Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА IV КЛАС

---

1 зад. а/ Пресметнете израза :

$$((29052.2+948.2)-824:8)-(16873.3+8888).$$

б/ Да се намери неизвестното число x :

$$5+5:((5+5.(x-5)):5-5)-5=5$$

2 зад. Разстоянието между два града A и B е 240 км. От тях тръгват едновременно един срещу друг два влака, единият от които се движи със средна скорост 70 км/ч, а другият - със средна скорост 50 км/ч. В момента на тръгването на влаковете от единия град излетял гълъб, който се движи със средна скорост 100 км/ч. Този гълъб лети по права линия докато срещне идващия влак от другия град, мигновено се връща по права линия докато срещне и първия влак, връща се отново докато срещне втория и така продължава да се движи докато влаковете се срещнат. Колко километра е изминал гълъбът?

3 зад. Покрай праволинеен участък на шосе са засадени четири дървета - акация, върба, кестен и топола. Разстоянието между акацията и тополата е 10 м, между върбата и кестена - 20 м, между върбата и тополата - 30 м и между акацията и върбата - 40 м. Да се намери разстоянието между акацията и кестена.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА V КЛАС

---

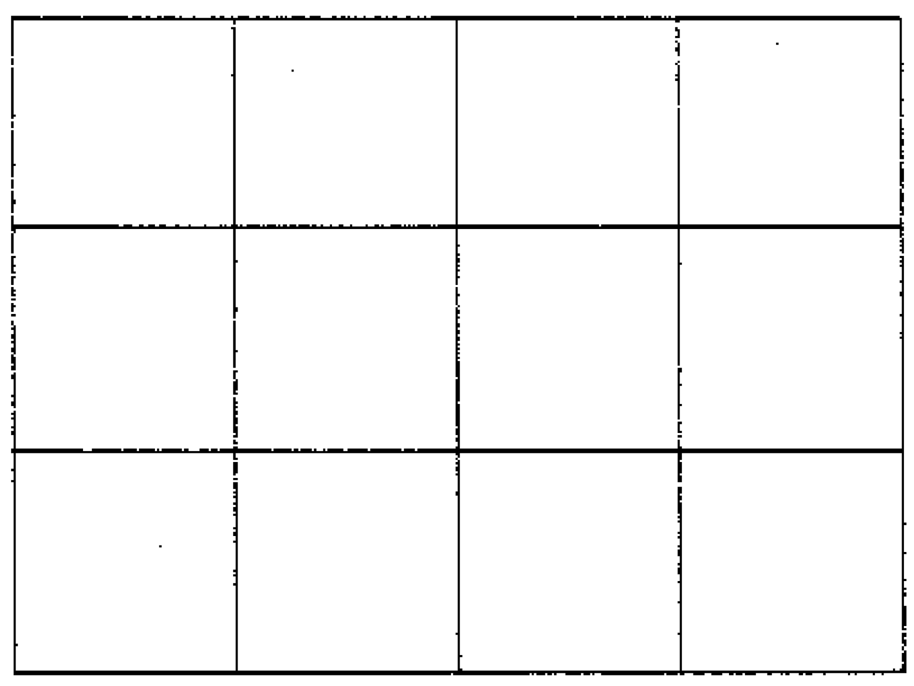
1 зад. а/ Сборът от числителя и знаменателя на една дроб е равен на 4140. След съкращаването ѝ се получава дробта $\frac{7}{13}$.

Каква е била дробта преди съкращаването?

б/ Да се намери естествено число n , ако се знае , че

$\frac{n+10}{n}$, $\frac{n+7}{n+1}$ и $\frac{11n+1}{3n-1}$ са цели числа.

2 зад. Правоъгълен лист е разчертан на 4 x 3 квадратчета, както е показано на чертежа. Покажете как и по колко начина може да се разреже правоъгълникът на две еднакви (съвпадащи) части, ако разрязването се прави по линиите на квадратчетата.



3 зад. Да се докаже, че числото $8^{104}.5^{312}+8$ се дели на 9.

Кратки решения на задачите за 4. клас:

1зад. а) $((29052.2+948.2)-824:8)-(16873.3+8888)=$

$=(30000.2-103)-(50619+8888)=$

$=(60000-103)-59507=59897-59507=\underline{390}$

За всяко вярно извършено действие – по 0,5 точки

Общо за 1а) зад. 4 точки

б) $5+5:\left(\left(5+5.(x-5)\right):5-5\right)-5=5.$

Преобразуваме дадения израз и получаваме

$(5-5)+5:\left(\left(5+5.(x-5)\right):5-5\right)=5;$ → 0,5 точки

$5:\left(\left(5+5.(x-5)\right):5-5\right)=5;$ → 0,5 точки

$\left(5+5.(x-5)\right):5-5=1;$ → 0,5 точки

$\left(5+5.(x-5)\right):5=6;$ → 0,5 точки

$5+5.(x-5)=30;$ → 0,5 точки

$5(x-5)=25;$ → 0,5 точки

$x-5=5;$ → 0,5 точки

$\underline{\underline{x=10.}}$ → 0,5 точки

Общо за 1б) зад. 4 точки

2 зад. 70 км/ч + 50 км/ч = 120 км/ч (I и II влак заедно) → 1 точка

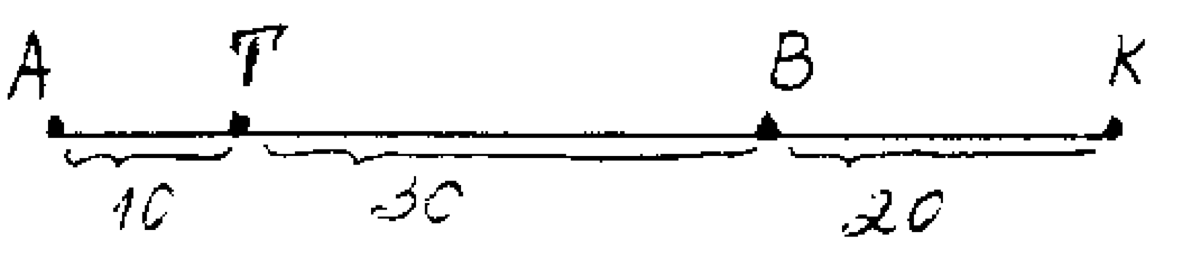
1 точка ← 240 : 120 = 2 ч (Времето от тръгването до срещата на влаковете)

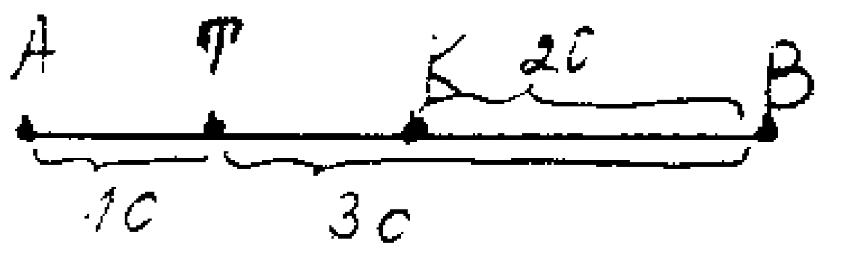
Времето на полета на гълъба е общо 2 ч → 3 точки

⇒ Гълъбът е изминал 2.100 = $\underline{\underline{200}}$ км → 1 точка

Общо за 2 зад 6 точки

3 зад. Възможното разположение на дърветата е изобразено на черт. 1 и черт. 2:





AK = 10 + 30 + 20 = $\underline{\underline{60 м}}$ или AK = (10 + 30) − 20 = $\underline{\underline{20 м}}$

За всеки вярно решен случай – по 3 точки

Общо за 3 зад. 6 точки

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Кратки решения на задачите за 5. клас:

1зад. а) Ако означим числото на което съкращаване едновременно числителя и знаменателя с X, имаме $7x+13x=4140$ (2 точки)

$20x=4140$, $x=207$ (1 точка)

$\Rightarrow$ дробта е $\frac{1449}{2691}$ (1 точка)

Общо за 1зад. а) 4 точки

б) Записваме първото число $\frac{n+10}{n}$ по следния начин:

$\frac{n+10}{n}=\frac{n}{n}+\frac{10}{n}=1+\frac{10}{n}$ (1 точка)

$\Rightarrow$ n е делител на 10, т.е. n е 1, 2, 5 или 10 (1 точка)

Аналогично $\frac{n+7}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}+\frac{6}{n+1}=1+\frac{6}{n+1}$ (1 точка)

$\Rightarrow$ $n+1$ е делител на 6, т.е. $n+1$ е 1, 2, 3 или 6, откъдето n е 1, 2 или 5 (1 точка)

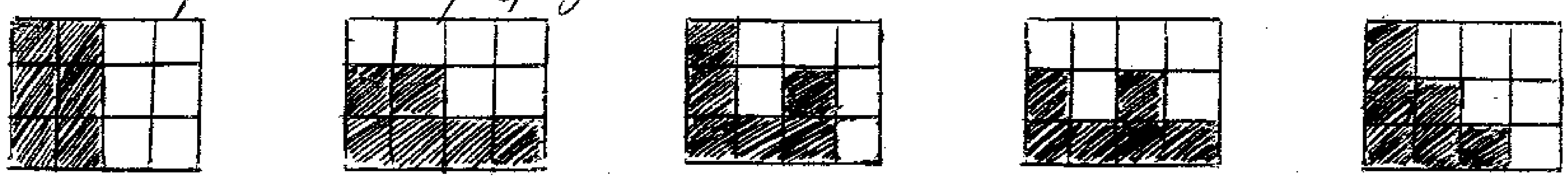
Проверяваме за коя от стойностите 1, 2 или 5 третото число е цяло:

