Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА IV КЛАС

---

1 зад. а) Стойността на израза $(1\,015 : 5).7 + (15\,121 - 7\,945) : 8 - 2\,307$ да се сравни със стойността на x от равенството $4\,059 : 9 + 56 : x = 459$.

б) Намислих число. Увеличих го с 33. Полученият сбор увеличих 3 пъти. Полученото произведение намалих 7 пъти и полученото частно намалих с 11. Получих 7. Кое число съм намислил?

2 зад. От правоъгълник с размери 5 см и 2 см е изрязан правоъгълник с размери 2 см и 1 см така, че страна на отрязания правоъгълник лежи на страна на дадения. Да се намери обиколката и лицето на получената фигура.

3 зад. Колко пасти могат да изядат Пипи, Томи и Аника за 10 минути, ако Пипи изяжда за половин час 7 пасти, Томи изяжда за 20 минути 2 пасти, а Аника за 15 минути едва изяжда 1 паста?

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА V КЛАС

---

1 зад. Намерете реципрочната стойност на разликата А-В, където

$$A = \frac{31\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{13}{20} + \frac{7}{12} - 0{,}7\right) : 5{,}2}{1 - \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6}\right)} + \frac{37 : 7\frac{2}{5}}{6\frac{1}{5} - 0{,}5 : \frac{5}{37}} + \frac{1}{2},$$

а В е броя на седемцифрените числа, които се записват само с цифрите 1 и 2 и се делят на 36.

2 зад. През точката О в правоъгълника ABCD са прекарани две перпендикулярни прави, които разделят правоъгълника ABCD на четири правоъгълника AHOG, BEOH, CFOE и DGOF (точките H, E, F и G са разположени съответно върху отсечките AB, BC, CD и DA).

а) Ако е известно, че лицата на правоъгълниците DGOF, CFOE и AHOG са съответно 2 $см^2$, 4 $см^2$ и 6 $см^2$, да се намери лицето на правоъгълника ABCD.

б) Ако е известно, че обиколките на правоъгълниците DGOF, CFOE и AHOG са съответно 6 см, 10 см и 10 см, да се намери обиколката на правоъгълника ABCD.

3 зад. Една краставица тежи 300 г и водата, която се съдържа в нея е $\frac{99}{100}$ от нейното тегло. След известно време краставицата поизсъхнала и водата в нея вече била $\frac{98}{100}$ от теглото на краставицата. Колко тежи изсъхналата краставица?

Кратки решения на задачите за 4. клас:

(5т + 4т = 9т) 1зад. а)

$1015:5=203$ (0,5т)
$203.7=1421$ (0,5т)
$15121-7945=7176$ (0,5т)
$7176:8=897$ (0,5т)

$1421+897=2318$ (0,5т)
$2318-2307=\underline{\underline{11}}$ (0,5т)

$4059:9=451$ (0,5т)
$56:x=459-451=8$ (0,5т)
$x=56:8=\underline{\underline{7}}$ (0,5т)

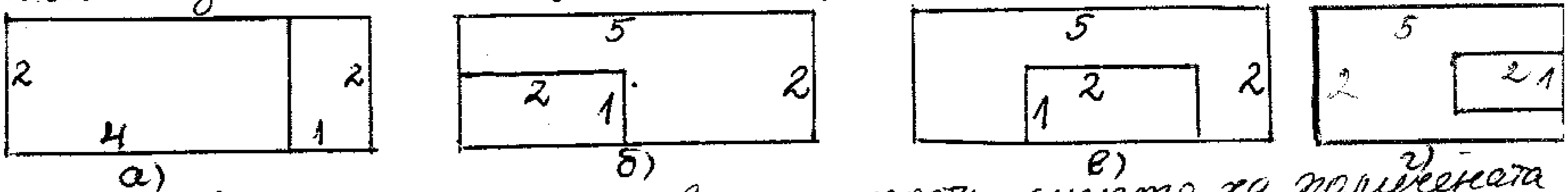
$\underline{\underline{11>7}}$ (0,5т)

Всичко: 5 точки

б) $(x+33).3:7-11=7$ (2т)
$(x+33).3:7=18$ (0,5т)
$(x+33).3=18.7=126$ (0,5т)
$x+33=126:3=42$ (0,5т)
$x=42-33=\underline{\underline{9}}$ (0,5т)

Всичко: 4 точки

(6т) 2зад. За изрязване на правоъгълник с размери 2 см и 1 см има три възможности, показани на чертежите а), б), в) и г)



При всяка от трите възможности, лицето на получената фигура е равно на $5.2-2.1=\underline{8 кв. см}$.
г) В този случай Р се увеличава с 4 см и става 18 см
Обиколката на дадения правоъгълник е $2(5+2)=14$ см
В случай а) обиколката на фигурата е с 2 см по-малка от обиколката на правоъгълника, т.е. $14-2=\underline{12 см}$.
В случай б) обиколката на фигурата е равна на обиколката на правоъгълника, т.е. $\underline{14 см}$.
В случай в) обиколката на фигурата е с 2 см по-голяма от обиколката на правоъгълника, т.е. $14+2=\underline{\underline{16 см}}$
По 1,5т за верни S и P във всеки един от трите случая – всичко: 6 точки

(5т) 3 зад. За 10 мин. Тоши изяжда 1 пасте (1т), а за 30 мин. – 3 пасти (1т)
За 30 мин. Анита изяжда 2 пасти (1т)
Тогава тримата заедно за половин час изяждат $7+3+2=12$ пасти (1т), а за 10 мин. – 3 пъти по-малко, т.е. $\underline{\underline{4 пасти}}$ (1т).

Всичко: 5 точки

Кратки решения на задачите за 5. клас:

(7т) 1зад.

$\frac{13}{20} + \frac{7}{12} - 0,7 = \frac{8}{15}$ (0,75т)

$31\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15} : 5,2 = \frac{16}{5}$ (0,75т)

$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} = \frac{1}{3}$ (0,75т)

$1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$ (0,5т)

$\frac{16}{5} : \frac{4}{5} = 4$ (0,25т)

$37 : 7\frac{2}{5} = 5$ (0,25т)

$6\frac{1}{5} - 0,5 : \frac{5}{37} = 2,5$ (0,5т)

$5 : 2,5 = 2$ (0,25т)

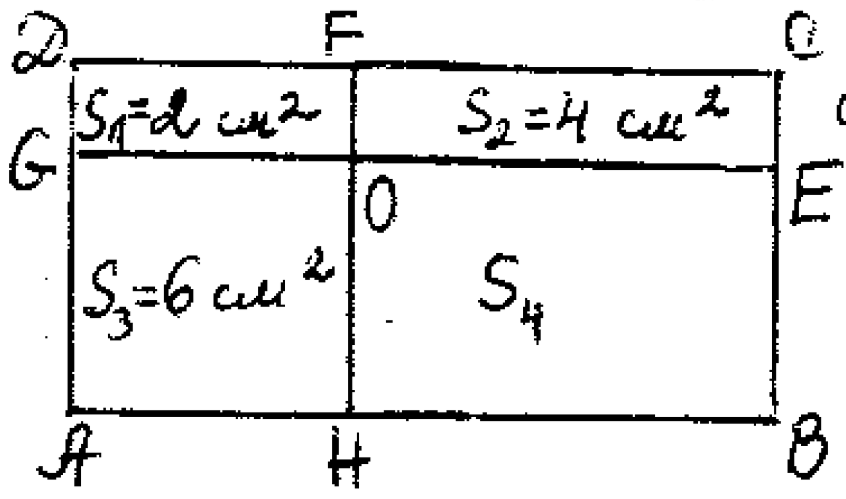
$A = 4 + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{6\frac{1}{2}}}$ (0,5т)

Седемцифрените числа, записани с цифрите 1 и 2, които се делят на 36 са: 1111212; 1112112; 1121112; 1211112; 2111112.
(използване признаците за делимост на 4 и 9)

$\Rightarrow \underline{\underline{B = 5}}$ (1,5т)

$A - B = 1\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ (0,5т) $\Rightarrow \frac{1}{A-B} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ (0,5т)   Всичко: 7т

(4т + 4т = 8т) 2зад.

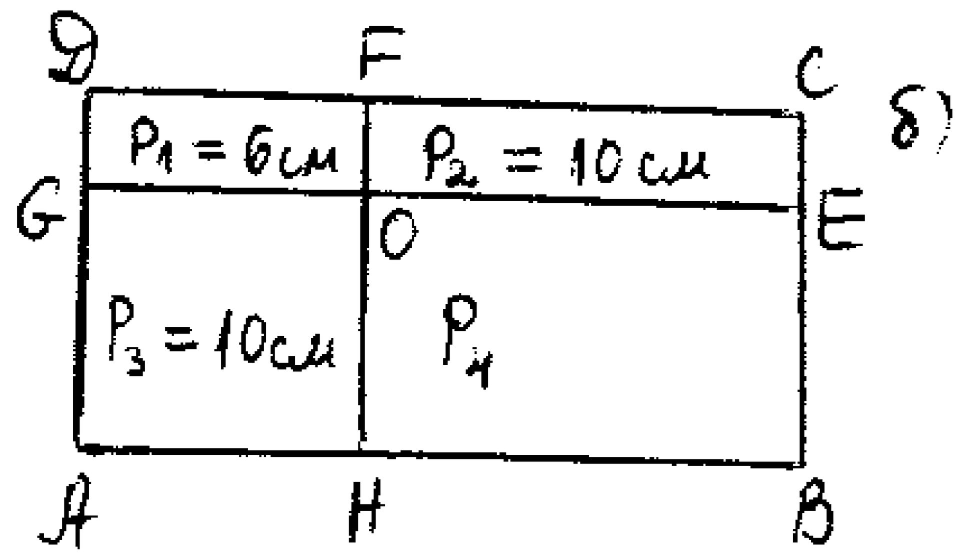


а) От условието следва, че $OE = 2.OG$ (1т) и $OH = 3.OF$ (1т)

Следователно $S_{BEOH} = 6.S_{DGOF} = 6.2 = 12$ см² $= S_4$ (1т)

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2 + 4 + 6 + 12 = 24$ см² (1т)

Всичко: 4т



б) $P_2 - P_1 = 10см - 6см = 4см \Rightarrow OE = OG + 2$ см (1т)

$P_3 - P_1 = 10см - 6см = 4см \Rightarrow OH = OF + 2$ см (1т)

$\Rightarrow P_4 = 2(OH + OE) = 2(OF + 2 + OG + 2) = P_1 + 8 =$
$= 6 + 8 = 14$ см (1т)

$P_{ABCD} = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) : 2 = (6 + 10 + 10 + 14) : 2 = 20$ см (1т)

Всичко: 4т

(5т) 3зад. Първоначално: 300 г (всичко)

$\frac{99}{100} . 300 = 297$ г (вода) (0,5т)

$300 - 297 = 3$ г (ост. част) (0,5т)

След време: x г (всичко) (0,5т)

$x - 3$ г (вода) (0,5т)

Запазва се ост. част – 3 г

$\Rightarrow \frac{98}{100} . x = x - 3 \Rightarrow \frac{98x}{100} = x - 3 \Rightarrow 98x = 100(x-3) \Rightarrow$
(2 точки за съставяне на уравнение)

$98x = 100x - 300 \Rightarrow 98x + 300 = 100x \Rightarrow 300 = 100x - 98x \Rightarrow$

$300 = 2x \Rightarrow x = 300 : 2 \Rightarrow \underline{x = 150}$ г (тежи изс. праск.)

