

Пояснение

През 2001 г. бяха намалени кръговете на олимпиадата по математика и не е подготвяна тема.

Тук ще публикувам втория вариант на задачите за общински кръг на олимпиадата по математика през 2006 г., подготвен за учениците от 8. до 12. клас на математическата гимназия „Ак.Иван Ценов“-гр.Враца и проведен с тях допълнително, тъй като в деня на олимпиадата те са участвали в състезанието по математика между математическите гимназии на Враца, Видин и Монтана.

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

VIII клас

Зад. 1. а) Да се опрости израза: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{7x+y}} + \frac{2y}{7x^2 - y^2} \right) : \frac{1}{7x^2 - \sqrt{7}yx} - \sqrt{7}x + 3$

(5 точки)

б) Дадено е уравнението $(a-2)x^2 - (2a+1)x + a-1 = 0$, където a е реален параметър. Да се реши уравнението, когато a е стойността на израза A . Да се намери параметъра a , за който уравнението има два различни реални корена.

(5 точки)

Зад. 2. Точките D и E лежат съответно върху катетите BC и AC на правоъгълния $\triangle ABC$. Точките P , Q , M и N са среди съответно на отсечките ED , AB , AD и BE . Намерете дължината на отсечката PQ , ако дължината на отсечката MN е 1 cm. Как трябва да се вземат точките D и E съответно върху катетите BC и AC така, че правата PQ да бъде ъглополовяща на $\angle MPN$?

(5 точки)

Зад. 3. Да се реши уравнението $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЩА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

Указание за проверка

VIII клас

Зад. 1. а)

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{7x+y}} + \frac{2y}{7x^2 - y^2} \right) : \frac{1}{7x^2 - \sqrt{7}yx} - \sqrt{7}x + 3 = \frac{\sqrt{7}x - y + 2y}{(\sqrt{7}x + y)(\sqrt{7}x - y)} \sqrt{7}x(\sqrt{7}x - y) - \sqrt{7}x + 3$$
$$= \frac{\sqrt{7}x + y}{\sqrt{7}x + y} \sqrt{7}x - \sqrt{7}x + 3 = \sqrt{7}x - \sqrt{7}x + 3 = 3$$

(4 точки)

$$DM : x \neq -\frac{y}{\sqrt{7}}, \quad x \neq \frac{y}{\sqrt{7}}, \quad x \neq 0$$

(1 точка)

б) $(a-2)x^2 - (2a+1)x + a-1 = 0$

$$a=3 \Rightarrow x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$$

(2 точки)

$$a=2 \Rightarrow -5x+1=0 \Rightarrow x=0,2 \text{ (1 корен)}$$

(1 точка)

$$a \neq 2 \Rightarrow D = (2a+1)^2 - 4(a-2)(a-1) = 16a-7 \text{ и } 16a-7 > 0, \text{ когато } a > \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{7}{16}; 2 \right) \cup (2; \infty)$$

(2 точки)

Зад. 2. Доказване чрез средни отсечки в триъгълник, че четириъгълникът MQNP е успоредник

(1,5 точки)

Доказване, че успоредникът MQNP е правоъгълник

(1,5 точки)

Извод за PQ=MN=1 cm

(1 точка)

Ако AE=BD, то MQNP е квадрат $\Rightarrow$ PQ - ъглополовяща на $\angle MPN$ (1 точка)

Зад. 3. $(36x^2 + 84x + 49)(3x^2 + 7x + 4) = 6 \Leftrightarrow (12(3x^2 + 7x + 4) + 1)(3x^2 + 7x + 4) = 6$
Полагаме $3x^2 + 7x + 4 = y$

$$\Rightarrow (12y+1)y=6 \Leftrightarrow 12y^2+y-6=0 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -\frac{3}{4}$$

(3 точки)

$$3x^2 + 7x + 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

(1 точка)

$$3x^2 + 7x + 4 = -\frac{3}{4}, \text{ но } D < 0 \Rightarrow \text{уравнението няма реални корени}$$

(1 точка)

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

26.02.06г.

IX клас

Зад. 1. Да се реши уравнението

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$$

(5 точки)

Зад. 2. Даден е $\triangle ABC$ с височини AA_1 , BB_1 и CC_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$).