$\frac{11.1+1}{3.1-1}=6$; $\frac{11.2+1}{3.2-1}=\frac{23}{5}$; $\frac{11.5+1}{3.5-1}=4$

$\Rightarrow$ $\underline{n=1}$ (1 точка) или $\underline{n=5}$ (1 точка)

Общо за 1зад. б) 6 точки

2зад. Търсените разрязвания са:



За всеки един от случаите по 1 точка. Общо за 2зад. 5 точки

3зад. От определението на действието степенуване следва, че:

$$8^{104}=\underbrace{8.8.\dots8}_{104\text{ пъти}}=\underbrace{2.2.2.2.2.2.\dots2.2.2}_{3.104\text{ пъти}}=\underbrace{4.4.\dots4}_{312:2\text{ пъти}}=4^{156}\ (1\text{ точка})$$

Аналогично $5^{312}=\underbrace{5.5.\dots5}_{312\text{ пъти}}=\underbrace{25.25\dots25}_{312:2\text{ пъти}}=25^{156}$ (1 точка)

$$\Rightarrow 4^{156}.25^{156}=\underbrace{4.4\dots4}_{156\text{ пъти}}.\underbrace{25.25\dots25}_{156\text{ пъти}}=\underbrace{100.100\dots100}_{156\text{ пъти}}=1\underbrace{000\dots0}_{312\text{ нули}}\ (1\text{ точка})$$

$$\Rightarrow n=8^{104}.5^{312}+8=1\underbrace{000\dots0}_{312\text{ нули}}+8=1\underbrace{000\dots0}_{311\text{ нули}}8\ (1\text{ точка}) \Rightarrow 9 \text{ дели } n\ (1\text{ точка})$$

Общо за 3 зад. 5 точки

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА VI КЛАС

---

1 зад. а/ Да се пресметне стойността на израза :

$$A = \frac{0{,}3 - 0{,}3 : 0{,}6 - 0{,}5|1{,}6 - 2{,}2| - 0{,}5}{(10{,}8 : 2 - 0{,}2 - \frac{2}{5}.(-2 : 0{,}5 + (-3{,}5).(-2))) : \frac{8}{5} + 2{,}5}$$

б/ Да се намерят стойностите на x, y и z , ако

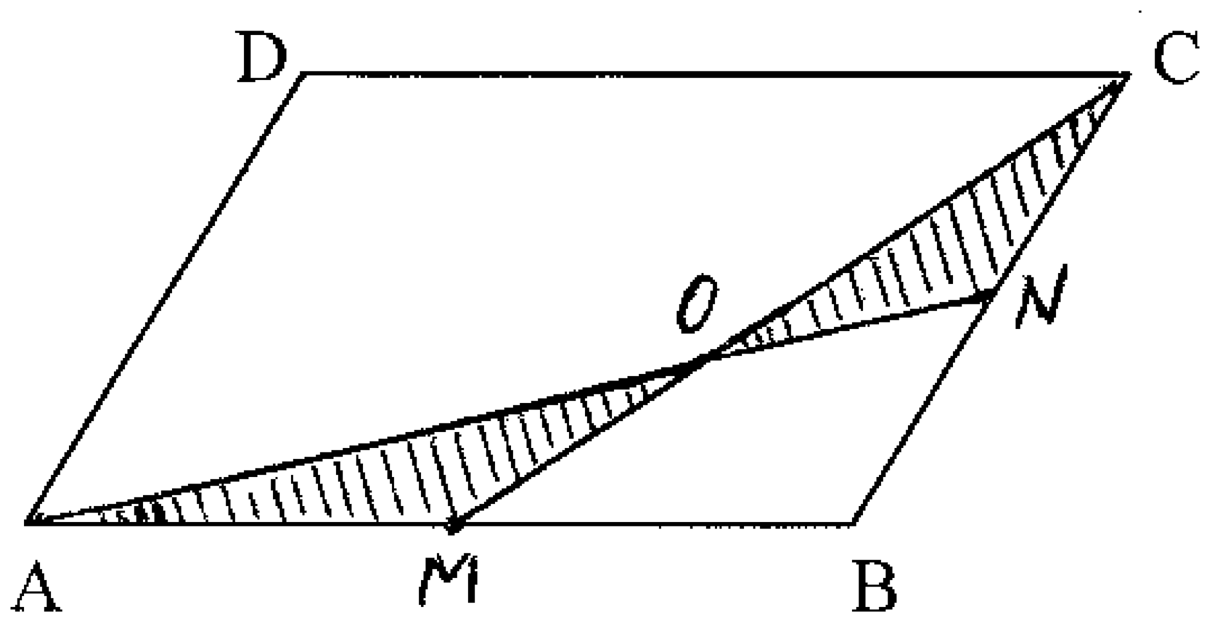
$$|x+3| + |51-y| + |z| = A$$

или

$$|x+3| + |51-y| + |z| = A + 0{,}2$$

2 зад. Като се отвори само кранът за студената вода, една вана се напълва за 23 минути, а като се отвори само кранът за топлата вода, тя се напълва за 17 минути. Никола отворил най-напред крана за студената вода. Колко минути по-късно той трябва да отвори крана за топлата вода, така че след това двата крана заедно да напълнят ваната с 1,5 пъти повече студена вода, отколкото топла.

3 зад. В успоредника ABCD точката M е средата на страната AB, а точката N - средата на BC. Да се намери отношението на лицата на защрихованата и незащрихованата част на успоредника.



Кратки решения на задачите за 6. клас:

1 зад. а) $A=\dfrac{0,3-0,5-0,5\cdot0,6-0,5}{(5,4-0,2-0,4.(-4+7)).\frac{5}{8}+2,5}=\dfrac{0,3-0,5-0,5.0,6-0,5}{(5,2-0,4.3).\frac{5}{8}+2,5}=$

$=\dfrac{0,3-0,5-0,3-0,5}{4.\frac{5}{8}+2,5}=\dfrac{-1}{5}$

За верни изчисления в числителя – 2 точки, за верни изчисления в знаменателя – 2 точки. Общо за вярно пресмятане на израза А – 4 точки

б) $|x+3|+|51-y|+|z|=-\frac{1}{5}$ – невъзможно, защото

$|x+3|\geqq 0,\ |51-y|\geqq 0,\ |z|\geqq 0$ → 1 точка

$\left.\begin{array}{l}|x+3|+|51-y|+|z|=-\frac{1}{5}+0,2=0\\ |x+3|\geqq 0,\ |51-y|\geqq 0,\ |z|\geqq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}|z|=0 \Rightarrow z=0 \rightarrow 1\text{ точка}\\ |x+3|=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow 1\text{ точка}\\ |51-y|=0 \Rightarrow y=51 \rightarrow 1\text{ точка}\end{array}$

За 2б) зад. – 4 точки. Общо за 1 зад. 8 точки

2 зад. Понеже отношението на студената и топлата вода в напълнената вана е 3 : 2, тя съдържа $\frac{3}{5}$ части студена вода и $\frac{2}{5}$ части топла вода. (1 точка)

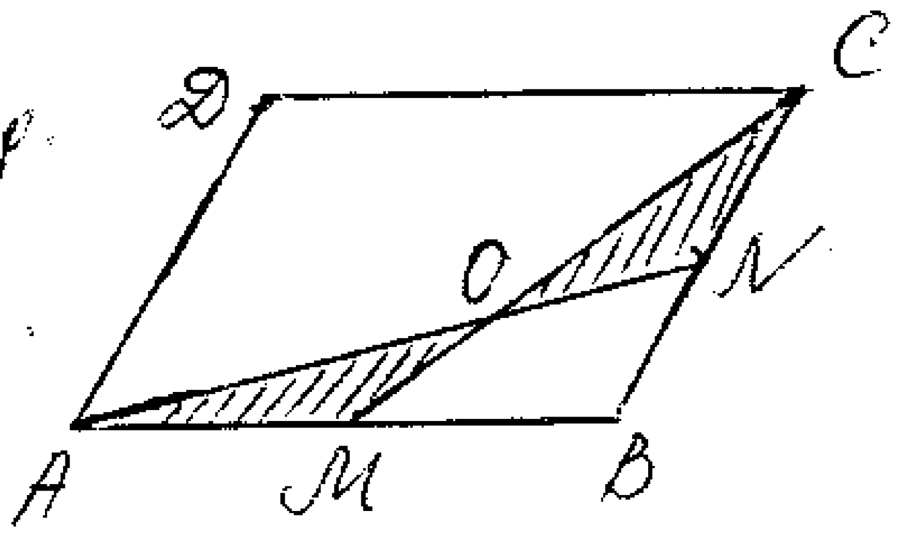
Следователно студената вода трябва да тече общо $\frac{3}{5}.23=\frac{69}{5}$ минути, (1,5 точки)

Топлата вода трябва да тече общо $\frac{2}{5}.17=\frac{34}{5}$ минути. (1,5 точки)

Ето защо кранът за топлата вода трябва да се отвори след $\frac{69}{5}-\frac{34}{5}=\frac{35}{5}=7$ минути (1 точка)

Общо за 2 зад. 5 точки

3 зад.