(1 точка за решаване на уравнението)

Всичко: 5т

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА VI КЛАС

1 зад. Да се намери модула на разликата А – В ,където

$$A = \frac{\left(19\frac{1}{6} - 24\frac{2}{3}\right) : \frac{11}{4}}{(13,3 - 11,5) : 1,8} + \left(\frac{1}{2,5-1} - \frac{1}{3,5-1}\right) : \left(-\frac{4}{15}\right),$$

а В е стойността на израза $\dfrac{2m-7n}{2n-m}$, ако $n \neq 0$ и $\dfrac{m}{n} = -3$.

2 зад. В три цистерни имало общо 1560 л мляко .Ако от първата цистерна са продали $\frac{3}{7}$, от втората – $\frac{1}{4}$,а от третата – $\frac{1}{5}$,ще останат равни количества мляко във всяка от цистерните.По колко литра мляко е имало първоначално в първата,втората и третата цистерна съответно?

3 зад. Права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ има лице на основата 30 см^2. Върху основните ръбове АВ и ВС са взети съответно точките М и N , такива че AM = 2MB и BN = NC. Точката Р е пресечната точка на AN и CM . Върху околния ръб ръб на призмата BB_1 е взета точка S ,такава че $BS : SB_1 = 1:2$.

а)Да се намери лицето на четириъгълника MBNP.

б)Да се намери отношението от обемите на пирамидата MBNPS и призмата $ABCA_1B_1C_1$.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА VII КЛАС

1 зад. а) Разложете на множители многочлена $x^2 - 8x - y^2 - 10y - 9$.

б) Представете с нормален многочлен израза:

$$M = \left(\frac{2x-1}{2}\right)^3 - \frac{5 - \frac{x-1}{2}}{4} - (x + a - 1)^2 + 1,5 \text{, където } a \text{ е константа.}$$

Определете за коя стойност на а многочленът М не съдържа едночлен от първа степен на х .За коя стойност на а едночленът от нулева степен в нормалния вид на М приема най-голяма стойност?

2 зад. Правоъгълна градина с дължина х метра и широчина у метра , където х и у са цели числа ,трябва да се огради от четирите страни с пътека , широка 1 метър.Лицето на пътеката е равно на лицето на градината .Да се намерят размерите на градината.

3 зад. а) Съществува ли триъгълник ,на който външните ъгли да се отнасят така,както 1:1:2?

б) Даден е равнобедрен триъгълник АВС с бедра АС и ВС и ъгъл между тях 20°.Правите k_1 и k_2 минават съответно през върховете А и В и пресичат бедрата ВС и АС съответно в точките М и N , като ∢ MAB = ∢ NBA = 60°. Докажете, че триъгълник MNO е равностранен , където О е пресечната точка на AM и BN .Ако върху бедрото ВС е избрана точка Р така, че ∢ BAP= 50°, то намерете ∢ BNP .

Кратки решения на задачите за 6. клас:

(7т) 1зад.

$19\frac{1}{6}-24\frac{2}{3}=-\frac{33}{6}$ (0,5т)

$\left(-\frac{33}{6}\right):\frac{11}{4}=-2$ (0,5т)

$13,3-11,5=1,8$ (0,25т)

$1,8:1,8=1$ (0,25т)

$\frac{-2}{1}=-2$ (0,5т)

$2,5-1=1,5$ (0,25т)

$\frac{1}{1,5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ (0,5т)

$3,5-1=2,5$ (0,25т)

$\frac{1}{2,5}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$ (0,5т)

$\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ (0,5т)

$\frac{4}{15}:\left(-\frac{4}{15}\right)=-1$ (0,5т)

$A=(-2)+(-1)=\underline{\underline{-3}}$ (0,5т) 5т.

$$B=\frac{2m-7n}{2n-m}=\frac{\cancel{n}.\left(2\frac{m}{n}-7\right)}{\cancel{n}.\left(2-\frac{m}{n}\right)}=\frac{2(-3)-7}{2-(-3)}=\underline{\underline{\frac{-13}{5}}}\ (1т)$$

$A-B=-3-\left(-\frac{13}{5}\right)=-3+2,6=\underline{\underline{-0,4}}$ (0,5т)

$|A-B|=\left|-\frac{4}{10}\right|=\frac{2}{5}=\underline{\underline{0,4}}$ (0,5т) Всичко: 7т

(6т) 2зад.

колич. мляко	първон.	продали	останало
I цист.	x л ($x>0$)	$\frac{3}{7}x$	$\frac{4}{7}.x$
II цист.	y л ($y>0$)	$\frac{1}{4}.y$	$\frac{3}{4}.y$
III цист.	z л ($z>0$)	$\frac{1}{5}.z$	$\frac{4}{5}z$
Всичко:	1560 л		

Съгл. условието $\frac{4}{7}x=\frac{3}{4}y=\frac{4}{5}z \Rightarrow$

$\frac{4x}{7}=\frac{3y}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{21}{16} \Leftrightarrow x:y=21:16$ (1т)

$\frac{3y}{4}=\frac{4z}{5} \Leftrightarrow \frac{y}{z}=\frac{16}{15} \Leftrightarrow y:z=16:15$ (1т)

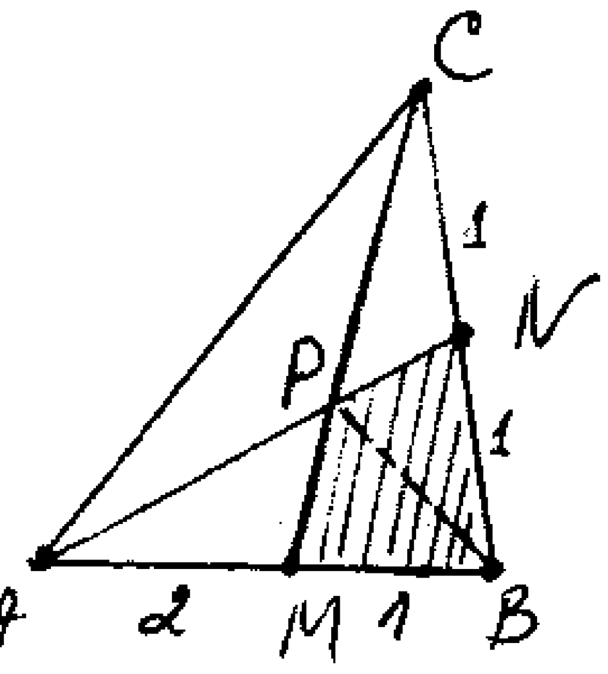
$\Rightarrow x:y:z=21:16:15$ (1т)

$x=21k,\ y=16k,\ z=15k \Rightarrow 21k+16k+15k=1560$ (1т) $\Rightarrow 52k=1560 \Rightarrow k=30$ (0,5т)

Следов. в I цист. е имало $21.30=\underline{\underline{630}}$ л мляко (0,5т), във II цист. – $16.30=\underline{\underline{480}}$ л (0,5т), а в III цист. – $15.30=\underline{\underline{450}}$ л (0,5т). Всичко: 6т

3зад.

4,5т
2,5т
7т



а) От $CN=NB \overset{(1т)}{\Rightarrow} S_{ABN}=S_{ACN}$ и $S_{PBN}=S_{PCN}=x \Rightarrow$

$S_{APC}=S_{APB}$

От $AM=2MB \overset{(1т)}{\Rightarrow} S_{AMP}=2.S_{MBP}=2.y$ ($S_{MBP}=y$)

и $S_{AMC}=\frac{2}{3}S_{ABC}=20$ cm^2 $\Rightarrow S_{APC}=S_{APB}=2y+y=3y$

$\Rightarrow S_{AMC}=S_{APC}+S_{AMP}=3y+2y=5y$, откъдето $5y=20$ или $y=4$ cm^2 (1т)

От $S_{ABN}=\frac{1}{2}S_{ABC}$ и $S_{ABN}=3y+x \Rightarrow 15=3.4+x \Rightarrow x=3$ cm^2 (1т)

Следователно $S_{MBNP}=S_{MBP}+S_{BNP}=4+3=\underline{\underline{7\text{ cm}^2}}$ (0,5т) Всичко: 4,5т

б) $V_1=V_{MBNPS}=\frac{1}{3}.S_{MBNP}.BS=\frac{7}{3}.\frac{1}{3}.BB_1=\underline{\underline{\frac{7}{9}BB_1\text{ cm}^3}}$ (1т)

$V_2=V_{ABCA_1B_1C_1}=S_{ABC}.BB_1=\underline{\underline{30.BB_1\text{ cm}^3}}$ (1т)

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{7}{9}.BB_1}{30.BB_1}=\underline{\underline{\frac{7}{270}}}$ (0,5т)

Всичко: 2,5т

Кратки решения на задачите за 7. клас:

(2т, 6т, 3т) 1зад.

а) $x^2-8x-y^2-10y-9 = x^2-8x+16-y^2-10y-25-9\underbrace{-16+25}_{(0,5т)} =$
$=(x^2-8x+16)-(y^2+10y+25) = \underbrace{(x-4)^2}_{(0,5т)}-\underbrace{(y+5)^2}_{(0,5т)} = \underbrace{(x-4+y+5)(x-4-y-5)}_{(0,5т)} =$
$=(x+y+1)(x-y-9)$

Всичко: 2т

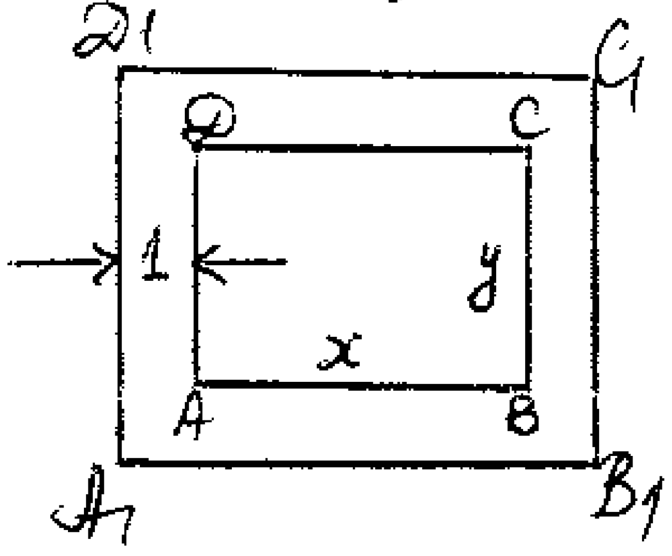
б) $M = \dfrac{8x^3-12x^2+6x-1}{8} - \dfrac{\frac{10-x+1}{2}}{4} - (x^2+a^2+1+2ax-2x-2a)+1,5 =$
$= \dfrac{8x^3-12x^2+6x-1-10+x-1}{8} - x^2-a^2-1-2ax+2x+2a+1,5 =$
$= x^3 - \dfrac{^3\cancel{12}x^2}{\cancel{8}_2} + \dfrac{7x}{8} - \dfrac{^3\cancel{12}}{\cancel{8}_2} - x^2-a^2-2ax+2x+2a+0,5 =$
$= x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + \left(\dfrac{23}{8}-2a\right).x - a^2+2a-1$ (за вярно приведение - 1т)

От усл. $\dfrac{23}{8}-2a=0 \Rightarrow 2a=\dfrac{23}{8} \Rightarrow a=\dfrac{23}{16}$ (1т)

за формулата $(a-b)^3$ - 0,5т
за формулата $(a+b-c)^2$ - 0,5т
за $\dfrac{\frac{10-x+1}{2}}{4} = \dfrac{10-x+1}{8}$ - 0,25т
за правилно разкрити скоби със знак „-" - 3пъти × 0,25т = 0,75т

$-a^2+2a-1 = -(a^2-2a+1) = -(a-1)^2 \leq 0$ за $\forall a \Rightarrow$ НГСт на $-a^2+2a-1$ ще се получи за най-малката стойност на $(a-1)^2 \geq 0$ за $\forall a$, а тя е нула и се получава за $\underline{a=1}$ (2т) Всичко: 6т

(4т) 2зад.