Да се докаже, че:

а) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_1C_1B \sim \triangle B_1C_1A \sim \triangle ABC$ и $CO \perp A_1B_1$, $BO \perp C_1A_1$,
 $AO \perp B_1C_1$, където O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

(5 точки)

б) Лицето $S_{ABC} = p \cdot R$, където p е полупериметърът на $\triangle A_1B_1C_1$, а R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност

(5 точки)

Зад. 3. В окръжност с център O са прекарани два взаимно перпендикулярни диаметъра AB и CD . През точка A е построена хорда AM , минаваща през средата N на радиуса OD . Докажете, че $AM=2MB$, $MC=3MD$ и $OB=3OF$, където F е пресечната точка на AB и MC .

(5 точки)

Време за работа-4 часа

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-БРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

26.02.06г.

Указание за проверка
IX клас

Зад.1. Групираме дробите с еднакви числител и получаваме единия корен

$$x_1 = \frac{5}{2} \quad (1 \text{ точка})$$

Полагаме $y = x^2 - 5x$ (1 точка) и получаваме уравнението $2y^2 + 13y + 18 = 0$ с корени

$$y_1 = -\frac{9}{2} \text{ и } y_2 = -2 \quad (1 \text{ точка})$$

Уравнението $2x^2 - 10x + 9 = 0$ има корени $x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ (1 точка)

Уравнението $x^2 - 5x + 2 = 0$ има корени $x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ (1 точка)

Зад. 2.а) Доказване подобие на триъгълниците (1 точка)

Определяне на $\angle COB = 2\angle BAC = 2\alpha$ (1 точка)

$\angle B_1 A_1 C = \angle BAC = \alpha$ (1 точка)

От $OC = OB = R$ и $\angle COB = 2\alpha \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = 90^\circ - \alpha$ (1 точка)

Нека H е пресечната точка на CO и $A_1 B_1 \Rightarrow \angle CHA_1 = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$,
т.е. $CO \perp A_1 B_1$ (аналогично се доказва $BO \perp C_1 A_1$ и $AO \perp B_1 C_1$) (1 точка)

б) $S_{ABC} = S_{CB_1 O A_1} + S_{BC_1 O A_1} + S_{AC_1 O B_1}$ (1 точка)

$$S_{CB_1 O A_1} = \frac{R \cdot A_1 B_1}{2}, S_{BC_1 O A_1} = \frac{R \cdot A_1 C_1}{2} \text{ и } S_{AC_1 O B_1} = \frac{R \cdot C_1 B_1}{2} \quad (3 \text{ точки})$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{R \cdot (A_1 B_1 + A_1 C_1 + B_1 C_1)}{2} = R \cdot p \quad (1 \text{ точка})$$

Зад. 3. Доказване на подобие на $\triangle AON$ и $\triangle ABM$, откъдето следва, че $AM = 2MB$ (1 точка)

Доказване, че MA е ъглополовяща на $\angle CMD$ и използване свойството на ъглополовящата за доказване на равенството $MC = 3MD$ (2 точки)

От $MC = 3MD$, подобие на $\triangle COF$ и $\triangle CDM$ и $OC = OB$, следва, че $OB = 3OF$ (2 точки)

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

X клас

Зад.1. Да се изследва броят на решенията на уравнението
 $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ в зависимост от стойностите на параметъра a .

(5 точки)

Зад. 2. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които всяко отрицателно число удовлетворява неравенството $x^2 - (2a-1)x + a^2 - 2a + \frac{3}{4} > 0$

(5 точки)

Зад. 3. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с периметър 10 cm, височина $CD (D \in AB)$ към хипотенузата и периметър $P_{BCD} = 6$ cm.

а) Намерете периметъра P_{ACD}

(5 точки)

б) Ако S е лицето на $\triangle ABC$, да се изразят катетите му чрез S , след което да се намери и самото S .

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

26.02.06г.