Последователно получаваме, че

$S_{\triangle ABN}=S_{\triangle CBM}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (2 точки)

$\left.\begin{array}{l}S_{\triangle AMO}=S_{\triangle ABN}-S_{MBNO}\ (0,5\text{ точки})\\ S_{\triangle CNO}=S_{\triangle CBM}-S_{MBNO}\ (0,5\text{ точки})\end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle AMO}=S_{\triangle CNO}$ (1 точка)

Освен това $S_{\triangle CNO}=S_{\triangle BON}$ (1 точка) и $S_{\triangle AMO}=S_{\triangle MBO}$ (1 точка)

$\Rightarrow$ търсеното отношение $\dfrac{S_{\triangle AMO}+S_{\triangle CON}}{S_{ACCD}+S_{MBNO}}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$ (1 точка)

Общо за 3 зад. 7 точки

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА VII КЛАС

---

1 зад. Даден е многочленът $P=(x+b)(2-3x+x^3)$, където b е рационално число.

а/ Да се приведе в нормален вид многочленът P

б/ За коя стойност на b коефициентите пред трета и първа степен са равни?

в/ Да се намери числената стойност на P, като x се замести с най-голямото цяло отрицателно число, а b - със стойността на израза

$$M=\frac{2^2.5^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^4.(-1)^{1999}}+2^2.10^2$$

г/ Да се разложи на множители многочленът $2-3x+x^3$.

2 зад. Даден е триъгълник ABC , за който ъгъл $BAC = 45^0$. Права през върха A, перпендикулярна на ъглополовящата на ъгъл BAC, пресича правата BC в точка M. Намерете ъглите на триъгълника, ако $BM = BA + AC$.

3 зад. Професор Всезнайко върви по движещ се нагоре ескалатор, като изкачва едно стъпало за една секунда . До върха на ескалатора той изкачва 20 стъпала. На следващия ден професорът се качва със скорост две стъпала за секунда и изминава до върха на ескалатора 32 стъпала. На третият ден ескалаторът не работи. Колко стъпала трябва да изкачи професорът?

Кратки решения на задачите за 7. клас.

1 зад. а) $P=(x+b)(2-3x+x^3)=2x+2b-3x^2-3xb+x^4+bx^3 \Rightarrow$

$P=x^4+bx^3-3x^2+(2-3b)x+2b$ (1 точка)

б) $b=2-3b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$ (1 точка)

в) $M=\dfrac{2^2\cdot5^2\cdot\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2^4}\cdot(-1)}+400=\dfrac{-5^2}{\frac{1}{2^4}}+400=-5^2\cdot2^4+400=0=b$ (1 точка)

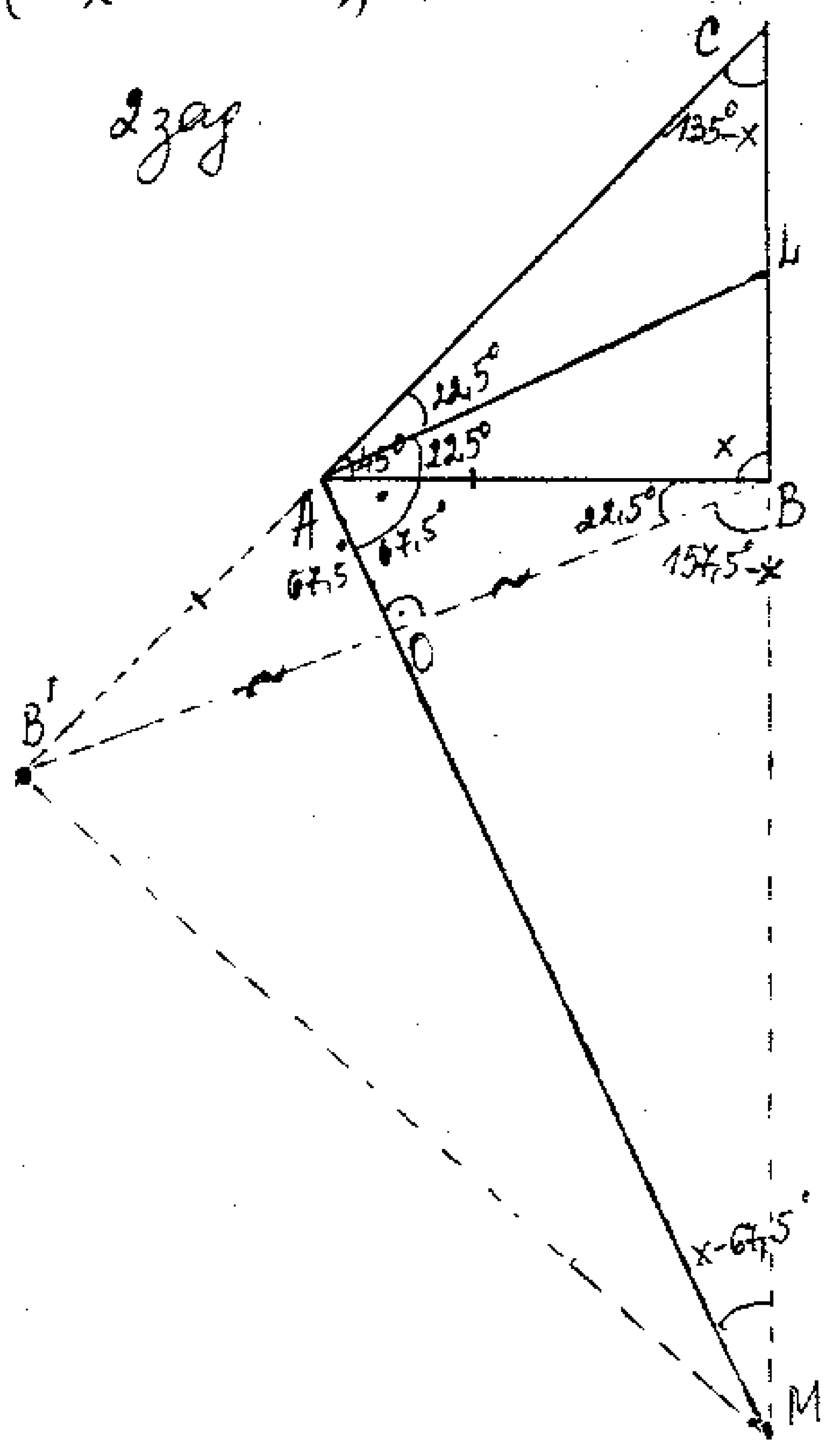
$x=-1$ (0,5 точки)

$P=(-1+0)(2-3(-1)+(-1)^3)=(-1)\cdot(2+3-1)=(-1)\cdot4=-4$ (0,5 точки)

г) $2-3x+x^3=2-2x-x+x^2-x^2+x^3=2(1-x)-x(1-x)-x^2(1-x)=(1-x)(2-x-x^2)=$ (1 точка)

$=(x-1)(x^2+x-1-1)=(x-1)((x^2-1)+(x-1))=(x-1)((x-1)(x+1)+(x-1))=(x-1)\cdot(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$ (1 точка). Общо за 1 зад. 6 точки

2 зад.



1 сл.) т. B е между т. C и т. M (общо 4 точки)

Постр. $AB'=AB$ (т. $B'\in AC$) (1 точка) $\Rightarrow B'C=BM$

$\sphericalangle BAM=90^\circ-\frac{45^\circ}{2}=67,5^\circ$

$\sphericalangle B'AM=180^\circ-(90^\circ+\frac{45^\circ}{2})=67,5^\circ$

AM – ъглопол. в равнобедр. $\triangle B'BA \Rightarrow AM\perp BB'$ и $B'O=OB$, където $O=BB'\cap AM$ (1 точка)

Следователно $\triangle B'MB$ – равнобедрен ($BM=B'M$);

Но $BM=B'C$

$\Rightarrow B'M=B'C \Rightarrow \sphericalangle B'MC=\sphericalangle B'CM$ (1 точка)

Нека $\sphericalangle ABC=x^\circ \Rightarrow$

$135^\circ-x=2(x-67,5^\circ) \Rightarrow x=\underline{90^\circ}=\sphericalangle ABC$ (0,5 точки)

$\Rightarrow \sphericalangle ACB=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=\underline{45^\circ}$ (0,5 точки)

2 сл.) т. C е между т. B и т. M (общо 4 точки)

Постр. $AC'=AC$ (т. $C'\in AB$) (1 точка) $\Rightarrow BC'=BM$

$\sphericalangle MAC=90^\circ-22,5^\circ=67,5^\circ$

$\sphericalangle C'AM=180^\circ-(90^\circ+22,5^\circ)=67,5^\circ$

AM – ъглопол. в равнобедр. $\triangle C'AC \Rightarrow AM\perp CC'$ и $C'O=OC$, където $O=CC'\cap AM$ (1 точка)