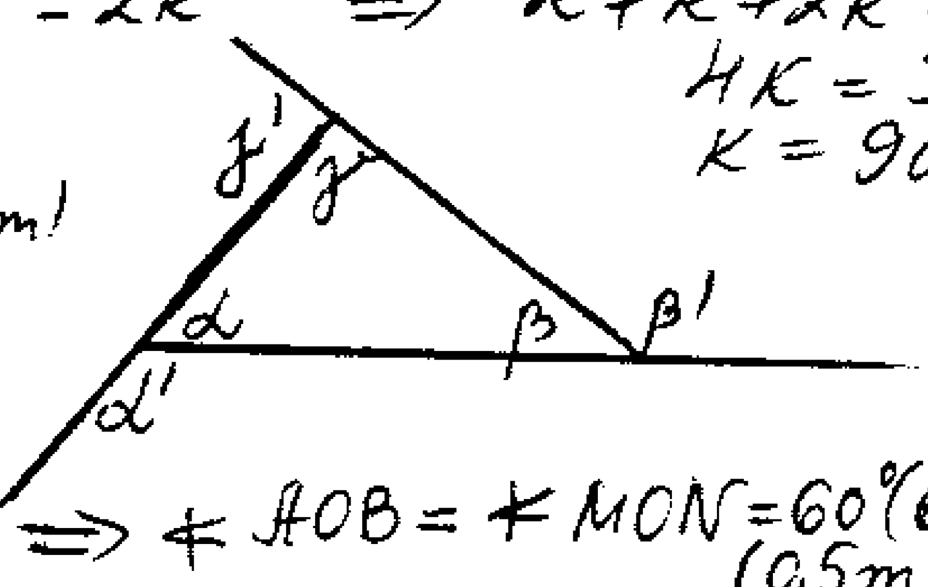


$S_{A_1B_1C_1D_1} = (x+2)(y+2)$
$S_{ABCD} = x.y$
От усл. $S_{A_1B_1C_1D_1} = 2xy$
$\Rightarrow (x+2)(y+2) = 2xy$ (1т за модел) $\Rightarrow$
$xy+2x+2y+4 = 2xy \Rightarrow xy-2x-2y-4=0 \Rightarrow$
$xy-2x-2y+4-8=0 \Rightarrow x(y-2)-2(y-2)=8 \Rightarrow (x-2)(y-2)=8$ (1т)
Тъй като $x \geq y$, от равенството $8=1.8=2.4$, следва, че
$x-2=8$ и $y-2=1$ или $x-2=4$ и $y-2=2$ $\Rightarrow \underline{x=10, y=3}$ (1т) или $\underline{x=6, y=4}$ (1т)

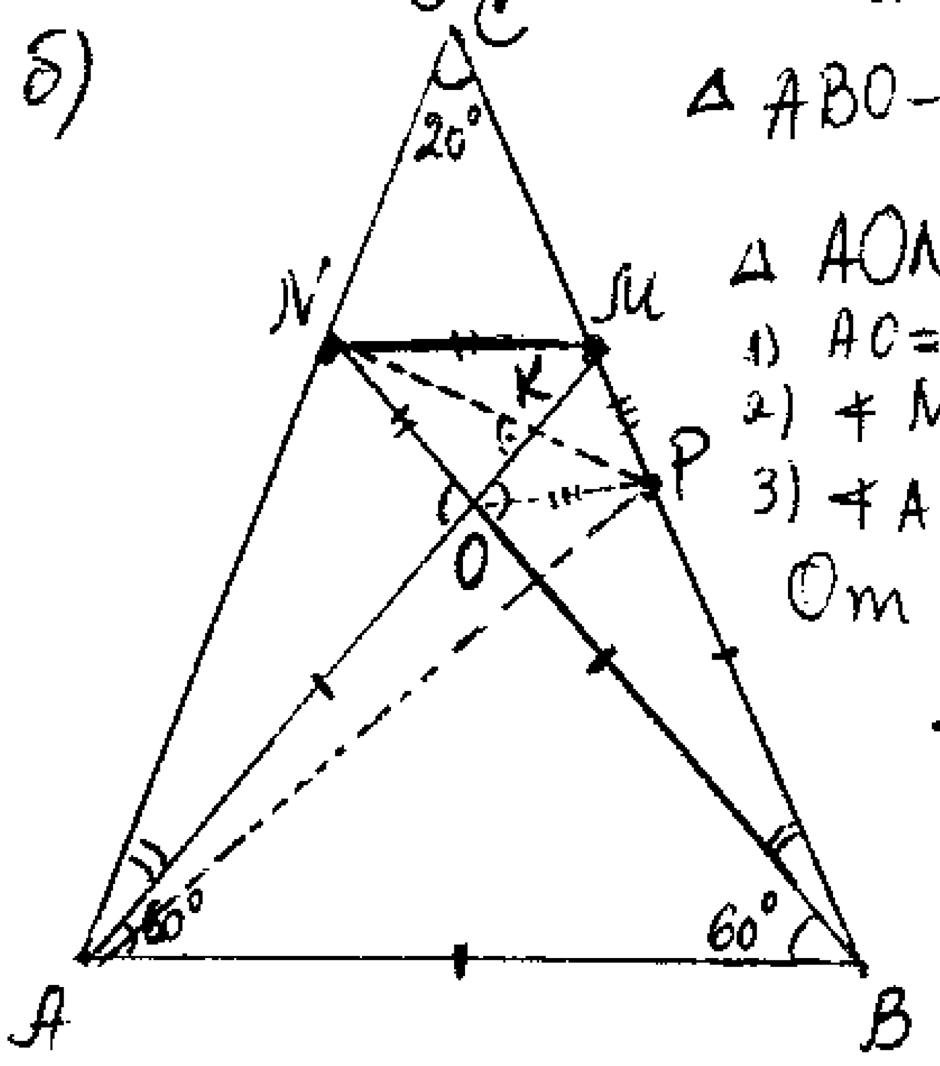
(1т + 7т / 8т) 3зад. а) Тъй като сбора от външните ъгли на един триъгълник е $360°$ (0,5т), то ако $\alpha'=k$, $\beta'=k$, $\gamma'=2k$ $\Rightarrow$ $k+k+2k=360°$, $4k=360°$, $k=90°$ $\Rightarrow$

$\alpha'=90° \Rightarrow \alpha=90°$
$\beta'=90° \Rightarrow \beta=90°$
$\gamma'=180° \Rightarrow \gamma=0°$
$\Rightarrow$ такъв триъгълник (0,5т) не съществува

Всичко: 1т



б)



$\triangle ABO$ - равностранен $\Rightarrow \angle AOB = \angle MON = 60°$ (връхни) (0,5т) и $AO=BO$ (0,5т)

$\triangle AON \cong \triangle BOM$ (по II пр.) $\Rightarrow NO=MO$ (0,5т)
1) $AO=BO$
2) $\angle NAO = \angle MBO = 20°$
3) $\angle AON = \angle BOM$ (вр.)
(0,5т)

От $NO=MO$ и $\angle MON=60° \Rightarrow \underline{\triangle MON \text{ - равностранен}}$ (1т)

$\angle PAB=50°$ по усл. $\Rightarrow \angle APB = 180°-50°-80° = 50° \Rightarrow AB=PB$ (0,5т)
Но $AB=AO=BO$, следователно $OB=OP$ (0,5т)
$\angle POB = \angle OPB = (180°-20°):2 = 80°$ (0,5т)
$\angle MOP = \angle NOB - \angle NOM - \angle BOP = 180°-60°-80° = 40°$ (0,5т)
$\angle AMB = 180°-60°-80° = 40°$ (от $\triangle ABM$) (0,5т)
$\Rightarrow OP=MP$ ①

Но $NO=MN$ ②. От ① и ② $\Rightarrow NP$ е симетрала на MO (1т)
$\angle BNP = 180°-90°-60° = \underline{30°}$ (от $\triangle OKN$) (0,5т) Всичко: 7т

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА VIII КЛАС

1 зад. а) Да се докаже, че ако $ab+bc+ca=1$, то

$$\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}+\frac{c}{c^2-1}=\frac{4abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)},$$

където $a\neq\pm1$, $b\neq\pm1$, $c\neq\pm1$.

б) Нека $xyz\neq0$, $(x+y).(y+z).(z+x)\neq0$ и $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$.

Да се намери стойността на израза $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}$.

2 зад. Даден е триъгълник ABC. Точката M е средата на BC, а P и Q делят AC на три равни части (P е между Q и C). Правите PM и QM пресичат правата AB съответно в точките T и S. Да се докаже, че медицентровете на триъгълник ABC и триъгълник STC съвпадат.

3 зад. Докажете, че числата $A=1979^2+2^{1979}$ и $B=1979$ са взаимно прости.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА IX* КЛАС

1 зад. Да се реши уравнението:

$$\frac{2-a^2}{4ax^2-4ax+a}-\frac{1}{1-4x^2}=\frac{a^2+a-10}{8ax^3-4ax^2-2ax+a},$$

където x е неизвестно, a е параметър.

2 зад. Ъглополовящите AA_1, BB_1 и CC_1 на триъгълник ABC се пресичат в т.M. Радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците MB_1A, MC_1A, MC_1B, MA_1B, MA_1C и MB_1C са равни.

а) Да се докаже, че в четириъгълниците AC_1MB_1, BA_1MC_1 и CB_1MA_1 могат да се впишат окръжности.

б) Да се докаже, че триъгълник ABC е равностранен.

3 зад. Да се докаже, че $5^{2n+1}+3^2.2^{n+1}$ се дели на 23 за всяко естествено число n.