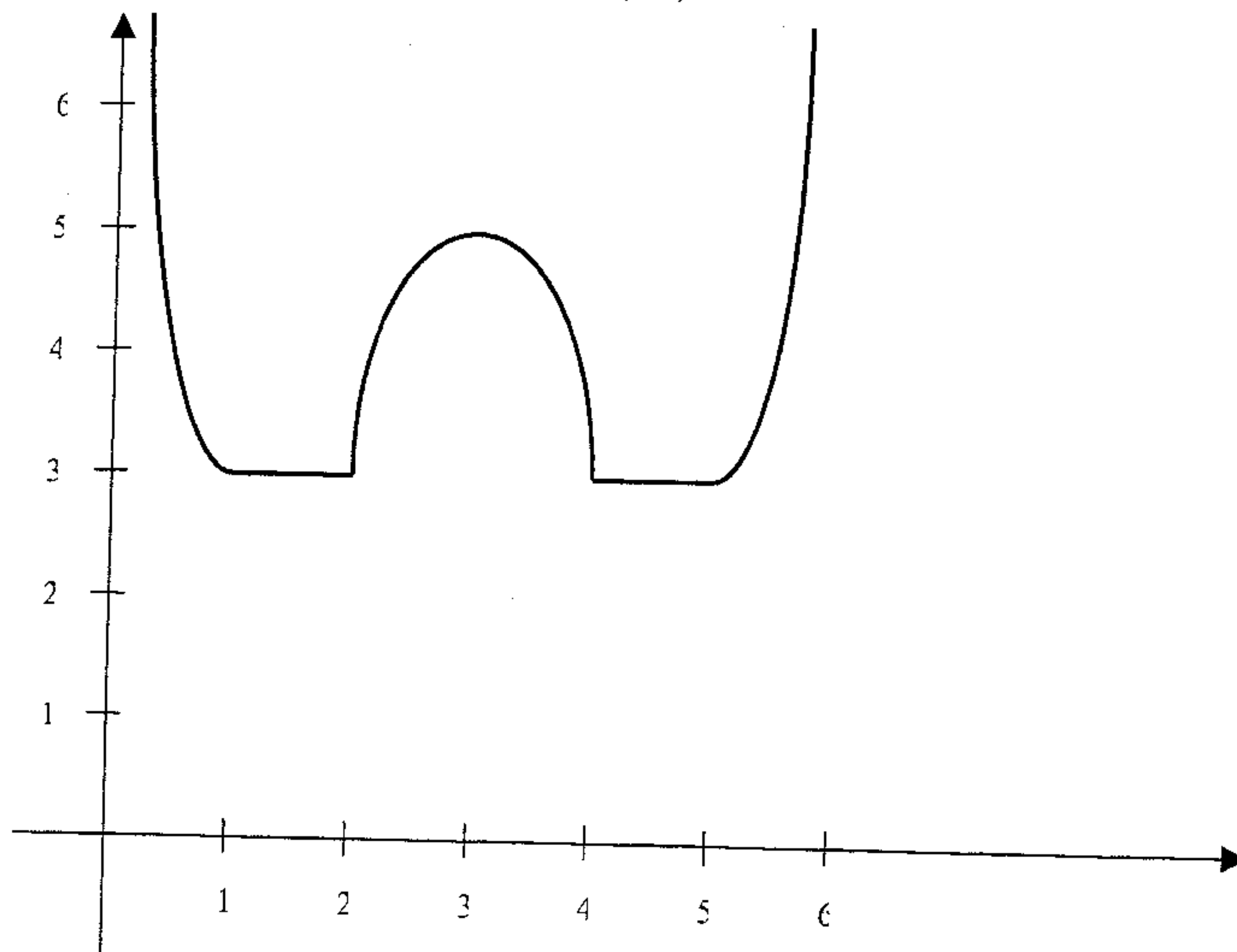
Указание за проверка

X клас

Зад. 1. а) $f(x) = |(x^2 - 6x + 8)| + |(x^2 - 6x + 5)|$

Определяне на корените на квадратните тричлени $x^2 - 6x + 8$ и $x^2 - 6x + 5$ (1 точка)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 13 & x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty) \\ 3 & x \in [1; 2] \cup [4; 5] \\ -2x^2 + 12x - 13 & x \in (2; 4) \end{cases} \quad (1 \text{ точка})$$