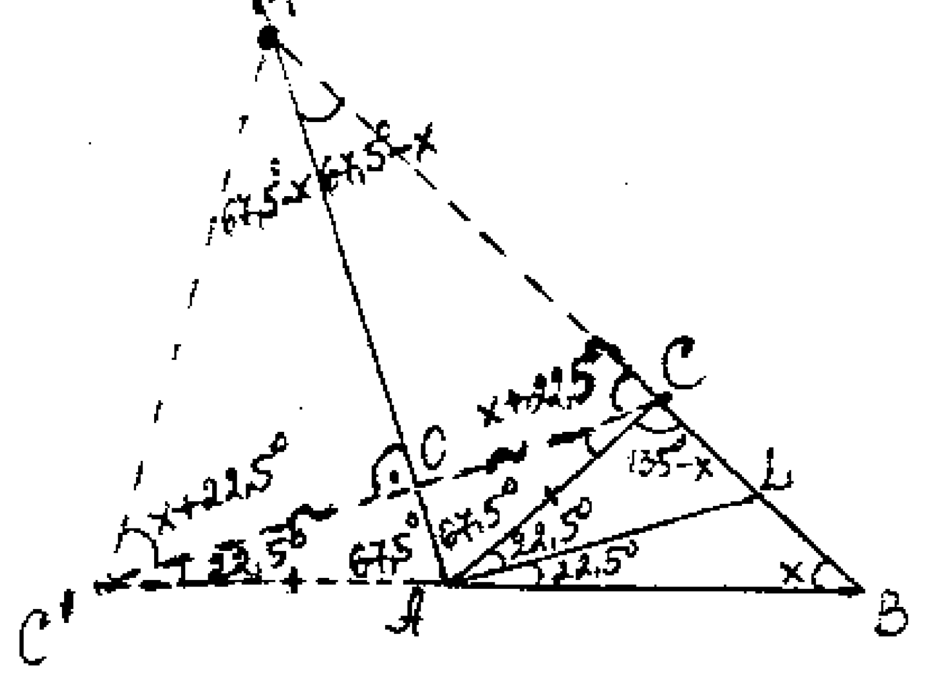
Следователно $\triangle C'MC$ – равнобедрен ($C'M=CM$)

Но $BC'=BM \Rightarrow \sphericalangle MC'B=\sphericalangle BMC'$ (1 точка)

Нека $\sphericalangle ABC=x^\circ \Rightarrow$

$x+22,5^\circ+22,5^\circ=2(67,5^\circ-x) \Rightarrow x=\underline{30^\circ}=\sphericalangle ABC$ (0,5 точки)

$\Rightarrow \sphericalangle ACB=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=\underline{105^\circ}$ (0,5 точки)



Общо за 2 зад. 8 точки

3 зад.

Нека $V_{ескалатора}$ = n стъпала за секунда – (1 точка)

$t_1=20:1=20$ сек. (1 точка), $t_2=32:2=16$ сек (1 точка)

$\Rightarrow 20.n+20=16.n+32$ (2 точки) $\Rightarrow n=3$ (0,5 точки)

Следователно ескалаторът има $20.3+20=80$ стъпала (0,5 точки)

Общо за 3 зад. 6 точки

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно. При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА VIII КЛАС

1 зад. Да се пресметне стойността на израза

$$A=\left(\frac{3(a+2)}{2(a^3+a^2+a+1)}+\frac{2a^2-a-10}{2(a^3-a^2+a-1)}\right):\left(\frac{5}{a^2+1}+\frac{3}{2(a+1)}-\frac{3}{2(a-1)}\right)$$

при

$$a=\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{2}$$

и да се определи какво число е тя - рационално или ирационално.

2 зад. Диагоналите AC и BD на трапеца ABCD (AB II CD) се пресичат в точката O, а точките M и N са средите съответно на AB и BC.

а/ Отсечките MN и BO се пресичат в точка Q, а отсечките AQ и MO се пресичат в точка T. Ако OT= 3 см, да се намери дължината на OM.

б/ Точката P е среда на CD. Ако MN = PN да се докаже, че ABCD е равнобедрен трапец и точките P, O и M лежат на една права.

3 зад. Реалните числа a, b, c и d удовлетворяват равенствата $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ и $a.c+b.d=0$. Да се пресметне стойността на израза $a.d-в.c$.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА IX КЛАС
на техникуми и СПТУ и на гимназии и СОУ-непрофилирано обучение, както и за 10. клас на гимназии и СОУ - профилирано обучение

1 зад. Дадено е уравнението $x^2+2(m+1)x-m^2-2m-2=0$, където m е реален параметър.
а/ Да се докаже, че за всяка стойност на m уравнението има корени с различни знаци.
б/ Да се намерят стойностите на m, за които разликата на корените на даденото уравнение е равна на 6.

2 зад. Даден е трапец ABCD(ABIICD). Ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и D се пресичат в точка K. Ъглополовящите на външните ъгли при върховете B и C се пресичат в точка E. Дължината на отсечката KE е a. Да се намери периметъра на ABCD.

3 зад. Да се реши системата уравнения:

$$\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{cases}$$

Кратки решения на задачите за 8. клас

1 зад. $A=\left(\frac{\overset{2(a^2-1)}{3(a+2)}}{2(a^2(a+1)+(a+1))}+\frac{2a^2-a-10}{2(a^2(a-1)+(a-1))}\right):\left(\frac{\overset{2(a^2-1)}{5}}{a^2+1}+\frac{\overset{(a^2+1)(a-1)}{3}}{2(a+1)}-\frac{\overset{(a+1)(a^2+1)}{3}}{2(a-1)}\right)=$

$=\left(\frac{\overset{(a-1)}{3(a+2)}}{\underbrace{2(a+1)(a^2+1)}_{0{,}5\ \text{точки}}}+\frac{\overset{(a+1)}{2a^2-a-10}}{\underbrace{2(a-1)(a^2+1)}_{0{,}5\ \text{точки}}}\right):\left(\frac{\overbrace{(10a^2-10)}^{0{,}5\ \text{точки}}+\overbrace{(3a^3+3a-3a^2-3)}^{0{,}5\ \text{точки}}-\overbrace{(3a^3+3a^2+3a+3)}^{0{,}5\ \text{точки}}}{2(a^2+1)(a^2-1)}\right)=$

$=\frac{\overbrace{(3a^2-3a+6a-6)}^{0{,}5\ \text{точки}}+\overbrace{(2a^3-a^2-10a+2a^2-a-10)}^{0{,}5\ \text{точки}}}{2(a+1)(a-1)(a^2+1)}:\frac{\overbrace{4a^2-16}^{0{,}5\ \text{точки}}}{2(a^2+1)(a^2-1)}=\frac{2a^3+4a^2-8a-16}{2(a^2-1)(a^2+1)}:\frac{\overbrace{4(a-2)(a+2)}^{0{,}5\ \text{точки}}}{2(a^2+1)(a^2-1)}=$

$=\frac{2a^2(a+2)-8(a+2)}{2(a^2-1)(a^2+1)}\cdot\frac{2(a^2+1)(a^2-1)}{4(a-2)(a+2)}=\frac{\overbrace{2(a+2)(a^2-4)}^{0{,}5\ \text{точки}}}{4(a-2)(a+2)}=\frac{a+2}{2}$ (0,25 точки)

ДМ: $a^2-1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq\pm 1$ (0,25 точки)

$a^2+1>0$ за $\forall a$

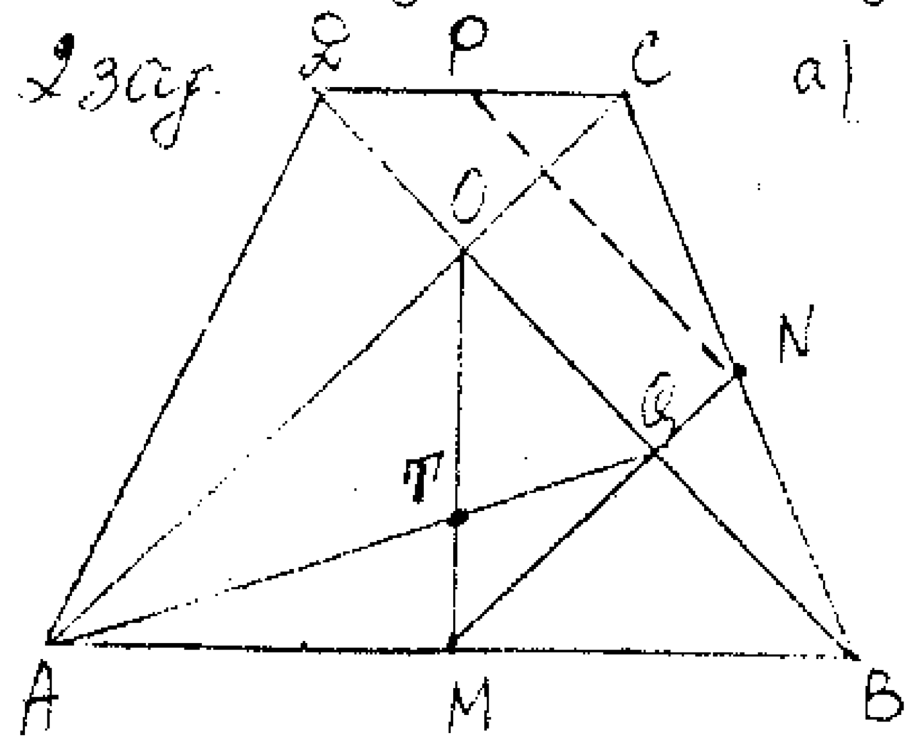
$(a-2)(a+2)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq\pm 2$ (0,25 точки)

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{2}=|3+\sqrt{2}|-\sqrt{2}=3+\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\in$ ДМ (0,5 точки)

$\Rightarrow A=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5\in Q$ (0,25 точки)

Общо за 1 зад. 7 точки

2 зад.