Кратки решения на задачите за 8. клас:

$\left(\begin{array}{l}4m\\+4m\\\hline 8m\end{array}\right)$ 1зад. а)

$$\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}+\frac{c}{c^2-1}=\frac{a(b^2-1)(c^2-1)+b(a^2-1)(c^2-1)+c(a^2-1)(b^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}\ (0,5m) =$$

$$=\frac{ab^2c^2-ac^2-ab^2+a+ba^2c^2-bc^2-ba^2+b+ca^2b^2-cb^2-ca^2+c}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}=\frac{abc(\overbrace{bc+ac+ab}^{1\ (0,5m)})-ac^2-ab^2-bc^2-ba^2-cb^2-ca^2+a+b+c}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}=$$

$$=\frac{abc-ac^2-ab^2-bc^2-ba^2-cb^2-ca^2+a+b+c+3abc-3abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}\ (1m)=\frac{4abc-c(\overbrace{ac+bc+ab}^{1\ (0,5m)})-b(\overbrace{ab+cb+ac}^{1\ (0,5m)})-a(\overbrace{ba+ca+bc}^{1\ (0,5m)})+(a+b+c)}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}$$

$$=\frac{4abc-(a+b+c)+(a+b+c)}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}=\frac{4abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}\ (0,5m)$$

Всичко: 4 m

б) Прибавяме числото 1 към трите страни на $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ и след привеждане към общ знаменател получаваме

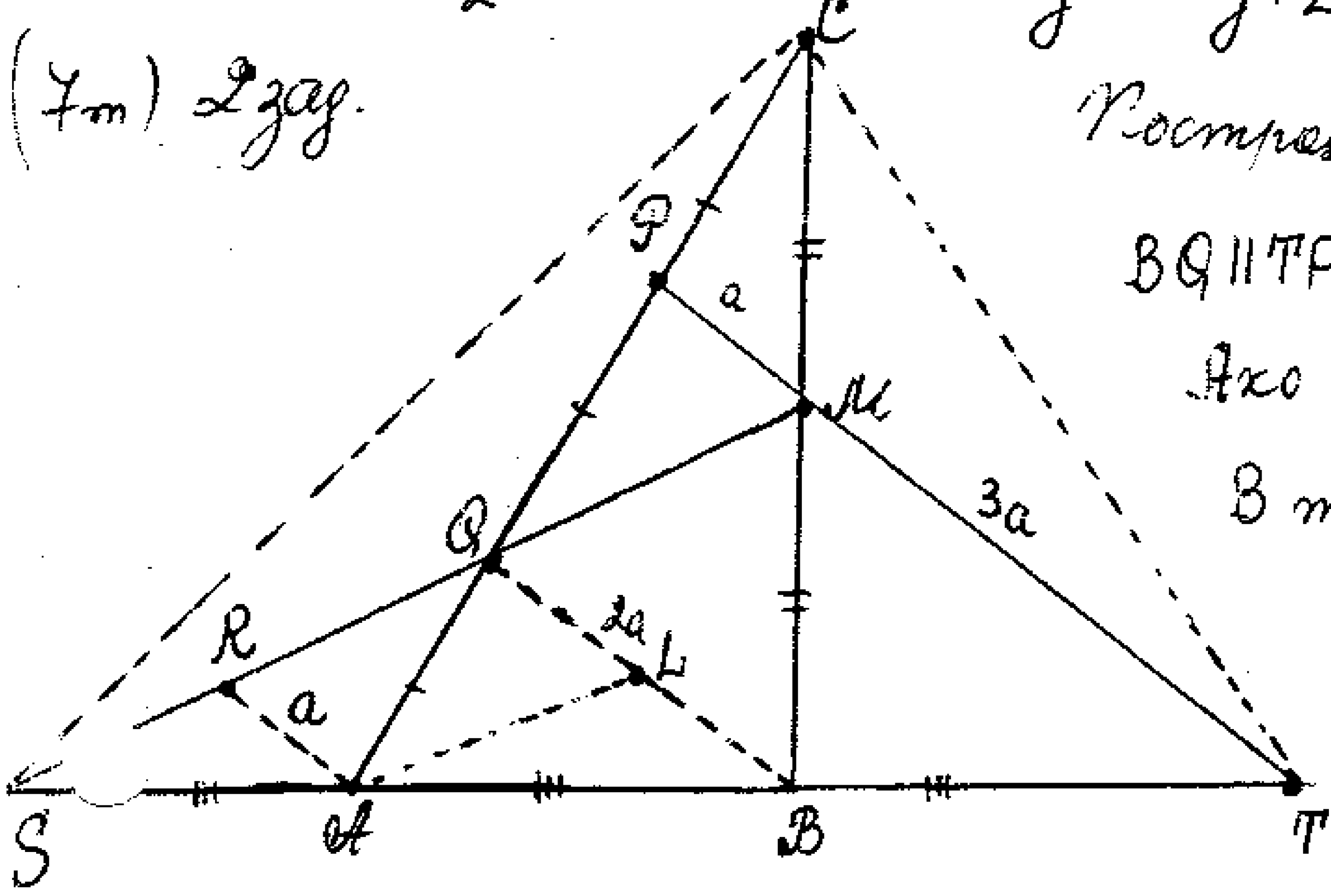
$\frac{x+y+z}{y+z}=\frac{y+z+x}{z+x}=\frac{z+x+y}{x+y}$. Ако $x+y+z\neq 0$, то $y+z=z+x=x+y\Rightarrow$

$\underline{y=x=z}\ (1m)\Rightarrow \frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}=\frac{x+x}{x}+\frac{x+x}{x}+\frac{x}{x+x}+\frac{x}{x+x}=\underline{\underline{5}}\ (1m)$

Ако $x+y+z=0$, то $\underline{x+y=-z,\ y+z=-x,\ z+x=-y}\ (1m)\Rightarrow$

$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}=\frac{-z}{z}+\frac{-x}{x}+\frac{z}{-z}+\frac{x}{-x}=\underline{\underline{-4}}$ (1m) Всичко: 4m

(7m) 2зад.



Построяваме BQ и $AR\parallel BQ$. PM - ср. отс. в $\triangle QBC\Rightarrow PM\parallel BQ$ (1m)

$BQ\parallel TP$ и $AQ=QP\Rightarrow BQ$ - ср. отс. в $\triangle ATP\Rightarrow AB=BT$ (1m) и $BQ=\frac{PT}{2}$

Ако $PM=a$, то $BQ=2a$ и $PT=4a\Rightarrow MT=3a$ (1m)

В трапеца $ATMR$ отс. BQ - ср. основа $\Rightarrow BQ=\frac{MT+AR}{2}$

$2a=\frac{3a+AR}{2}\Rightarrow AR=a$ (1m)

Ако AL - медиана в $\triangle ABQ$, то $QL=LB=a$

От $AR=QL=a$ и $AR\parallel QL\Rightarrow ALQR$ - успоредник и $AL\parallel RQ\Rightarrow LA$ - ср. отс. в $\triangle SBQ\Rightarrow SA=AB$ (1m)

Ако CK е медиана в $\triangle ABC$, то тъй като $AS=AB=BT$, то CK е медиана и в $\triangle TCS$ (1m)

Ако G_1 - медицентър на $\triangle ABC$, то $G_1\in CK$ и $\frac{CG_1}{G_1K}=\frac{2}{1}$

Ако G_2 - медицентър на $\triangle TCS$, то $G_2\in CK$ и $\frac{CG_2}{G_2K}=\frac{2}{1}$ $\Big\}\Rightarrow \underline{\underline{G_1\equiv G_2}}$ (1m)

Всичко: 7m

(5m) 3зад. Да допуснем, че $A=1979^2+2^{1979}$ и $B=1979$ не са взаимно прости, т.е. A и B имат общ делител $p>1\overset{(1m)}{\Longrightarrow} A=p.n$ и $B=p.l\ (1m)\Rightarrow$

$A=B^2+2^{1979}=(pl)^2+2^{1979}=p.n\ (1m)\Rightarrow p.(n-pl^2)=2^{1979}\Rightarrow p\,|\,2^{1979}\ (1m)\Rightarrow$

p - четно $\Rightarrow B=p.l$ - четно (противоречие) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A \text{ и } B \text{ са взаимно прости}}}$ (1m)

Но $B=1979$ по условие

Всичко: 5m

Кратки решения на задачите за 9 клас:

(7т) 1 зад. $\dfrac{\overset{2x+1}{2-a^2}}{a(2x-1)^2}-\dfrac{\overset{a(1-2x)}{1}}{(1-2x)(1+2x)}=\dfrac{\overset{1}{a^2+a-10}}{a(2x-1)^2(2x+1)}$, ДМ: $x\neq\pm\frac{1}{2}$, $a\neq 0$

$(2-a^2)(2x+1)-a(1-2x)=a^2+a-10$

$4x-2a^2x+2-a^2-a+2ax=a^2+a-10$

$(4-2a^2+2a)x=2a^2+2a-12 \;|:(-2)$

$(a^2-a-2)x=-a^2-a+6$ (1т)

$(a^2-2a+a-2)x=-a^2+2a-3a+6$

$(a(a-2)+(a-2))x=-a(a-2)-3(a-2)$

$(a-2)(a+1)x=-(a-2)(a+3)$ (1т)

I сл.) ако $a\neq 2$ и $a\neq -1$, то $x=-\dfrac{\cancel{(a-2)}(a+3)}{\cancel{(a-2)}(a+1)}=-\dfrac{a+3}{a+1}$

Но $x\neq\pm\frac{1}{2} \iff -\dfrac{a+3}{a+1}\neq\pm\dfrac{1}{2} \iff a\neq-\dfrac{7}{3}$ и $a\neq-5$

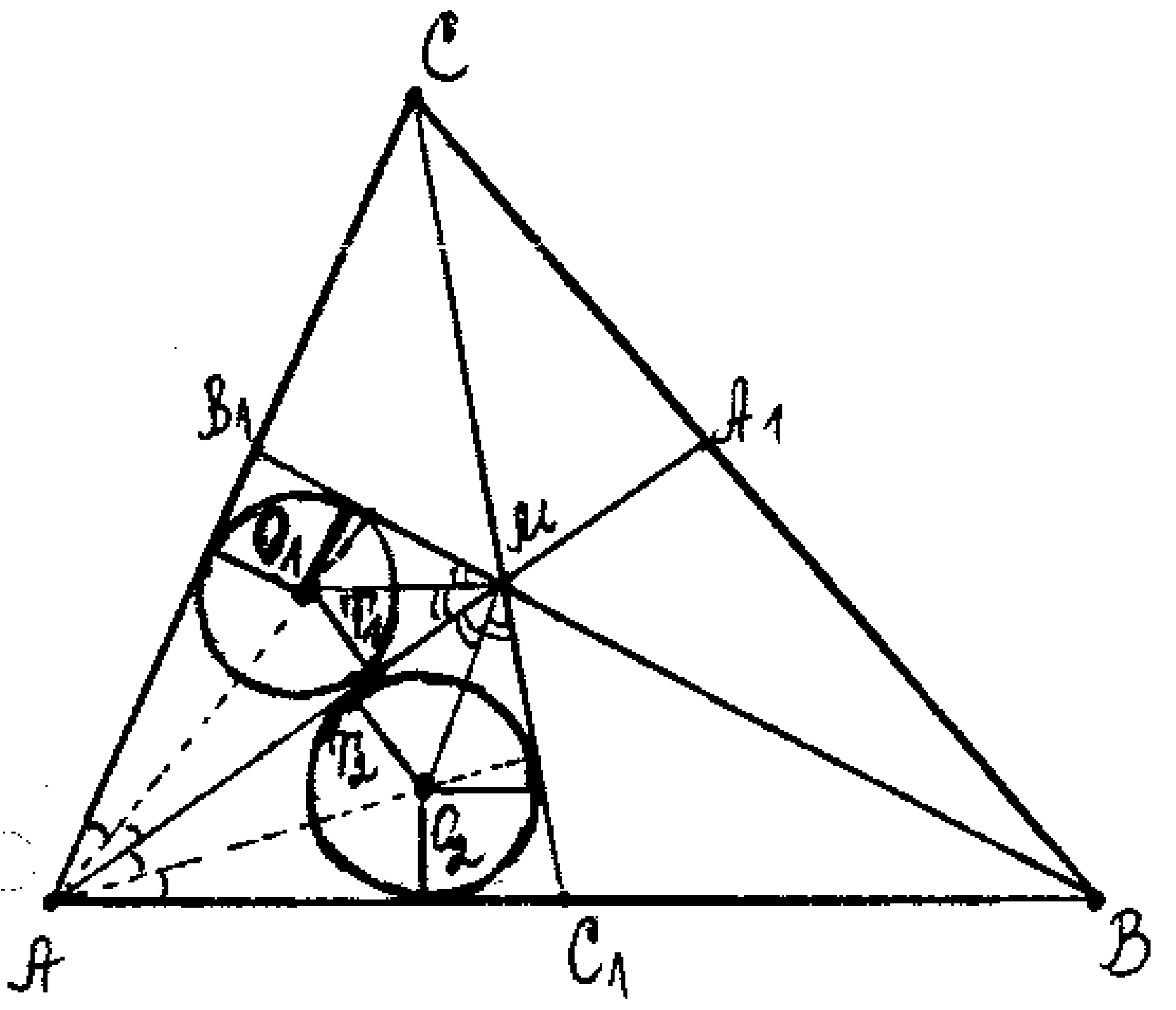
II сл.) ако $a=2$, то $0.x=0 \Rightarrow$ реш. е $\forall x\neq\pm\frac{1}{2}$