Определяне на координатите на върха на параболата $-2x^2 + 12x - 13$ (0,5 точки)

$a < 3$	– няма решение;	(0,5 точки)
$a = 3$	– б.м.р;	(0,5 точки)
$a \in (3; 5)$	– 4 решения;	(0,5 точки)
$a = 5$	– 3 решения;	(0,5 точки)
$a > 5$	– 2 решения.	(0,5 точки)

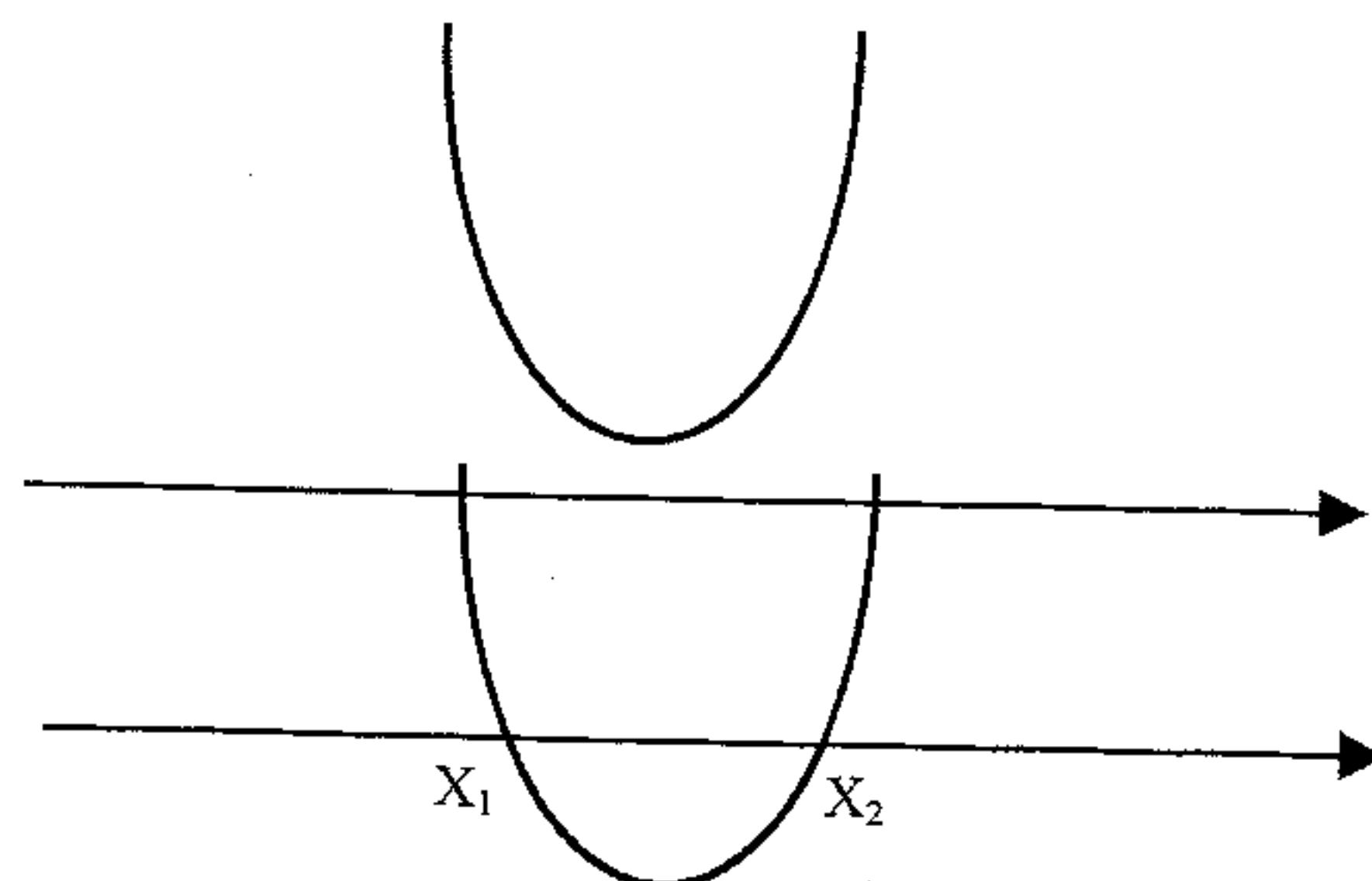
Зад. 2. I случай: $D = 4a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$