а) MN – средна отсечка в $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ (0,5 точки), $MQ \parallel AO$ и M – среда на AB $\Rightarrow$ Q – среда на BO (0,5 точки)

OM и AQ – медиани в $\triangle ABO \Rightarrow$ T – медицентър в $\triangle ABO$ (1 точка)

$\Rightarrow \frac{OT}{TM}=\frac{2}{1} \Rightarrow OM=\frac{3}{2}OT=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}=4{,}5$ см (1 точка)

Общо за 2а) зад. 3 точки

б) MN – средна отсечка в $\triangle ABC \Rightarrow AC=2MN$ (0,5 точки)
PN – средна отсечка в $\triangle DBC \Rightarrow BD=2PN$ (0,5 точки)
$\Rightarrow BD=AC$ (PN = MN по усл.) $\Rightarrow$ ABCD – равнобедрен трапец (1 точка)

$\Rightarrow AO=OB$ и $OC=OD$ (0,5 точки)

OM – медиана в равнобедр. $\triangle ABO \Rightarrow OM\perp CD$ (0,5 точки)

OP – медиана в равнобедр. $\triangle DOC \Rightarrow OP\perp CD$ (0,5 точки)

$\Rightarrow$ O, P, M на една права (0,5 точки)

Общо за 2б) зад. 4 точки. Общо за 2 зад. 7 точки

3 зад. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=1$ (2 точки)
$(ac+bd)^2=a^2c^2+2acbd+b^2d^2=0$ (2 точки)
Чрез почленно изваждане получаваме:

$a^2d^2-2acbd+b^2c^2=1 \Rightarrow (ad-bc)^2=1 \Rightarrow ad-bc=\pm 1$ (2 точки)

Общо за 3 зад. 6 точки

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Кратки решения на задачите за 9. клас

1 зад. а) $D = (m+1)^2 + m^2+2m+2 = (m+1)^2+(m+1)^2+1 = 2(m+1)^2+1$ (1 точка)

Тъй като $D = 2(m+1)^2+1>0$, то уравнението има два различни реални корена за всяко m (1 точка)

$x_1.x_2 = -m^2-2m-2 = -(m+1)^2-1$ (съгласно ф-ла на Виет) (1 точка)

От $x_1.x_2 = -(m+1)^2-1<0 \Rightarrow x_1$ и x_2 имат различни знаци (1 точка)

Общо за 1а) зад. 4 точки

б) $6 = |x_1-x_2| \Leftrightarrow 36 = (x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2 = -2(m+1) \\ x_1.x_2 = -m^2-2m-2 \end{array}\right.$ (формули на Виет) (1 точка)

$\Rightarrow 36 = (-2(m+1))^2-4(-m^2-2m-2) = 4(m^2+2m+1)+4m^2+8m+8 \Rightarrow$

$36 = 4m^2+8m+4+4m^2+8m+8$

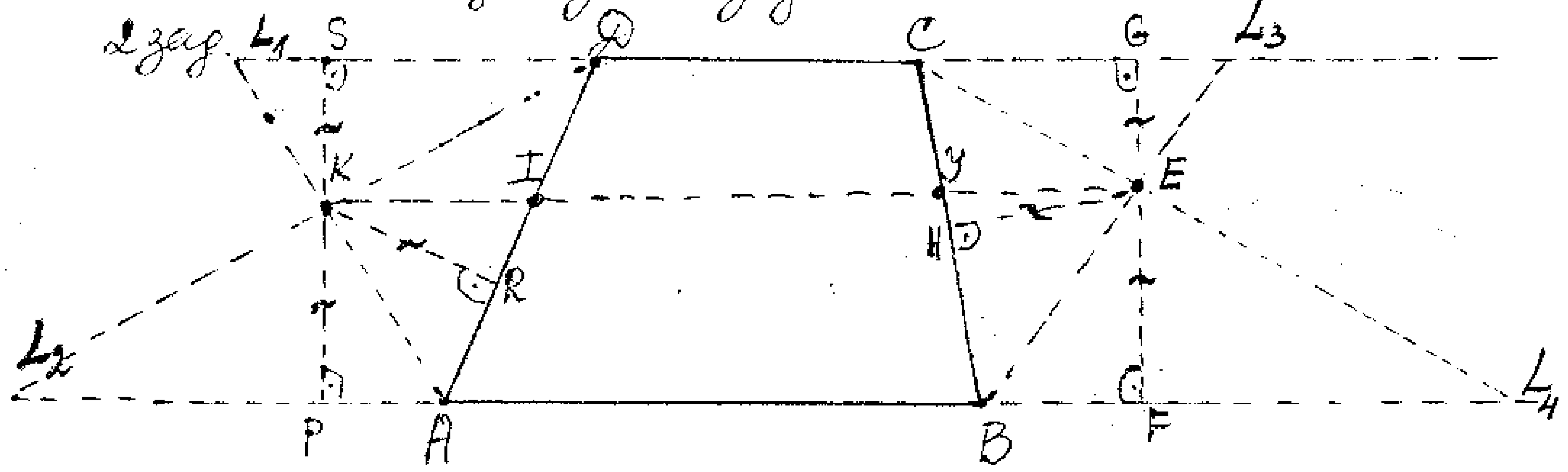
$36 = 8m^2+16m+12$

$8m^2+16m-24=0 \Leftrightarrow \underset{(1\ точка)}{m^2+2m-3=0} \Rightarrow \underset{(0{,}5\ точки)}{\underline{m_1=-3}}$ или $\underset{(0{,}5\ точки)}{\underline{m_2=1}}$

Общо за 1б) зад. 3 точки

Общо за 1 зад. 7 точки

2 зад.



Общо за 2зад. 6 точки

$KP\perp AB, KS\perp DC, AB\parallel DC \Rightarrow$ т. K, P и S лежат на една права $\perp$ основите на трапеца (0,5 точки)

$EF\perp AB, EG\perp DC, AB\parallel DC \Rightarrow$ т. E, F и G лежат на една права $\perp$ основите на трапеца (0,5 точки)

$KR\perp AD$, $KP=KR$ ($K\in AL_1$ - ъглоп. на $\angle A$), $KR=KS$ ($K\in DL_2$ - ъглоп. на $\angle D$) $\Rightarrow KP=KR=KS$ (0,5 т.)

Аналогично $EF=EH=EG$ (0,5 точки)

$\left.\begin{array}{l} KP\parallel EF, \text{ защото } KP\perp AB \text{ и } EF\perp AB \\ SP=GF, \text{ защото } AB\parallel CD \text{ и } SP\perp AB, FG\perp AB \Rightarrow KS=KP=EF=EG=KR=EH \end{array}\right\} \Rightarrow$

$KPFE$ - успоредник $\Longrightarrow KE\parallel AB\parallel DC$ (0,5 точки)

$\Rightarrow$ ако $KE\cap AD=I$, $KE\cap BC=Y$, то $AI=ID$ и $BY=YC$ (0,5 точки)

$\triangle ADK$ - правоъгълен ($\angle AKD=90°$) (0,5 точки) $\Rightarrow \underset{(0{,}5\ точки)}{KI=AI=ID}$ (свойство на медианата към хипот.)

Аналогично $\triangle BEC$ - правоъгълен ($\angle BEC=90°$) (0,5 точки) $\Rightarrow EY=YB=YC$ (0,5 точки)

$P_{ABCD} = AB+DC+BC+AD = (AB+DC)+BC+AD = 2IY+2YE+2KI = 2KE = 2a$ (1 точка)

3 зад. 1сл.) Ако x и y са с различни знаци, то $xy<0$ и $|xy|=-xy$ (1 точка)

$\left|\begin{array}{l} y^2+xy+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-\dfrac{(y^2+2)}{y}, \text{ тъй като } (0,0) \text{ не е решение (1 точка)} \\ 8-\left(\dfrac{y^2+2}{y}\right)^2 = \left(-\dfrac{(y^2+2)}{y}+2y\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underset{(1\ точка)}{y^4-4y^2+4=0} \Leftrightarrow (y^2-2)^2=0 \Rightarrow \underset{(0{,}5\ точки)}{y=\pm\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x=\mp 2\sqrt{2}$ (0,5 точки), т.е. решения са $(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$

2сл.) Ако x и y са с еднакви знаци, то $xy>0$ и $|xy|=xy$ (1 точка)

$\left|\begin{array}{l} y^2-xy+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{y^2+2}{y}=x, \text{ тъй като } (0,0) \text{ не е решение (1 точка)} \\ 8-\left(\dfrac{y^2+2}{y}\right)^2 = \left(\dfrac{y^2+2}{y}+2y\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underset{(1\ точка)}{5y^4+4y^2+4=0}$ - н.р.к, тъй като $D<0$

Общо за 3 зад. 7 точки

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.

ТЕМА ЗА X КЛАС

на техникуми и СПТУ и на гимназии и СОУ-непрофилирано обучение, както и за 11. клас /нов/ на гимназии и СОУ - профилирано обучение

---

1 зад. Нека $f(x)=x^2 - |x| -2$. Да се реши неравенството:
а/ $f(x) \geq 0$ б/ $\sqrt{f(x)} \leq x-1$

2 зад. В равнобедрен трапец ABCD(AB||CD) отношението на основите AB и CD е 5:1. Перпендикулярът, построен през върха A към бедрото BC, пресича бедрото във вътрешна за него точка M. Отсечките AM и BC са равни. Намерете :
а/ синуса на ъгъла , прилежащ на голямата основа на трапеца
б/ лицето на трапеца, ако дължината на бедрото е равна на c.

3 зад. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$
има точно три различни реални корена.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.