III сл.) ако $a=-1$, то $0.x=6 \Rightarrow$ ур. няма решение

Следователно: Ако $a=0$, то уравнението няма смисъл. (1т)
Ако $a=2$, то уравнението има решения $\forall x\neq\pm\frac{1}{2}$. (1т)
Ако $a=-1$, $a=-5$ или $a=-\frac{7}{3}$, то уравнението няма решение (1т)
Ако $a\neq 0, a\neq 2, a\neq -1, a\neq -5$ и $a\neq-\frac{7}{3}$, то уравнението има единствено решение $x=-\dfrac{a+3}{a+1}$. (2т)

Всичко: 7 точки

(4т + 4т = 8) 2 зад. а)



Нека вписаните окръжности в $\triangle AC_1M$ и $\triangle AB_1M$ се допират до AM съответно в т. T_1 и т. T_2.

$\triangle AO_1T_1 \cong \triangle AO_2T_2$ (II пр.) (1т) $\begin{cases}1.\ \angle AT_1O_1=\angle AT_2O_2=90^\circ\\ 2.\ \angle O_1AT_1=\angle O_2AT_2=\frac{1}{4}\angle BAC\\ 3.\ O_1T_1=O_2T_2 \text{ по условие}\end{cases}$

$\Rightarrow AT_1=AT_2$ (0,5т)

$\Updownarrow$

$\dfrac{AM+AB_1-MB_1}{2}=\dfrac{AM+AC_1-MC_1}{2}$ (1т)

$\Updownarrow$

$AB_1+MC_1=AC_1+MB_1$ (0,5т)

$\Rightarrow$ в четир. AC_1MB_1 може да се впише окръжност (0,5т)

Аналогично се доказва, че в четириъгълниците BA_1MC_1 и CB_1MA_1 може да се впишат окръжности (0,5т)

б) т. $T_1\equiv$ т. $T_2 \Rightarrow \triangle MO_1T_1\cong\triangle MO_2T_2$ (I пр.) $\overset{(0,5т)}{\Rightarrow} \angle O_1MT_1=\angle O_2MT_2$ (0,5т)

$\Rightarrow \angle AMB_1=\angle AMC_1 \overset{(0,5т)}{\Rightarrow} \triangle AMB_1\cong\triangle AMC_1 \overset{(0,5т)}{\Rightarrow} \angle AB_1M=\angle AC_1M \overset{(0,5т)}{\Rightarrow} \angle C+\frac{1}{2}\angle B=\angle B+\frac{1}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle B=\angle C$ (0,5т)

Аналогично се доказва, че $\angle A=\angle C$ (разгл. $\triangle MC_1B$ и $\triangle MA_1B$) (0,5т)

$\Rightarrow \angle A=\angle B=\angle C \iff \triangle ABC$ - равностранен (0,5т)

(5т) 3 зад. $5^{2n+1}+3^2.2^{n+1}=5^{2n}.5+9.2^n.2=5.25^n+18.2^n$ (1т)

$25\equiv 2 \pmod{23} \Rightarrow 25^n\equiv 2^n \pmod{23}$ (1т)
$5\equiv -18 \pmod{23}$ (1т)
$\Rightarrow 5.25^n\equiv -18.2^n \pmod{23}$ (1т)

$\Rightarrow 5.25^n+18.2^n\equiv 0 \pmod{23} \iff 23 \mid (5^{2n+1}+3^2.2^{n+1})$ (1т)

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА IX КЛАС

---

1 зад. Дадено е неравенството $x^2 - (2+m)x - 2m^2 + m + 1 > 0$.

а) Решете неравенството при $m=3$;

б) Намерете стойностите на параметъра m, при които неравенството няма решение в интервала $[0,4]$, ако $m>0$.

2 зад. През крайните точки на диаметъра AB, равен на 2R, на полуокръжност са прекарани допирателни. През произволна точка M на полуокръжността е прекарана трета допирателна, която пресича първите две, съответно в точките D и C. Правите AC и BD се пресичат в точка P. Докажете, че:

а) отсечката MP е перпендикулярна на AB.

б) Ако MP пресича AB в точка Q, то P е среда на MQ.

в) Произведението $MD.MC$ е постоянна величина, равна на R^2, когато точка M се движи по полуокръжността.

3 зад. Числата a и b удовлетворяват равенството $\dfrac{a^2b^2}{a^4-2b^4} = 1$.

Да се намерят всички възможни стойности на $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА X КЛАС

---

1 зад. Дадено е уравнението $k.2^{x^2+x} - 2^{-x^2-x} = 1-k$.

а) решете уравнението, ако $k=4$;

б) за кои стойности на k уравнението има точно един положителен корен?

2 зад. Даден е ромб ABCD с остър $\sphericalangle BAD$.

а) В ромба е вписана окръжност, която се допира до страните AB и BC съответно в точките E и F. Да се намери големината на $\sphericalangle BAD$, ако $AC=4EF$.

б) Нека страната AB на ромба ABCD лежи в дадена равнина β, а острият $\sphericalangle BAD$ има градусната мярка, получена в подточка а). Да се намери страната на ромба, ако ортогоналната проекция на малкия диагонал на ромба върху равнината β има дължина, равна на разстоянието от CD до β, а ортогоналната проекция на големия диагонал върху β е с дължина 35 см.

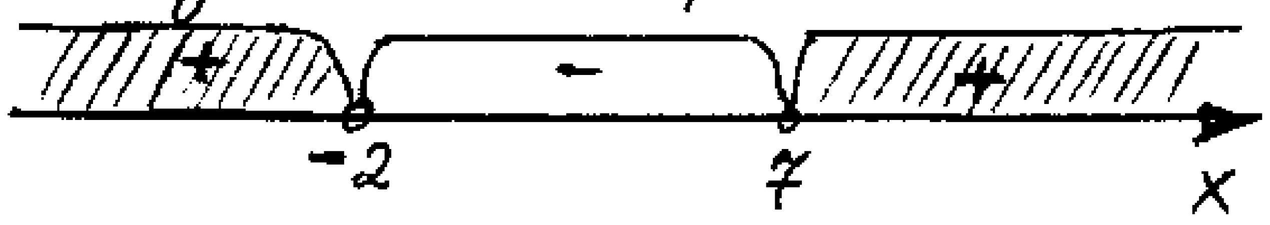
3 зад. Мебелна фирма изработва маси и бюра, за които използва два вида материали. В склада на фирмата от първия вид материал има 72 куб.м, а от втория вид материал - 56 куб.м. Едно бюро се изработва от 0,09 куб.м материал от първия вид и от 0,28 куб.м материал от втория вид. За изработването на една маса се изразходват 0,18 куб.м материал от първия вид и 0,08 куб.м материал от втория вид. Една маса носи печалба от 12 лв, а печалбата от едно бюро е 9 лв. Да се определи колко маси и колко бюра трябва да направи фирмата, за да получи най-голяма печалба?

Кратки решения на задачите за 9. клас:

2m + 4m = 6m

1 зад. а) При $m=3$ от даденото неравенство получаваме неравенството

$x^2-5x-14>0 \overset{(0,5m)}{\Longleftrightarrow} (x-7)(x+2)>0$



$D=81,\quad x_1=\frac{5+9}{2}=7,\ x_2=\frac{5-9}{2}=-2\ (1m)$

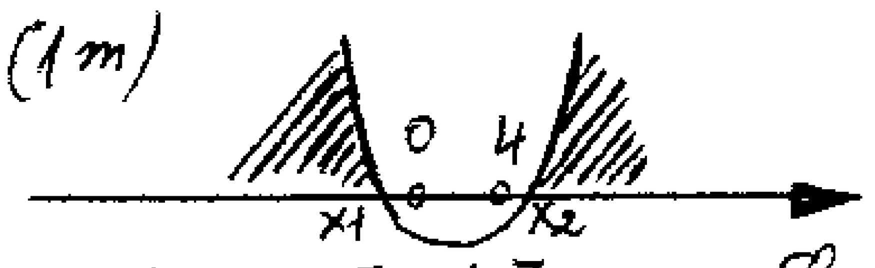
$\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(7,+\infty)\ (0,5m)$ Всичко: 2 точки

б) $x^2-(2+m)x-2m^2+m+1>0$

$D=(2+m)^2-4(-2m^2+m+1)=9m^2\ (0,5m)$; По условие $m>0$ $\Rightarrow D>0 \Rightarrow x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1\neq x_2\ (0,5m)$

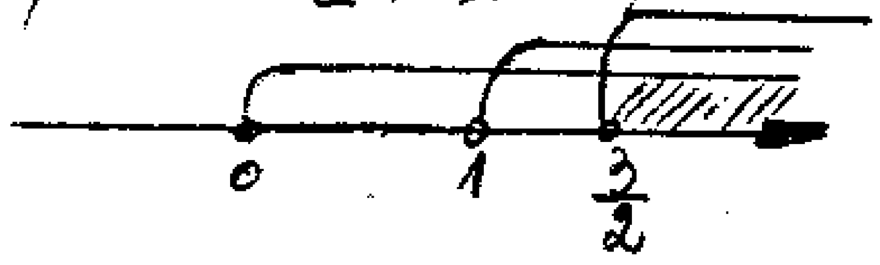
$x_1=\frac{2+m-3m}{2}=1-m,\quad x_2=\frac{2+m+3m}{2}=1+2m\ (1m)$