Решение на неравенството е всяко x ,
следователно решение е и всяко

отрицателно число $\Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

(2 точки)

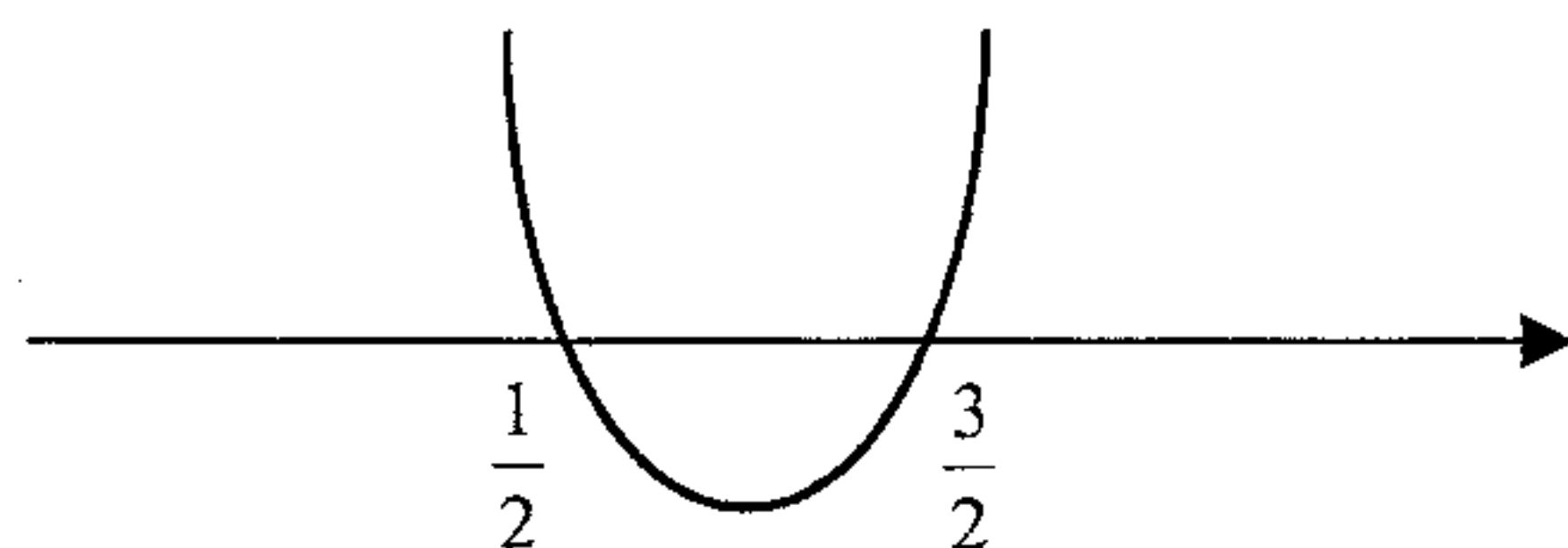
II случай: $D = 4a - 2 > 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}$



Решението на неравенството е

$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \Rightarrow$ всяко отрицателно число е решение $\Leftrightarrow$ числото 0 е по-малко от корените или числото 0 съвпада с по-малкия корен

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ 1. f(0) \geq 0 \\ \frac{-1+2a}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a^2 - 2a + \frac{3}{4} \geq 0 \\ a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

(2 точки)

След обединение на двата случая получаваме, че $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ (1 точка)

Зад. 3. а) $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ADC$

(1 точка)

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{CBD}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{AB} = \frac{P_{CBD}}{BC}, \frac{P_{ABC}}{P_{ADC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{AB} = \frac{P_{ADC}}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{AB} = \frac{P_{CBD}}{BC} = \frac{P_{ADC}}{AC} = x \quad (1)$$

(2 точки)

От Питагоровата т-ма в $\triangle ABC \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$

(1 точка)