ТЕМА ЗА XI КЛАС

на техникуми и СПТУ и на гимназии и СОУ-непрофилирано обучение

---

1 зад. Да се намерят всички аритметични прогресии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за които $a_3^2 - a_1.a_9 = 3$, $a_1^2 + a_5^2 = 2$ и $S_6 < 0$, където S_6 е сумата от първите шест члена на съответната прогресия.

2 зад. Дадена е окръжност с център O, диаметър AB и произволен радиус OC. През точка C е построена хорда CD, перпендикулярна на AB. През произволна точка M, лежаща на OC е построена хорда AP. Ако DP пресича BC в точка N, да се докаже, че:

а/ OC . BN = OM . DB

б/ Ако M е средата на OC, докажете, че N е средата на BC.

3 зад. Решете уравнението $\frac{1}{3x} + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{3}{2}$ при $|x| < 1$.

Кратки решения на задачите за 10. клас

1 зад. а) (I начин) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow |x|^2-|x|-2\geq 0 \Leftrightarrow |x|\geq 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(II начин) $x\geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2\geq 0$ (1 точка) $\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$, но $x\geq 0$ $\Rightarrow x\in[2,+\infty)$ (1 точка)

$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2+x-2\geq 0$ (1 точка) $\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$, но $x<0$ $\Rightarrow x\in(-\infty,-2]$ (1 точка)

$\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ Общо за 1а) зад. 4 точки

б) $\sqrt{f(x)}\leq x-1$ ДМ: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ съгл. усл. а) (1 точка)

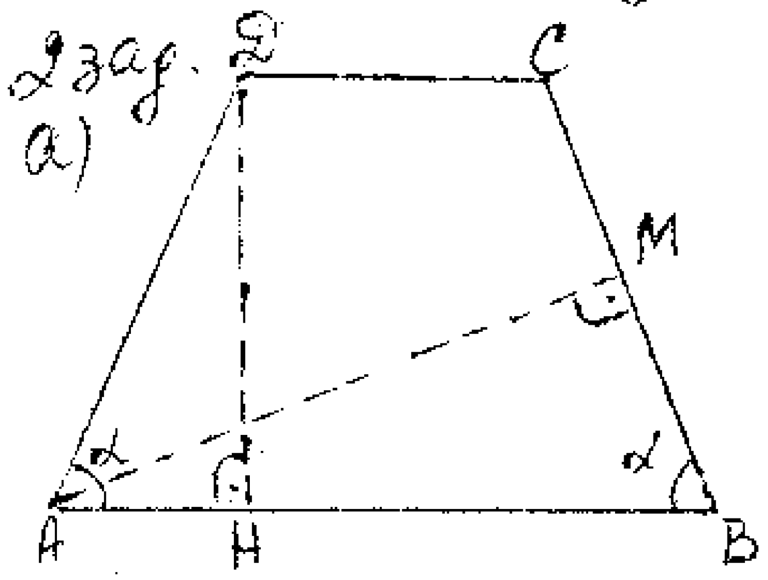
$\Updownarrow$

$\begin{cases} f(x)\leq(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \\ x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\end{cases}$ (1 точка) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-|x|-2\leq(x-1)^2 \\ x\geq 1 \\ x\leq -2\end{cases}$ Н.Р. (0,5 точки) $\cup \begin{cases} x^2-|x|-2\leq(x-1)^2 \\ x\geq 1 \\ x\geq 2\end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2-x-2\leq(x-1)^2$

Сл. $x\in[2,3]$ (0,5 точки). Общо за 1б) зад. 3 точки

Общо за 1 зад. 7 точки. Общо за 2 зад. 6 точки – за 2а) зад. 4 точки, за 2б) зад. 2 точки

2 зад. а)



$\sphericalangle A=\alpha$, $DH\perp AB$, $AB:CD=5:1 \Leftrightarrow AB=5CD$

$AH=\dfrac{AB-DC}{2}=\dfrac{5CD-CD}{2}=2CD$ (0,5 точки)

$\triangle AHD\sim\triangle BMA$ (I пр.) $\begin{cases} 1.\ \sphericalangle H=\sphericalangle M=90^\circ \\ 2.\ \sphericalangle HAD=\sphericalangle ABM=\alpha\ (ABCD\text{ – равнобедр. тр.})\end{cases}$ (0,5 точки)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{AM}=\dfrac{AH}{BM} \Leftrightarrow \dfrac{DH}{AD}=\dfrac{AH}{BM}$, защото по усл. $AM=BC=AD$ (0,5 точки)

$BM=AB\cos\alpha=5CD\cos\alpha$ (0,5 точки)

$\sin\alpha=\dfrac{DH}{AD}=\dfrac{AH}{BM}=\dfrac{2CD}{5CD\cos\alpha} \Rightarrow 5\sin\alpha\cos\alpha=2$ (0,5 точки)

$\begin{cases} 5\sin\alpha\cos\alpha=2 \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$ (0,5 точки) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5xy=2 \\ x^2+y^2=1\end{cases}$ ($\sin\alpha=x,\ \cos\alpha=y$) $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5} \text{ или } \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt5}{5}\ (\sin\alpha>0) \\ \cos\alpha=\dfrac{2\sqrt5}{5} \text{ или } \cos\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}\end{cases}$ (0,5 точки)

Ако $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{5}$, то $BM=5.CD.\dfrac{2\sqrt5}{5}=2\sqrt5 CD$ и тъй като $BC=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{2CD}{\frac{2\sqrt5}{5}}=\sqrt5 CD$, следва че $BM>BC$, което противоречи на условието (0,5 точки)

$\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt5}{5}$ – тогава $BM=5.CD.\dfrac{\sqrt5}{5}=\sqrt5 CD$ и $BC=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{2CD}{\frac{\sqrt5}{5}}=2\sqrt5 CD$, т.е. $BC>BM$ (M – вътр. точка за BC)

б) По условие $BC=AD=c=AM$ $\Rightarrow AB=\dfrac{AM}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\frac{2\sqrt5}{5}}=\dfrac{\sqrt5 c}{2}$ (0,5 точки), $CD=\dfrac{AB}{5}=\dfrac{\sqrt5 c}{10}$ (0,5 точки)

(0,5 точки) $DH=AD\sin\alpha=c\cdot\dfrac{2\sqrt5}{5}=\dfrac{2\sqrt5}{5}.c$ $\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}(AB+CD).DH=\left(\dfrac{\sqrt5 c}{2}+\dfrac{\sqrt5 c}{10}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt5 c}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{6\sqrt5 c.2\sqrt5.c}{10.2.5}=\dfrac{3c^2}{5}$ (0,5 точки)

3 зад. $f(x)=|(x-2)(x-4)|+|(x-1)(x-5)|$ (1 точка)

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+13, & x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ 3, & x\in[1,2]\cup[4,5] \\ -2x^2+12x-13, & x\in(2,4)\end{cases}$ (1 точка)

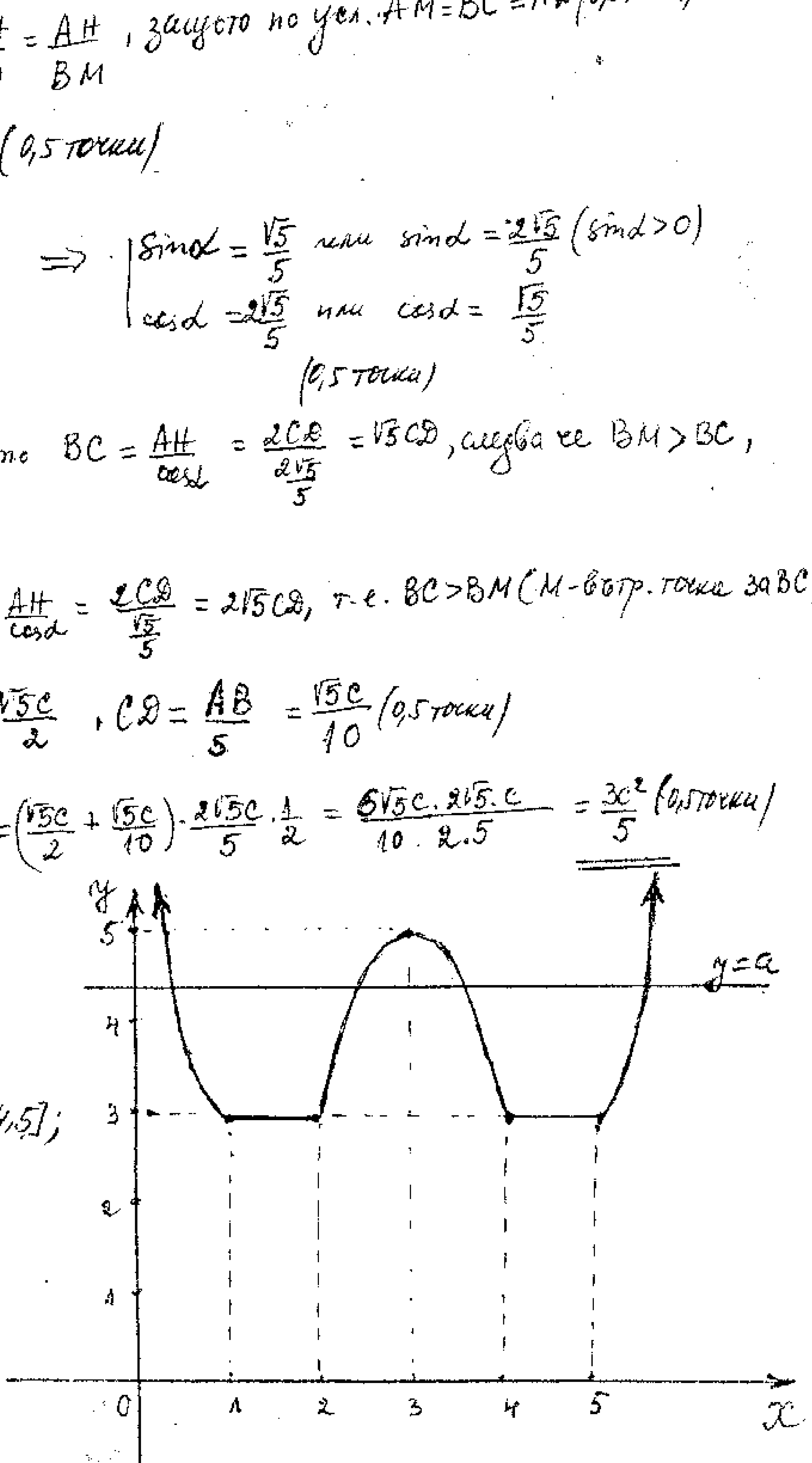
Построяване графиките на

$f_1(x)=2x^2-12x+13,\ x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$; $f_2(x)=3,\ x\in[1,2]\cup[4,5]$;