$m>0 \Rightarrow x_1<x_2\ (0,5m)$



За да няма неравенството решения в интервала $[0,4]$, трябва

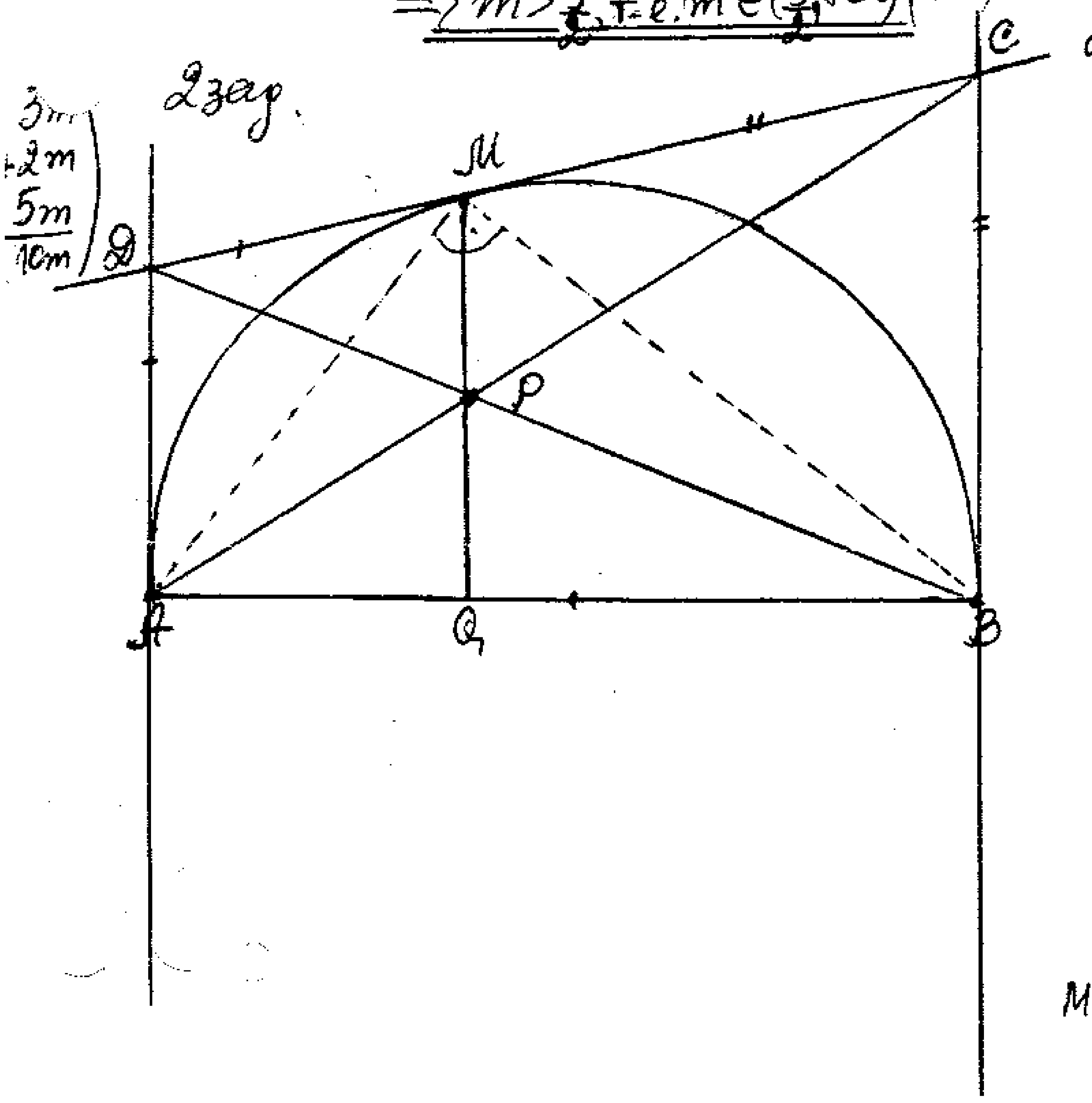
$x_1<0$ и $4<x_2\ (0,5m) \Leftrightarrow \begin{cases}1-m<0\\ 1+2m>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\ (0,25m)\\ m>\frac{3}{2}\ (0,25m)\end{cases}$



$\Rightarrow m>\frac{3}{2}$, т.е. $m\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)\ (0,5m)$ Всичко: 4 точки

3m + 2m + 5m = 10m

2 зад.



а) $AD=DM$ и $BC=MC$ (допирателни) (0,5m)

$AD\perp AB,\ BC\perp AB \Rightarrow AD\parallel BC\ (0,5m) \Rightarrow$

$\frac{DA}{BC}=\frac{DP}{BP}\ (0,5m) \Rightarrow \frac{DM}{MC}=\frac{DP}{BP}\ (0,5m) \Rightarrow MP\parallel BC\ (0,5m) \Rightarrow MP\perp AB\ (0,5m)$

Всичко: 3 точки

б) $MP\parallel AD \Rightarrow \frac{MP}{AD}=\frac{MC}{DC}\ (0,5m)$ и $\frac{AC}{AP}=\frac{DC}{DM}\ (0,5m)$ $\Rightarrow$

$PQ\parallel BC \Rightarrow \frac{BC}{PQ}=\frac{AC}{AP}\ (0,5m)$

$\frac{MP}{\underset{DM}{AD}}\cdot\frac{BC}{PQ}=\frac{\overset{=BC}{MC}}{\cancel{DC}}\cdot\frac{\cancel{DC}}{DM} \Leftrightarrow MP=PQ\ (0,5m)$

Всичко: 2 точки

в) $MD.MC=AD.BC=?$

$MP\parallel AD \Rightarrow \frac{AD}{MP}=\frac{AC}{PC}\ (0,5m)$

$PQ\parallel BC \Rightarrow \frac{AC}{PC}=\frac{AB}{QB}\ (0,5m)$ и $\frac{BC}{PQ}=\frac{AB}{AQ}\ (0,5m)$ $\Rightarrow$

$\frac{AD}{MP}\cdot\frac{BC}{PQ}\overset{(0,5m)}{=}\frac{AB^2}{AQ.QB} \overset{б)}{\Longrightarrow} AD.BC=\frac{(2R)^2.MP^2}{AQ.QB}=\frac{4R^2.\left(\frac{MQ}{2}\right)^2}{AQ.QB}\ (1m)=\frac{R^2.MQ^2}{AQ.QB}$

$\triangle ABM$ - правоъгълен $\overset{(0,5m)}{\Longrightarrow} MQ^2=AQ.QB\ (0,5m)$

$\Rightarrow AD.BC\overset{(0,5m)}{=}R^2 \Leftrightarrow MD.MC=R^2\ (0,5m)$

Всичко: 5 точки

4m) 3 зад. $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$, ДМ: $a\neq0$ и $b\neq0$, $a^4\neq2b^4\ (1m)$

$\Updownarrow$

$a^4-2b^4-a^2b^2=0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^4-\left(\frac{a}{b}\right)^2-2=0$

Полаг. $\left(\frac{a}{b}\right)^2=y$

$y^2-y-2=0$

$D=9,\ y_1=2,\ y_2=-1\ (1m)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2 \Leftrightarrow a^2=2b^2$

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{2b^2-b^2}{2b^2+b^2}=\frac{b^2}{3b^2}=\frac{1}{3}\ (1m)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2=-1 \Leftrightarrow a^2=-b^2$

$a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0\notin$ ДМ $(1m)$

Всичко: 4 точки

Решения на задачите за 10 клас

1 зад. а) За $k=4$: $4\cdot 2^{x^2+x} - 2^{-x^2-x} = -3$

Полагаме $y = 2^{-x^2-x}$ и получаваме $\frac{4}{y} - y + 3 = 0 \Leftrightarrow -y^2+3y+4=0 \Leftrightarrow y^2-3y-4=0$ (0,5т)

$D=25,\ y_1=4,\ y_2=-1$ (0,5т)

$2^{-x^2-x}=4$ или $2^{-x^2-x}=-1$ – н. реш. (0,5т)

$2^{-x^2-x}=2^2$

$-x^2-x=2$

$x^2+x+2=0$

$D=1-8=-7<0$

$\Rightarrow x^2+x+2$ н.р.к. (0,5т)

$\Rightarrow$ за $k=4$ уравн. няма решение (0,5т)

Всичко: 3 точки

б) $k\cdot 2^{x^2+x} - 2^{-x^2-x} = 1-k$. Полагаме $y = 2^{-x^2-x} > 0$ за $\forall x$ (0,5т)

След. $\frac{k}{y} - y = 1-k \Leftrightarrow -y^2-(1-k)y+k=0 \Leftrightarrow y^2+(1-k)y-k=0$ (1) (0,5т)

$D=(1-k)^2+4k=(1+k)^2 \geq 0$ за $\forall k$ (0,5т), $y_1=\frac{-(1-k)-(1+k)}{2}=-1<0$ (0,25т), $y_2=\frac{-(1-k)+(1+k)}{2}=k$ (0,25т)

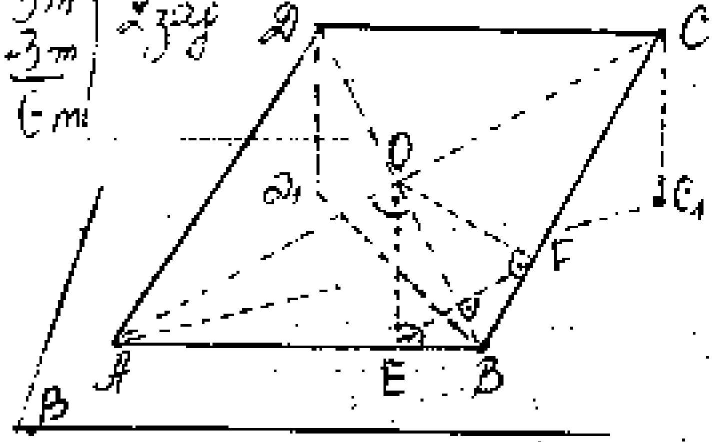
Ако $k>0$, то уравн. (1) има решение: $2^{-x^2-x}=k$ (0,5т) $\Rightarrow$

$(-x^2-x)\cdot\log_2 2=\log_2 k \Rightarrow -x^2-x=\log_2 k \Rightarrow x^2+x+\log_2 k=0$ (0,5т)

Съгласно условието трябва корените на уравнението да са с различни знаци, т.е. $x_1\cdot x_2<0$ (0,5т) $\Rightarrow \log_2 k<0 \Rightarrow 0<k<1 \Rightarrow k\in(0,1)$ (0,5т)

Всичко: 4 точки

2 зад. (3т + 3т = 6т)



а) Нека $AC\cap BD=O$, $OE\perp AB$, $OF\perp BC$ и $BE=BF$ (допирателни) $\Rightarrow$ (0,5т)

$\triangle BEF$ – равнобедрен, BO – ъглополовяща $\Rightarrow BO\perp EF$, но $BO\perp AC$ $\Rightarrow AC\parallel EF \Rightarrow$ (0,5т)

$\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4\cdot BE=AB$ (0,5т)

$\triangle ABO$ – правоъгълен, $OE\perp AB$ $\Rightarrow OE^2=AE\cdot BE=3BE\cdot BE=3BE^2 \Rightarrow$

$\frac{OE}{BE}=\sqrt{3}$ (0,5т), но $\frac{OE}{BE}=\operatorname{tg}\angle ABO$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\angle ABO=\sqrt{3}$ (0,5т) $\Rightarrow \angle ABO=60^\circ \Rightarrow \angle ABC=120^\circ \Rightarrow \angle BAD=60^\circ$ (0,5т)

б) По условие $D_1B=DD_1=CC_1=y$, $AC_1=35$ см и $\angle BAD=60^\circ$ ($DD_1\perp\beta$, $CC_1\perp\beta$).