Заместваме AB, BC, AC от равенство (1) $\Rightarrow \left(\frac{10}{x}\right)^2 = \frac{(P_{ACD})^2}{x^2} + \left(\frac{6}{x}\right)^2$

$$\Rightarrow 100 = (P_{ACD})^2 + 36 \Rightarrow P_{ADC} = 8$$

(1 точка)

$$\text{б) От а) } \Rightarrow \begin{cases} AD + DC + b = 8 \\ BD + CD + a = 6 \end{cases} \Rightarrow 2CD + 10 = 14 \Rightarrow CD = 2 \quad (0,5 \text{ точки})$$

Построяваме височините DE, DF в $\triangle BCD$ и $\triangle ADC$. От а) следва, че

$$\frac{DE}{DC} = \frac{P_{BCD}}{P_{ABC}} \Leftrightarrow \frac{DE}{2} = \frac{6}{10} \Rightarrow DE = \frac{6}{5} \quad (0,5 \text{ точки}) \text{ и } \frac{DF}{DC} = \frac{8}{10} \Rightarrow DF = \frac{8}{5} \quad (0,5 \text{ точки})$$

$$\frac{S_{BCD}}{S} = \left(\frac{P_{BCD}}{P_{ABC}}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{9}{25} S \quad (1 \text{ точка})$$

$$\frac{S_{ADC}}{S} = \left(\frac{P_{ADC}}{P_{ABC}}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{ADC} = \frac{16}{25} S \quad (1 \text{ точка})$$

$$S_{ADC} = \frac{16}{25} S = \frac{1}{2} b \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{4}{5} S \text{ и } S_{BCD} = \frac{9}{25} S = \frac{1}{2} a \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{5} S$$

$$S = \frac{1}{2} ab \Rightarrow S = \frac{25}{6} \quad (1,5 \text{ точки})$$

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

26.02.06г.

XI клас

Зад. 1. Да се определи вярно ли е неравенството

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+2n-1}{(2+4+6+\dots+2n) \cdot \sqrt{(2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\dots)}} < \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

(5 точки)

Зад. 2. В остроъгълния $\triangle ABC$ точката H е ортоцентър, а BD е височина ($D \in AC$).
Да се докаже, че:

а) Ако $BD=AC$, то $HM=HT$, където M и T са съответно средите на AC и BD

(5 точки)

б) Ако $BH=HD$, то $BD=4R \cdot \cos \angle BAC \cdot \cos \angle ACB$, където R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

(5 точки)

Зад. 3. Намерете стойностите на реалния параметър a , за всяка от които съществува реално число x такова, че числата 3 , $a \cdot 4^{2x-x^2-2}$, 16^{2x-x^2-2} , взети в този ред, да образуват аритметична прогресия.

(5 точки)

Време за работа-4 часа

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

Указание за проверка

XI клас

Зад.1. Пресмятане на $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+5+\dots+2n-1)}{(2+4+6+\dots+2n) \cdot \sqrt{(2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\dots)}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (2 точка)

Пресмятане на $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{4}{3}$ (2 точка)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{4}{3} \quad (1 \text{ точка})$$

Зад. 2 а) $\triangle BDC \sim \triangle ADH \Rightarrow CD \cdot AD = BD \cdot HD$ (1 точка)

НМ-медиана в $\triangle ACH \Rightarrow HM^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2AH^2 + 2HC^2 - AC^2}$ (1) (1 точка)

$AH^2 = AD^2 + DH^2$, $HC^2 = DC^2 + DH^2$, $AD+DC=AC$, $CD \cdot AD = BD \cdot HD$ и $BD=AC$ (2)

От (1), (2) следва, че $4HM^2 = (BD-2HD)^2$ (3) (2 точки)

$TH = |TD-HD| = \left| \frac{1}{2}BD - HD \right|$ (4) (0,5 точки)

От (3), (4) следва, че $HM=HT$ (0,5 точки)

б) $BH=HD \Rightarrow BD=2HD$ (1 точка)

От $\triangle ADH$: $HD=AD \cotg \angle ACB$ (1) (1 точка)

От $\triangle ADB$: $AD=AB \cos \angle BAC$ (2) (1 точка)

