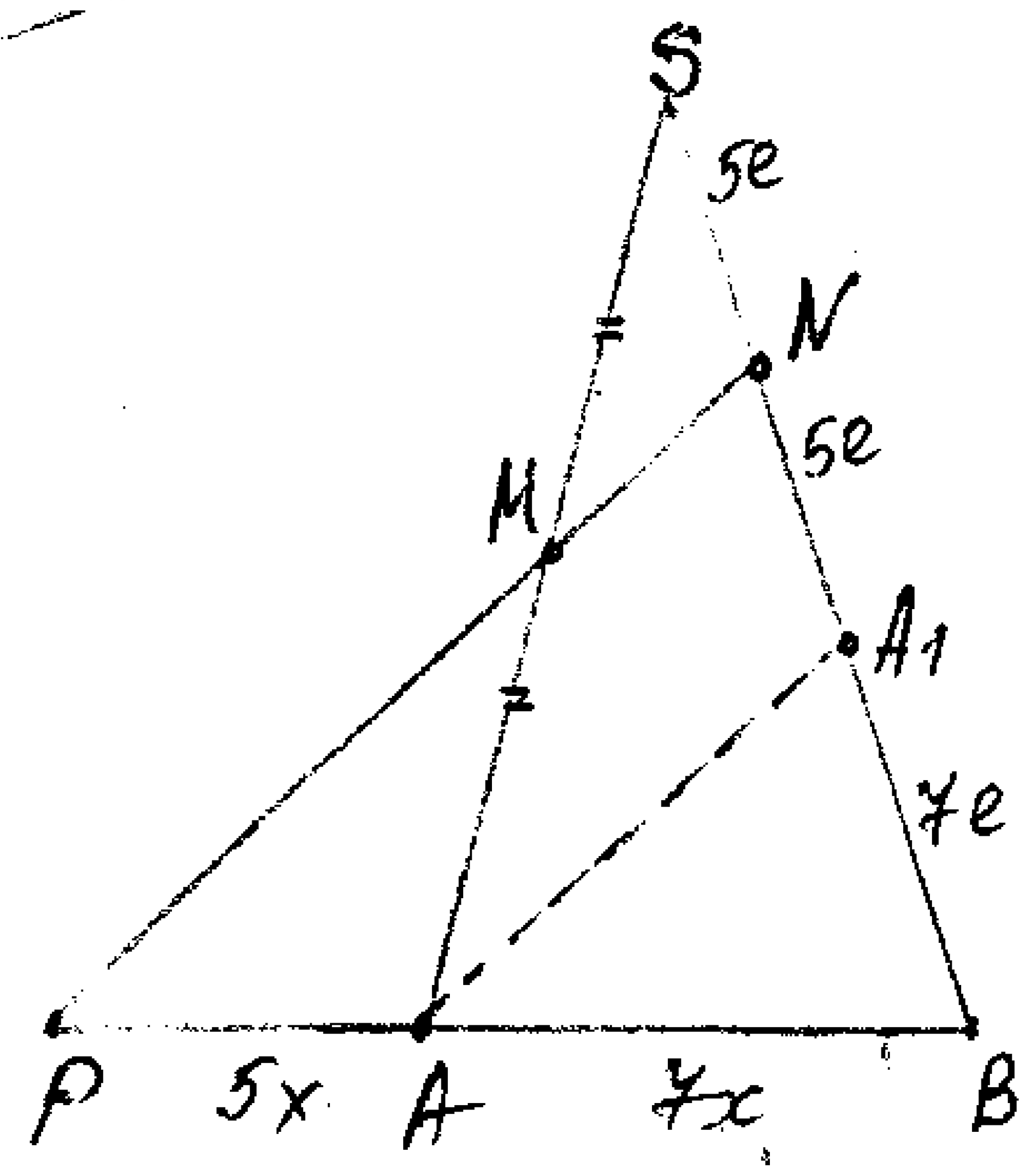



от I, II и III сл. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a \in \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)}}$

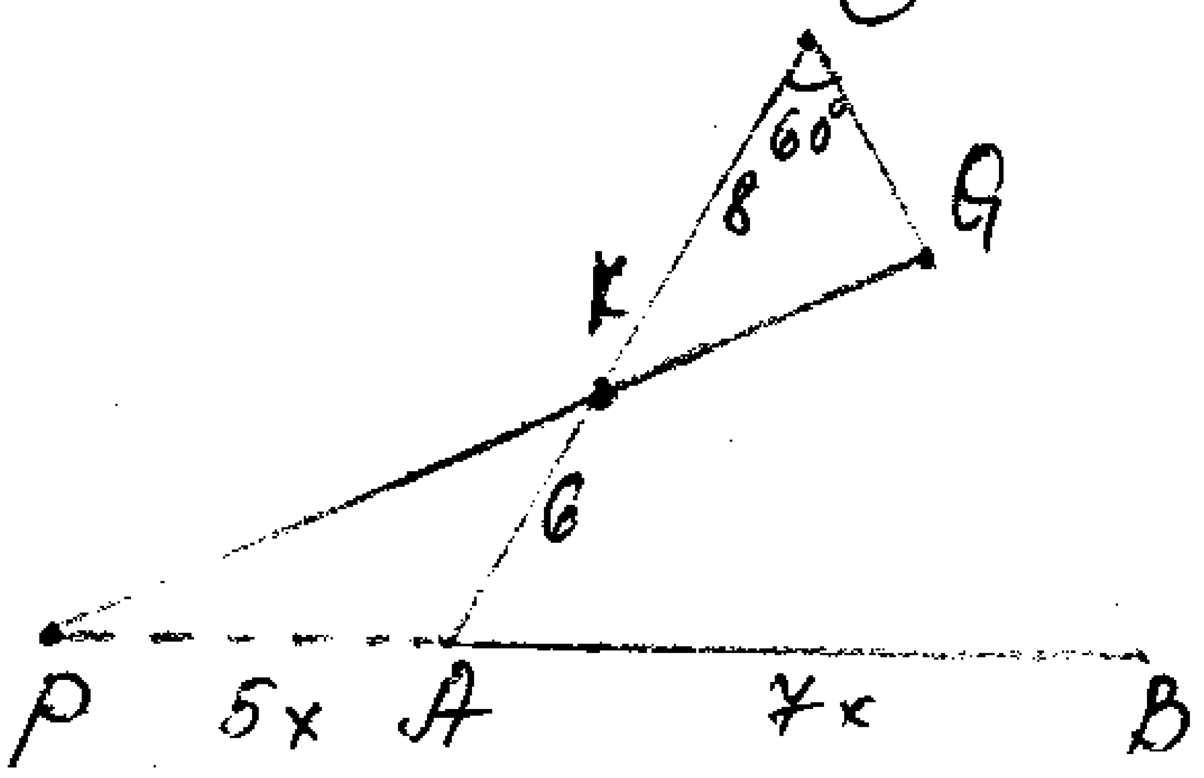
3 зад. Първо се намира пробода $P$ на $NM$ с равнината на основата $ABC$. Точката $P$ лежи на правата $BA$, т. $P \in MN$
$\Rightarrow P = AB \cap MN$




После се доказва, че $PA : AB = 5 : 7$

От $\triangle ABC$ – равностранен, намираме отсечката $KQ = 7$ см




1 зад. а) 3 точки б) 3 точки 2 зад.) 7 точки 3 зад.) 7 точки