$\Rightarrow \triangle ABD$ – равностранен $\Rightarrow AB=AD=DB=x$ $\left(OB=OD=\frac{x}{2}\right)$ (0,5т)

$\triangle DD_1B$ – правоъгълен $\Rightarrow DB^2=DD_1^2+D_1B^2 \Rightarrow x^2=2y^2$ (1) (0,5т)

$\triangle AOB$ – правоъгълен $\Rightarrow AO^2+OB^2=AB^2 \Rightarrow AO^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=x^2 \Rightarrow AO^2=\frac{3x^2}{4} \Rightarrow AO=\frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC=x\sqrt{3}$ (0,5т)

$\triangle AC_1C$ – правоъгълен $\Rightarrow AC^2=AC_1^2+CC_1^2 \Rightarrow 3x^2=35^2+y^2$ (2) (0,5т)

(1),(2) $\Rightarrow \begin{cases} x^2=2y^2 \\ 3x^2=35^2+y^2 \end{cases}$ (0,5т) $\Rightarrow 3x^2=1225+\frac{x^2}{2} \Rightarrow 5x^2=2450 \Rightarrow x^2=490 \Rightarrow AB=7\sqrt{10}$ см (0,5т)

7т) 3зад. Нека фирмата изработва x маси и y бюра ($x, y \in \mathbb{Z}$) [illegible]

Тогава печалбата $p = 12.x + 9y$. (1т) Търсим най-голямата възможна стойност на p при следните условия:

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}18.x + 0{,}09y \leqq 72 \\ 0{,}08.x + 0{,}28y \leqq 56 \end{array}\right. \overset{(1т)}{\Leftrightarrow} \left|\begin{array}{l} 2x + y \leqq 800 \quad .11 \\ 2x + 7y \leqq 1400 \end{array}\right. \;(1т)$$

$$\Rightarrow 22x + 11y + 2x + 7y \leqq 8800 + 1400 \Leftrightarrow 24x + 18y \leqq 10200 \Rightarrow 2p \leqq 10200 \Rightarrow p \leqq 5100 \;(1т)$$

Най-голямата печалба може да е 5100 лв.

Търсим двойка цели числа (x, y), за които $p = 5100$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + y = 800 \\ 2x + 7y = 1400 \end{array}\right\}_{-} \Rightarrow -6y = -600 \Rightarrow y = 100 \text{ и } x = (800 - 100) : 2 = 350$$

$$p(x = 350, y = 100) = 12.350 + 9.100 = 5100$$

Следователно за $x = 350$ и $y = 100$ се достига $p = 5100$. (1т)

Доказва се, че няма друга двойка цели числа (x, y), за които $p = 5100$ (1т)

Да допуснем, че $p = 5100$ и $y > 100$ $\Rightarrow x < 350$

$$5100 = 12.x + 9.y \Rightarrow x = \frac{5100 - 9y}{12}$$

$$y = \frac{1700 - 4x}{3} \quad (1)$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + y \leqq 800 \\ 2x + 7y \leqq 1400 \end{array}\right. \Rightarrow 4x + 8y \leqq 2200 \Rightarrow x + 2y \leqq 550 \Rightarrow y \leqq 275 - \frac{x}{2} \quad (2)$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{1700 - 4x}{3} \leqq 275 - \frac{x}{2} \Rightarrow 3400 - 8x \leqq 1650 - 3x \Rightarrow 1750 \leqq 5x \Rightarrow x \geqq 350$$

(противоречие)

При $p = 5100$ и $y < 100$ за x отново се получава аналогично противоречие.

Следователно фирмата трябва да направи 350 маси и 100 бюра, за да реализира максимална печалба 5100 лв (0,5т)

Всичко: 7 точки

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - II кръг - 19.03.2000 г.
ТЕМА ЗА XI И XII КЛАС

---

1 зад. Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$, където a, в и c са реални числа. Да се докаже, че:

а) $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}.f(-1) + (1-x^2).f(0) + \frac{x(x+1)}{2}.f(1)$;

б) ако $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$ и $|f(1)| \leq 1$, то $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ за всяко $x \in [-1,1]$.

2 зад. Дадено е уравнението $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg} x = 0$.

а) Намерете всички решения на това уравнение;

б) Намерете две решения x_1 и x_2, такива че $x_1 - x_2 = \frac{9\pi}{2}$ и числата $x_1, 8\pi, x_2$ в този ред образуват аритметична прогресия.

3 зад. Дадена е триъгълна пирамида ABCD и върху ръбовете AD и BD са избрани точки M и N.

а) Ако точка L лежи на ръба CD да се докаже, че

$$\frac{V_{MNLD}}{V_{ABCD}} = \frac{MD}{AD}.\frac{ND}{BD}.\frac{DL}{DC};$$

б) Ако $AM = \frac{1}{3}.AD$, $DN = \frac{1}{3}.BD$ и през точките M и N е построена успоредна равнина на медианата m_b на триъгълника ABC, то да се намери отношението на обемите на телата, които построената равнина отсича от дадената пирамида.

Кратки решения на задачите за 11. и 12. клас:

$2т$ / $4т$ / $6т$

1 зад. а) $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=a-b+c\\ f(0)&=c\\ f(1)&=a+b+c\end{aligned}\right\}(1т)$$

$$\frac{x.(x-1)}{2}.(a-b+c)+(1-x^2).c+\frac{x(x+1)}{2}.(a+b+c)=\frac{(x^2-x).(a-b+c)}{2}+(1-x^2)c+\frac{(x^2+x)(a+b+c)}{2}=$$

$$=\frac{ax^2-ax-bx^2+bx+cx^2-cx+ax^2+ax+bx^2+bx+cx^2+cx}{2}+(1-x^2).c=$$

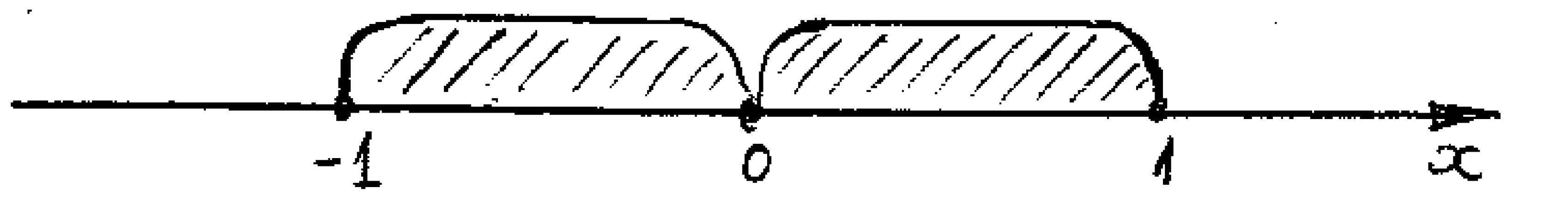
$$=\frac{2ax^2+2bx+2cx^2}{2}+(1-x^2)c=ax^2+bx+cx^2-cx^2+c=ax^2+bx+c=f(x)\ (1т)$$

Всичко: 2 точки

б)
$$\left.\begin{aligned} |f(-1)|&=|a-b+c|\leqq 1 && \text{по усл.}\\ |f(0)|&=|c|\leqq 1 && \text{по усл.}\\ |f(1)|&=|a+b+c|\leqq 1 && \text{по усл.}\end{aligned}\right\}$$

от а) $\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-1)}{2}f(-1)+(1-x^2).f(0)+\frac{x(x+1)}{2}.f(1) \Rightarrow |f(x)|\leqq\frac{|x(x-1)|}{2}+|1-x^2|+\frac{|x(x+1)|}{2}\Rightarrow$

$|f(x)|\leqq\frac{|x(x-1)|}{2}+|(1-x)(1+x)|+\frac{|x(x+1)|}{2}$ (1т)



I сл.) $x\in[-1,0]$

$|f(x)|\leqq\frac{x^2-x}{2}+1-x^2-\frac{x^2+x}{2}=-x^2-x+1=g(x)$ (0,5т)

$\max g(x)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{5}{4}$ (0,75т)

$x=-\frac{1}{2}\in[-1,0]$

II сл.) $x\in[0,1]$

$|f(x)|\leqq-\frac{x^2-x}{2}+1-x^2+\frac{x^2+x}{2}=-x^2+x+1=\varphi(x)$ (0,5т)

$\max\varphi(x)=\varphi\left(-\frac{b}{2a}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}$ (0,75т)

$x=\frac{1}{2}\in[0,1]$

Следователно $|f(x)|\leqq\frac{5}{4}$ за $\forall x\in[-1,1]$ (0,5т) Всичко: 4 точки

$3т$ / $+3т$ / $6т$

2 зад. а) $\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cot g x=0$, ДМ: $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ (0,25т)

$\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\cos x}{\sin x}=0$

$\Downarrow$

$2\sin^2x-\sqrt{2}.\cos x=0$

$2(1-\cos^2x)-\sqrt{2}\cos x=0$

$-2\cos^2x-\sqrt{2}\cos x+2=0$

$2\cos^2x+\sqrt{2}\cos x-2=0$ (1 т)

$D=2+16=18$

$(\cos x)_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{4}$ ↗ $-\sqrt{2}$ (0,25т) ↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,25т)

$(\cos x)_1=-\sqrt{2}$ – няма решение (0,5т)

$(\cos x)_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \underline{\underline{x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi}}$ (0,75т) Всичко: 3 точки

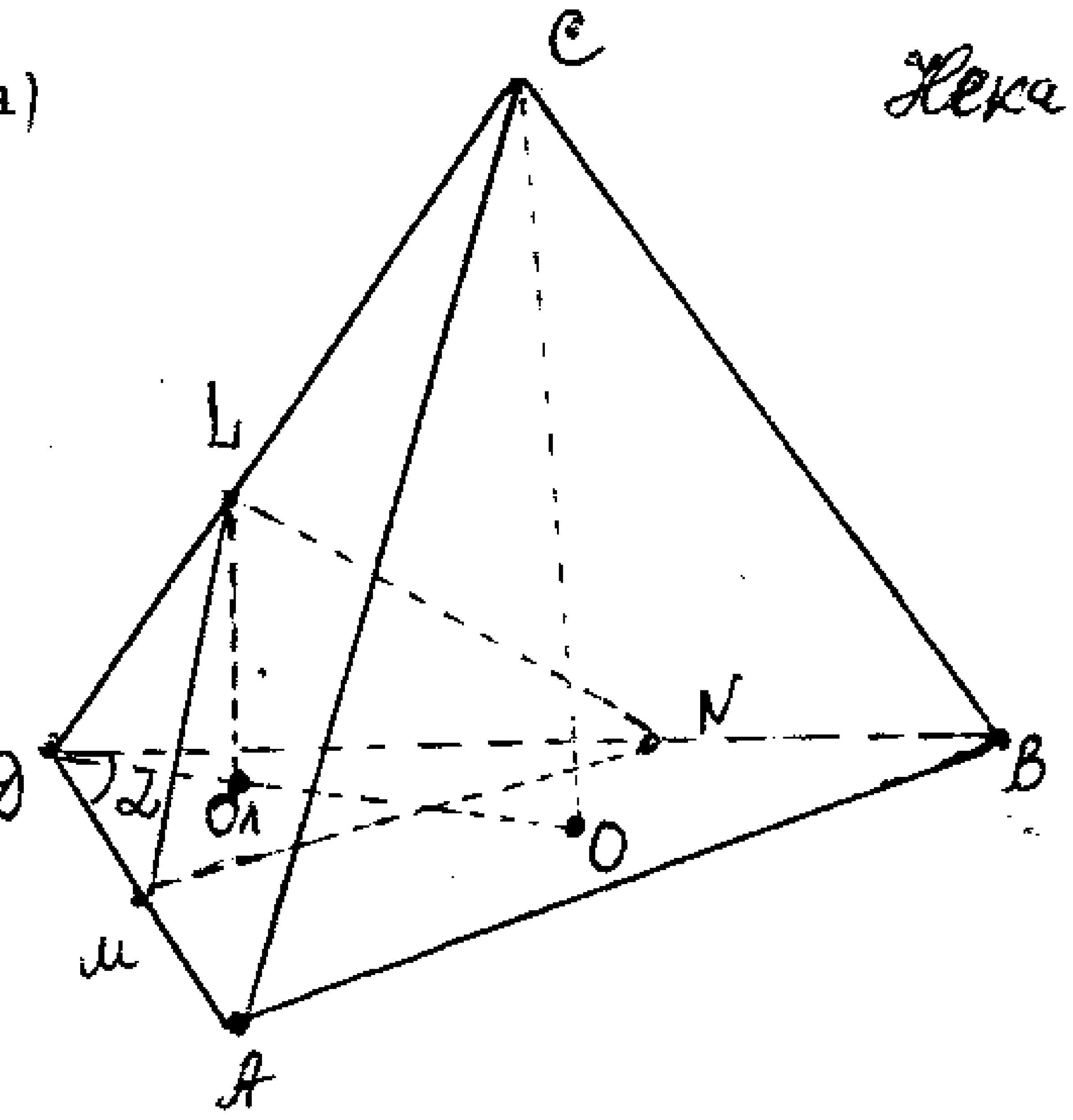
б) $x_1-x_2=\frac{9\pi}{2}$, $\div x_1, 8\pi, x_2 \Leftrightarrow \underset{(0,5т)}{x_1+x_2=16\pi}$ $x_1=?\ x_2=?$