От синусова теорема $AB=2R \sin \angle ACB$ (3) (1 точка)

От (1), (2) и (3) следва, че $BD=4R \cdot \cos \angle BAC \cdot \cos \angle ACB$ (1 точка)

Зад.3. 2а. $4^{2x-x^2-2} = 3 + (4^{2x-x^2-2})^2$ (свойство на аритметичната прогресия) (0,5 точки)

Полагаме $4^{2x-x^2-2} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 2at + 3 = 0$ (0,5 точка)

$D = a^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) \geq 0$ (1) (0,5 точки)

$t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 3} > 0$ (0,5 точки) $\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2a > 0 \Rightarrow a > 0$ (2), $t_1 t_2 = 3 > 0$ (0,5 точки)

$4^{2x-x^2-2} = t \Rightarrow x^2 - 2x + 2 + \log_4 t = 0$ (0,5 точки)

$\Rightarrow D = 1 - 2 - \log_4 t \geq 0 \Rightarrow \log_4 t \leq -1 \Rightarrow t \leq \frac{1}{4}$ (0,5 точка)

$\Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \pm \sqrt{a^2 - 3} \leq \frac{1}{4}$ (3) (1 точка)

От (1), (2), (3) следва, че $a \geq \frac{49}{8}$ (0,5 точки)

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

XII клас

Зад.1. Да се намери максималния брой членове на крайна аритметична прогресия с $d=4$, такава, че сборът от квадрата на a_1 с останалите членове да не надминава 100. При така намерения максимален брой да се определят стойностите, които може да приема a_1 .

(5 точки)

Зад. 2. Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник с радиуси на вписаната и описаната окръжност съответно r и R . Ако всички околни ръбове са равни и около пирамидата е описано кълбо с радиус $2R$, да се намери:

а) околният ръб на пирамидата

(5 точки)

б) обемът на пирамидата,

(5 точки)

Зад. 3. Ако $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ и n е естествено число, да се изчисли сумата

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

**РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЩА
ОБЩНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА**

26.02.06г.

Указание за проверка

ХПклас

Зад. 1.

$$a_1^2 + a_2 + \dots + a_n \leq 100 \Leftrightarrow a_1^2 - a_1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 100 \Leftrightarrow a_1^2 - a_1 + S_n - 100 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1^2 + (n-1)a_1 + 2(n^2 - n) - 100 \leq 0 \quad (1,5 \text{ точки})$$

$$D = -7n^2 + 6n + 401 \geq 0 \Leftrightarrow n \in \left[\frac{3 - \sqrt{2816}}{7}; \frac{3 + \sqrt{2816}}{7} \right] \quad (1,5 \text{ точки})$$

Най-голямото цяло решение $n \geq 1$ е $n=8$ (1 точка)

За $n=8$ се получава неравенството $a_1^2 + 7a_1 + 12 \leq 0 \Rightarrow a_1 \in [-4; -3]$ (1 точка)

Зад. 2. а) Извод за проектирането на върха М на пирамидата в средата О на хипотенузата АВ на основата АВС ($MA=MB=MC=l$) $\Rightarrow MO=h$. Нека $MON=4R$ -диаметър на сферата, описана около пирамидата. (1 точка)

Извод $AO^2 = AO \cdot OM \Leftrightarrow R^2 = h(4R - h)$, откъдето $h_{1,2} = R(2 \pm \sqrt{3}) > 0$

(2 точки)

От $l^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow l_{1,2} = R(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$

(2 точки)

б) Извод $a+b=2r+c$, но $c=2R$, следователно $a+b=2r+2R$ ($AB=c$, $AC=b$, $BC=a$)

(1 точка)

Определяне на лицето на основата $B=p.r=(r+2R)r$

(2 точки)

Определяне на обема $V = \frac{r(2R+r)R(2 \pm \sqrt{3})}{3}$

(2 точки)

Зад. 3. С помощта на метода математическа индукция се доказва, че ако $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ и n е естествено число, то

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

Откриване стойността на сумата $\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha$ (3 точки)

Проверка на равенство (1) за $n=1$ (1 точка)

Доказване на (1) за $n=k+1$ при допускане верността на равенството за $n=k$ (1 точка)