$f_3(x)=-2x^2+12x-13,\ x\in(2,4)$; $y=a$ – по 1 точка за всяка графика (всичко 4 точки)

$\Rightarrow \underline{a=5}$ (1 точка)

Общо за 3 зад. 7 точки



Кратки решения на задачите за 11. клас

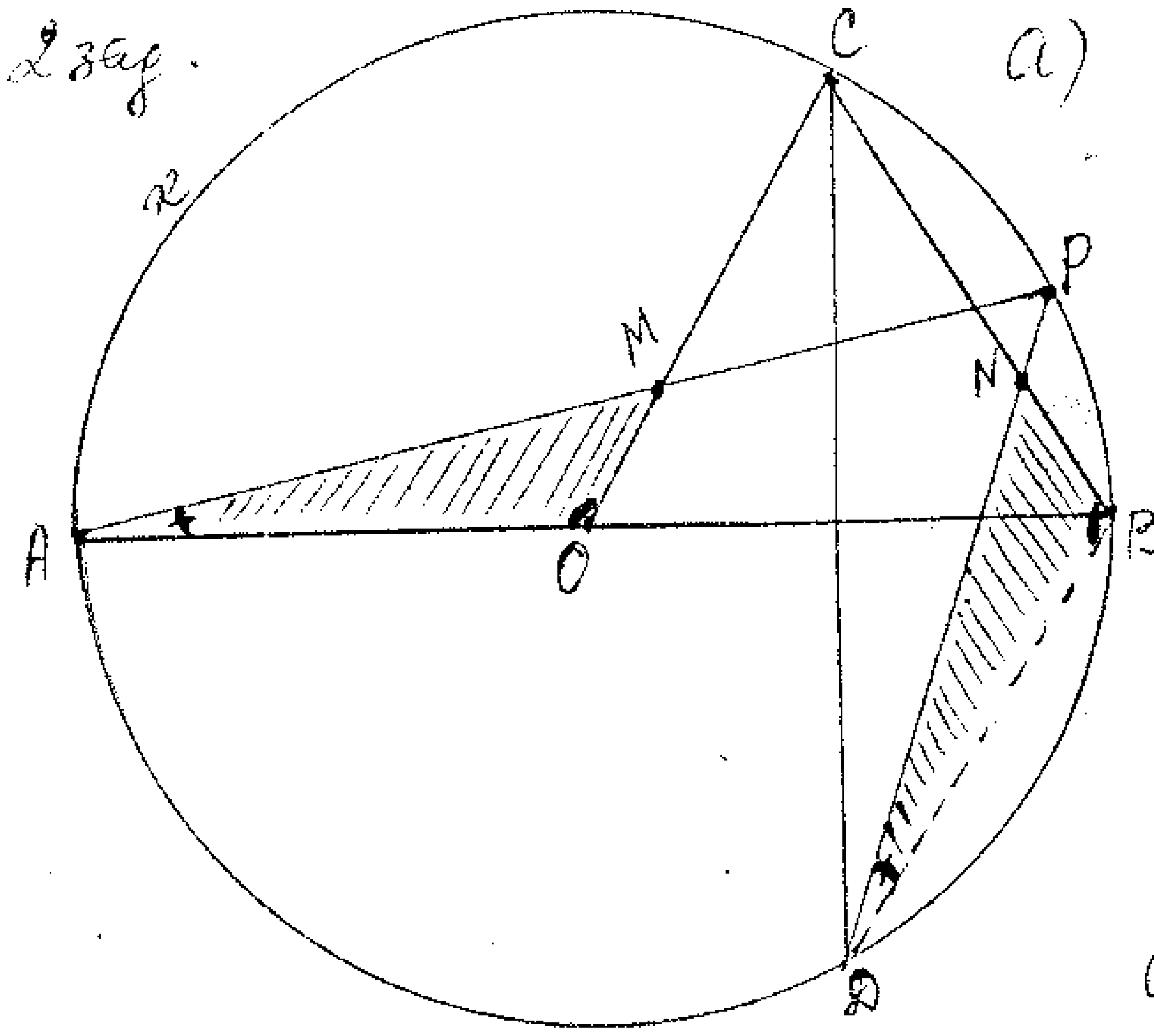
1 зад. $\div\ a_1 = x,\ d = y\ (x \neq 0, y \neq 0)$

$$\left|\begin{array}{l}(x+2y)^2 - x.(x+8y) = 3\\ x^2 + (x+4y)^2 = 2\\ S_6 = \dfrac{(2x+5y)}{2}.6 < 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x = \dfrac{4y^2-3}{4y} \text{ (1 точка)}\\ 208y^4 - 88y^2 + 9 = 0 \text{ (1 точка)}\\ \text{и } 2x+5y<0 \text{ (1 точка)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}y = \pm\dfrac{1}{2}\\ x = \mp 1\\ \text{и } 2x+5y<0 \text{ (1 точка)}\end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l}y = \pm\dfrac{3}{2\sqrt{13}}\\ x = \mp\dfrac{5}{\sqrt{13}}\\ \text{и } 2x+5y<0 \text{ (1 точка)}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 1,\ y = -\dfrac{1}{2}\\ \text{или}\\ x = -\dfrac{5}{\sqrt{13}},\ y = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}\end{array}\right. \text{ (1 точка)}$$

Следователно търсените прогресии са: $\left.\begin{array}{l}\div\ 1, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots\ldots;\\ \div\ -\dfrac{5}{\sqrt{13}}, -\dfrac{7}{2\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \ldots\ldots.\end{array}\right\}$ (1 точка)

Общо за 1 зад. 7 точки

2 зад.



а) Разгл. $\triangle AOM$ и $\triangle DBN$ $\left\{\begin{array}{l}1)\ \sphericalangle OAM = \sphericalangle NDB = \dfrac{\overset{\frown}{BP}}{2} \text{ (1 точка)}\\ 2)\ AB \perp CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \text{ (1 точка)}\\ \quad \sphericalangle DBN = \dfrac{\overset{\frown}{DAC}}{2} = \overset{\frown}{AC},\ \sphericalangle AOM = \overset{\frown}{AC}\\ \quad \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle DBN \text{ (1 точка)}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \triangle AOM \sim \triangle DBN$ (I пр.) (1 точка)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{DB} = \dfrac{OM}{NB} \Leftrightarrow BN.OA = OM.DB$ (1 точка)

Но $OA = OC = R$

$\Rightarrow BN.OC = OM.DB$ (1 точка)

Общо за 2а) зад. 6 точки

б) Ако $OM = MC$, то $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{2}{1}$ (0,5 точки)

$\triangle AOM \sim \triangle DBN \Rightarrow \dfrac{AO}{DB} = \dfrac{OM}{NB} \Leftrightarrow \dfrac{AO}{OM} = \dfrac{DB}{NB}$ (доказано в а)) $\Rightarrow \dfrac{DB}{NB} = \dfrac{2}{1}$ (0,5 точки)

Но $AB \perp CD \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow DB = CB$ (0,5 точки) $\Rightarrow \dfrac{CB}{NB} = \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow CB = 2NB,\ BN = \dfrac{1}{2}CB \Rightarrow NB = NC$ (0,5 точки)

Общо за 2б) зад. 2 точки. Общо за 2 зад. 8 точки

3 зад. $\div\div\ x, x^2, x^3, \ldots$ с частно x: $|x| < 1$, и първи член x (1 точка) $\Rightarrow S = x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{a_1}{1-q}$ (1 точка)

$\Rightarrow \dfrac{1}{3x} + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{3}{2},\ |x| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{3}{2},\ |x| < 1$ и $x \neq 0$ (1 точка)

$\Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$ (1 точка) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{5} \in ДМ,\ x_2 = \dfrac{1}{3} \in ДМ$ (1 точка)

Общо за 3 зад. 5 точки

- ЗАБЕЛЕЖКА: Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.

Инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.
ТЕМА ЗА XII КЛАС
на СОУ, IV курс-техн. след 8.кл. и V курс-техн. след 7.кл., както и за 11.клас /стар/ на гимназии и СОУ - профилирано обучение

---

1 зад. Намерете границите:

а/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ б/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$, $p \neq 0$

2 зад. ABCD е равнобедрен трапец(AB||CD). Основата AB има дължина a, а ъгъл DAB е равен на 60^0. Окръжностите, вписани в триъгълник ABC и триъгълник ACD се допират в точка T от AC. Намерете лицето на трапеца.

3 зад. Основата на пирамида е квадрат със страна a. Две околни стени са перпендикулярни на основата, а другите две образуват с нея равни ъгли α. Докажете, че пълната повърхнина

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}a^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(45^0 - \frac{\alpha}{2})}$$

За кои стойности на α е изпълнено $S_1 = a^2(3 + \sqrt{3})$?

Кратки решения на задачите за 12. клас

1 зад. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2(\sin x+1)(\sin x-\frac{1}{2})}{2(\sin x-1)(\sin x-\frac{1}{2})} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}-1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3$

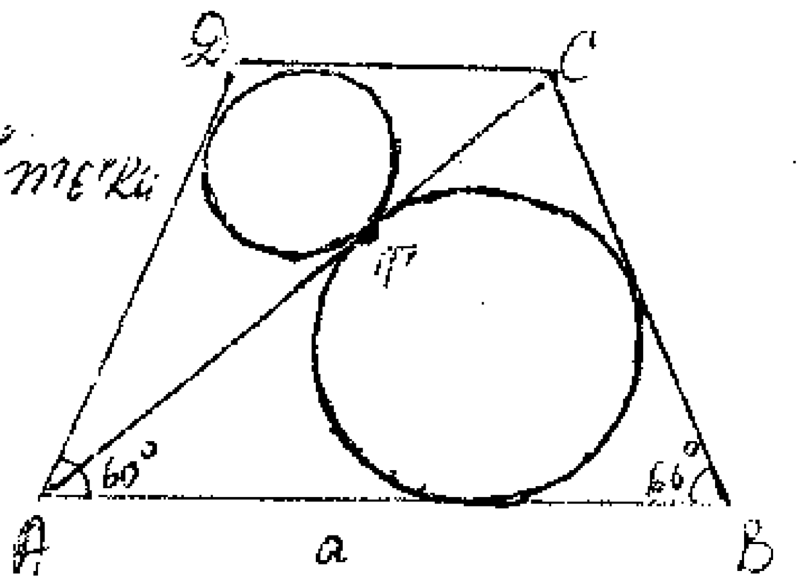
За разлагане на числителя и знаменателя – по 1 точка, за вярно изчисляване на границата – 1 точка. Общо за 1а) зад. 3 точки

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{px}{2}+2\sin\frac{px}{2}\cos\frac{px}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{px}{2}\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)} =$
(1 точка)

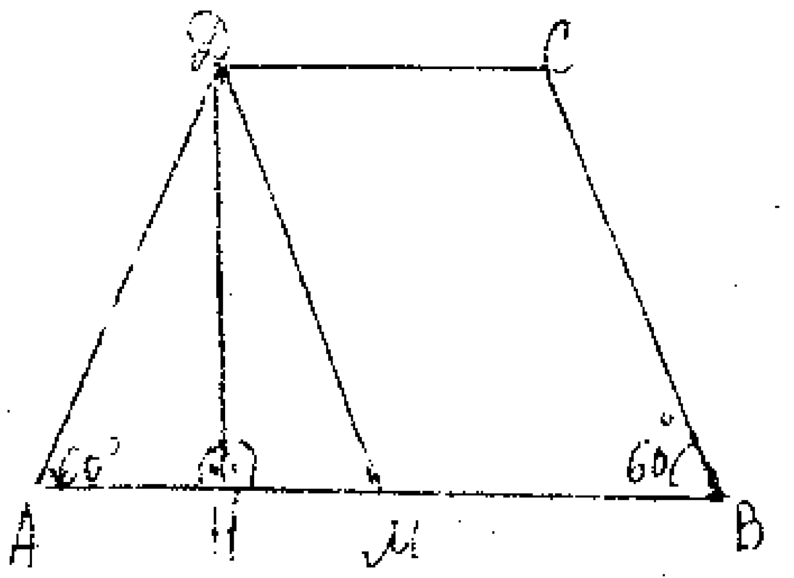
$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \frac{x}{2}\to 0\\ \frac{px}{2}\to 0}} \dfrac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\dfrac{\sin\frac{px}{2}}{\frac{px}{2}}\cdot\dfrac{px}{2}\cdot\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)} = \frac{1}{p}$ (1 точка) Общо за 1б) зад. 3 точки
(1 точка)

Общо за 1зад. 6 точки

2зад.
Общо 7точки



$\triangle ABC: \; AT = \frac{AB+AC-BC}{2}$ (1точка)
$\triangle ACD: \; AT = \frac{AD+AC-DC}{2}$ (1точка)
$\Rightarrow AB+AC-BC = AD+AC-DC$
$AB+DC = AD+BC \Leftrightarrow a+DC = 2AD \; (BC=AD)$
$ABCD$ – описан трапец (1точка)



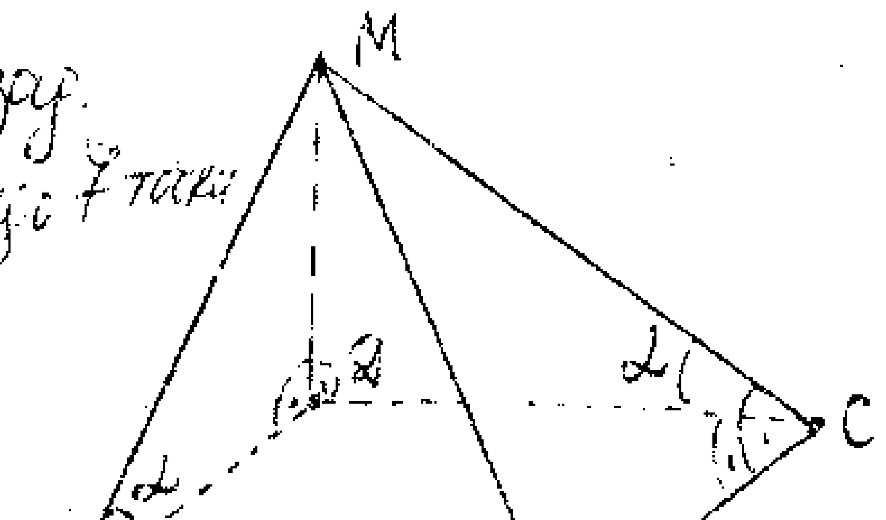
Постр. $DM \parallel CB$, $DCKMB$ успор. $\Rightarrow MBCD$ успор. $\Rightarrow BC = DM$, но $AD = BC$ по усл. (0,5точки)
$\Rightarrow \triangle AMD$ – равнобедрен $(AD = DM)$; но $\angle A = 60^\circ$ по усл. $\Rightarrow$ (0,5точка)
$\triangle AMD$ – равностранен $\Rightarrow AD = AM = DM = a - DC$ (0,5точки) (0,5точки)

$\begin{cases} a+DC = 2AD \\ a-DC = AD \end{cases} \Rightarrow \frac{a+DC}{2} = a-DC \Rightarrow a = 3DC \Rightarrow DC = \frac{1}{3}a$ (0,5точки)

$AD = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$ (0,5точка), $DH = AD\sin 60^\circ = \frac{2}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (0,5точки)

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+DC).DH = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}a\right).\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}.\frac{4a}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}}}$ (0,5точки)

3зад.
Общо 7точки



$ADM \perp ABCD$, $DCM \perp ABCD \Rightarrow MD \perp ABCD \Rightarrow MD \perp AD, MD \perp DC$ (0,5точки)
DC – проекция на MC, $BC \perp DC \Rightarrow BC \perp MC$
$\angle(BCM, ABCD) = \angle DCM = \alpha$ (0,5точки)
Аналог. $\angle(ABM, ABCD) = \angle MAD = \alpha$ (0,5точки)
$MD = a\,tg\alpha$ (0,5точки), $AD = a = AM\cos\alpha \Rightarrow AM = \frac{a}{\cos\alpha}$ (0,5точки)

$S_1 = a^2 + 2\left(\frac{1}{2}.a.a\,tg\alpha\right) + 2\left(\frac{1}{2}a.\frac{a}{\cos\alpha}\right) = a^2 + a^2 tg\alpha + \frac{a^2}{\cos\alpha} =$ (0,5точки)

$= \frac{a^2}{\cos\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha+1) = \frac{a^2}{\cos\alpha}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a^2}{\cos\alpha}.2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$ (0,5точка)

$= \frac{2a^2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2a^2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow$
(0,5точка) (0,5точки) (0,5точки)

$\underline{\underline{S_1 = \frac{\sqrt{2}a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}}}$ (0,5точки) Според усл. $S_1 = \frac{2a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = a^2(3+\sqrt{3}) \Rightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2} = (3+\sqrt{3})\cos\frac{\alpha}{2} - (3+\sqrt{3})\sin\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow (3+\sqrt{3})\sin\frac{\alpha}{2} = (3+\sqrt{3}-2)\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\sin\frac{\alpha}{2} = (\sqrt{3}+1)\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$
(1точка) тъй като $\alpha \in (0;90^\circ)$ (0,5точки)

- **ЗАБЕЛЕЖКА:** Указанието е примерно! При други начини на решаване на задачите, изработете си съответни критерии.