(0,5т) $\left|\begin{aligned} x_1-x_2&=\frac{9\pi}{2}\\ x_1+x_2&=16\pi\end{aligned}\right.\Rightarrow 2x_1=\frac{9\pi}{2}+16\pi\Rightarrow x_1=\frac{9\pi}{4}+8\pi=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}+10\pi}}$ (1т)

$x_2=16\pi-x_1=16\pi-\left(\frac{\pi}{4}+10\pi\right)=\underline{\underline{-\frac{\pi}{4}+6\pi}}$ (1т) Всичко: 3 точки

3т
5т
3т

3 зад. а)



Нека за основа на пирамидата изберем $\triangle ABD$ (1т)

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot CO$ $(CO\perp(ABD),\ O\in(ABD))$

Озн. $\sphericalangle ADB=\alpha$

$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DB\cdot\sin\alpha \Rightarrow$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot AD\cdot DB\cdot\sin\alpha\cdot CO$ ① (0,5т)

$V_{MNLD}=\frac{1}{3}S_{DMN}\cdot LO_1$ $(LO_1\perp(MND),\ O_1\in(MND))$

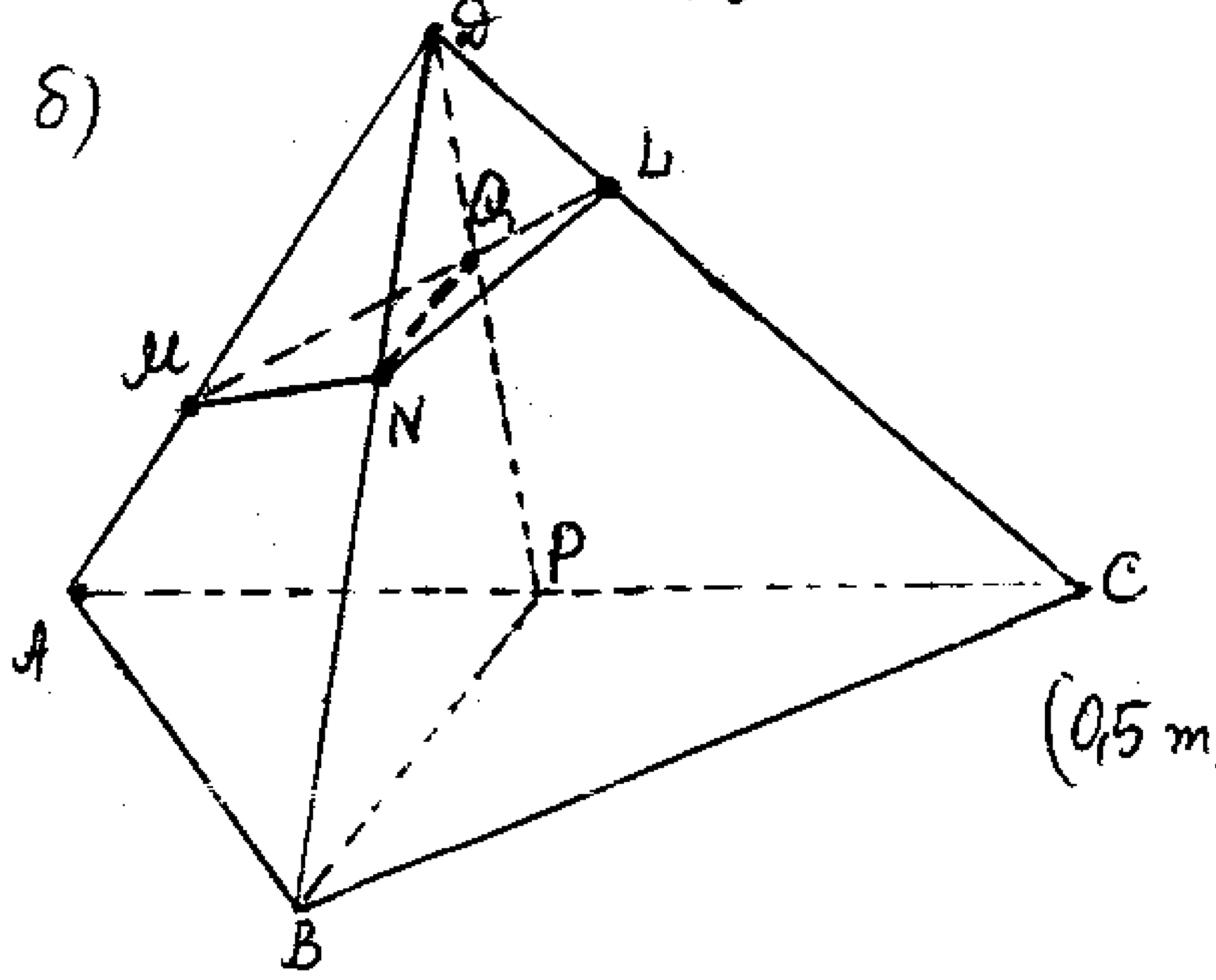
$V_{MNLD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot DM\cdot DN\cdot\sin\alpha\cdot LO_1=\frac{1}{6}\cdot DM\cdot DN\sin\alpha\cdot LO_1$ ② (0,5т)

$\triangle DO_1L\sim\triangle DOC$ $(D\in OO_1)$ $\Rightarrow \frac{LO_1}{CO}=\frac{DL}{DC}$ ③ (0,5т)

от ①②③ $\Rightarrow \frac{V_{MNLD}}{V_{ABCD}}=\frac{\cancel{\frac{1}{6}}\cdot DM\cdot DN\cdot\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\frac{1}{6}}\cdot AD\cdot DB\cdot\cancel{\sin\alpha}}\cdot\frac{LO_1}{CO}=\frac{DM\cdot DN}{AD\cdot DB}\cdot\frac{DL}{DC}=\underline{\underline{\frac{DM}{AD}\cdot\frac{DN}{DB}\cdot\frac{DL}{DC}}}$ (0,5т)

Всичко: 3 точки

б)



$AM=\frac{1}{3}AD$, $DN=\frac{1}{3}DB$

$BP=m_b$ – медиана през върха B в $\triangle ABC$

Озн. с λ равнината през т. M, т. N и $\lambda\parallel m_b$

Построяване на сечението на λ с пирамидата:

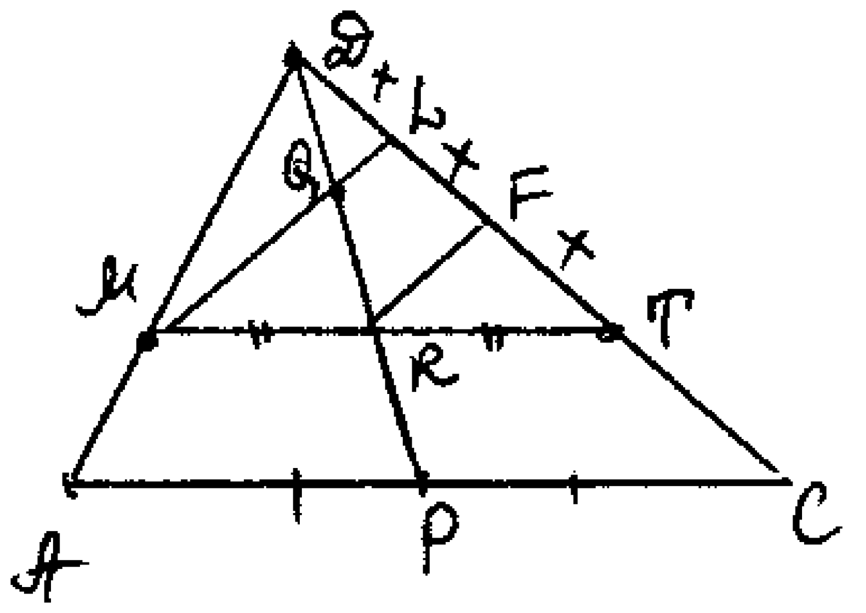
(0,5т)

1) $\left.\begin{array}{l}\lambda\parallel BP\\ (BPD)\cap\lambda=\ell\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\ell\parallel BP\\ N\in\ell\end{array}\right\}\Rightarrow \ell=NQ$ $(\ell\cap DP=Q)$

2) $MQ=\lambda\cap(ACD)$, $MQ\cap DC=L$

3) $\triangle MNL$

$\frac{V_{MNLD}}{V_{ABCD}}\overset{\text{от а)}}{=}\frac{MD}{AD}\cdot\frac{ND}{BD}\cdot\frac{DL}{DC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{DL}{DC}$, $\frac{DL}{DC}=?$



$\triangle NQD\sim\triangle BPD\Rightarrow\frac{DQ}{DP}=\frac{DN}{DB}=\frac{1}{3}\Rightarrow DQ=\frac{1}{3}DP$ ① (0,5т)

Постр. $MT\parallel AC$, $MT\cap DP=R$ и $RF\parallel ML$

RF – ср. отс. в $\triangle MTL\Rightarrow LF=FT=x$ (0,5т)

$\frac{DT}{DC}=\frac{MD}{AD}=\frac{2}{3}\Rightarrow DT=\frac{2}{3}DC$ (0,5т)

$\frac{DP}{RP}=\frac{DA}{AM}=\frac{3}{1}\Rightarrow PR=\frac{1}{3}DP$ ② $\overset{①②}{\Longrightarrow} DQ=QR=RP$ (0,5т)

QL – ср. отс. в $\triangle DRF\Rightarrow DL=LF=x$ (0,5т) $\Rightarrow DT=3x$

$\Rightarrow DT=3x=\frac{2}{3}DC\Rightarrow DC=\frac{9x}{2}$ (0,5т) $\Rightarrow\frac{DL}{DC}=\frac{x}{\frac{9x}{2}}=\frac{2}{9}$ (0,5т)

След. $\frac{V_{MNLD}}{V_{ABCD}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$ (0,5т) $\Rightarrow\underline{\underline{\frac{V_{MNLD}}{V_{ABCDMNL}}=\frac{4}{77}}}$ (0,5т)

Всичко: 5 точки