Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА IV КЛАС

---

1 зад. а / Да се пресметне стойността на израза
$100 - 96 : (56-52) + (160 + 17.5) : 7 - 3.8 + 66$
б/ Да се намери разликата между най-малкото шестцифрено число, записано с различни цифри, и най-голямото петцифрено число
2 зад. Ако в едно число зачеркнем една от цифрите му и полученото число прибавим към първоначалното, се получава сбор 176. Кое е това число ?
3 зад. Засадената площ на ябълкова градина е с форма на правоъгълник с дължина 430 м и широчина 200 м. Градината е оградена с 6 реда бодлива тел и има два входа по 6 м. Оградата отстои на 4 м от засадената площ. Колко килограма тежи телта, използвана за оградата, ако 10 м от нея тежат 2 килограма?

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА V КЛАС

---

1 зад. а/ Пресметнете стойността на израза: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(1\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)$. Ако стойността на израза е неправилна дроб я запишете като смесено число.
Намерете поне четири числа, които да са по-големи от $\frac{2}{5}$ и по-малки от $\frac{3}{5}$.

б/ Да се представи дробта $\frac{29}{6}$ като сбор на две дроби, на които числителите и знаменателите са прости числа или 1

2 зад. Обиколката на един равнобедрен триъгълник е равна на обиколката на правоъгълник с дължина 26 см и широчина 14 см. Да се намерят дължините на страните на триъгълника , ако една от страните му е равна на една от страните на правоъгълника.
3 зад. Да се докаже, че ако числото А= 2а + 5b се дели на 11, то и числото В= 3а + 2b също се дели на 11.

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.

ТЕМА ЗА VI КЛАС

---

1 зад. а/ Да се пресметне стойността на израза

$$\left|a-\left|b+|c|\right|+c\right|+\left|a+\left|b-|c|\right|-c\right|$$

при $a=-5$, $b=-6$, $c=-7$.

б/ Запишете целите числа, за които $|x|<n$,
където n е стойността на израза $0,(6)-\frac{2}{3}:\left(-\frac{7}{15}-\frac{1}{3}\right)$

2 зад. В правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 см са дадени точките A(-3,2), B(2,2) и C(2,5). Да се намерят координатите на всички точки, които заедно с точките A, B и C образуват успоредник. Да се намери лицето на многоъгълника с върхове намерените точки и началото на координатната система.

3 зад. Маша, Лида, Женя и Катя могат да свирят на различни инструменти-виолончело, пиано, китара и цигулка, но всяка само на един. Те владеят и различни езици-английски, френски, немски и испански / също всяка само по един/. Лида и Маша не свирят нито на цигулка, нито на виолончело и не знаят английски език. Момичето, което говори немски не свири на китара. Женя знае френски, но не свири на цигулка. Лида и тази, която знае испански не се познават. Определете за всяко момиче на какъв инструмент свири и какъв език знае.

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 23.02.2002 г.

ТЕМА ЗА VII КЛАС

---

1 зад. а/ Извършете действията и приведете в нормален вид многочлена

$$M=(x^n-1)^2-(x^n+1)^3+x^n.(x^{2n}+5)+(x^n-1).(x^n+1)$$

б/ Намерете числената стойност на многочлена M, ако $x=\frac{|a|}{a}$,

където $a<0$ и $n=\frac{|b|}{b}$, където $b>0$.

2 зад. Триъгълникът ABC е равнобедрен и ъглополовящата на външния ъгъл при върха B сключва с правата AC ъгъл с големина 15°. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC.

3 зад. Баща и тримата му сина решили да закупят нов компактдиск. Най-малкият брат-седмокласник - събрал 5,20 лв. Първият брат дал 25% от парите, събрани за покупката без него, вторият дал $33\frac{1}{3}\%$ отново от парите, събрани без него, а бащата дал 50% от парите, събрани без негово участие. Колко струва покупката?

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА VIII КЛАС

1 зад. Нека $A = \frac{a}{(в-c)^2} + \frac{в}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-в)^2}$, $B = \frac{a}{(в-c)} + \frac{в}{(c-a)} + \frac{c}{(a-в)}$.

Да се докаже, че:

а/ $A = \left(\frac{1}{(в-c)} + \frac{1}{(c-a)} + \frac{1}{(a-в)}\right) . B$;

б/ ако $A = 0$, то и $B = 0$.

2 зад. В равнобедрения триъгълник $ABC(AC=BC)$ е прекарана височината $CD(D \in AB)$. Върху CD е взета точката E така, че $CE : ED = 1 : 2$. Правата през A и E пресича BC в точката F. Да се намери дължината на BC, ако $CF = 2$ см.

3 зад. Да се докаже, че от медианите на един триъгълник може да се построи триъгълник.

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА IX КЛАС

1 зад. Да се решат уравненията :

а/ $\frac{1}{(x-1)} + f(x) + \frac{x+1}{1-x^2} = 0$, където $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 1$;

б/ $\frac{x-a}{в} + \frac{x-в}{a} = \frac{a}{(x-в)} + \frac{в}{(x-a)}$, където a и $в$ са параметри .

2 зад. Даден е остроъгълен триъгълник PQR, вписан в окръжност k. Да се построи триъгълник ABC, вписан също в k, на който вътрешните ъглополовящи пресичат k в точките P, Q и R.

3 зад. В сплав от злато и мед златото е 7,5 kg, а в друга сплав – 30 kg, като пробата му в първата сплав е с 200 по-ниска от тази във втората. По колко килограма са двете сплави, ако от тях е получена сплав с проба на златото 750 ?

Упътване: Проба p на злато в сплав от x kg означава, че златото в сплавта е $\frac{px}{1000}$ kg .

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА X КЛАС

---

1 зад. а/ Решете неравенството $|x^2-5x+2| \le 4$;

б/ Дадени са функциите $f(x)=(2k-1).x^2+(7k+2).x-3k$ и $g(x)=(k+3).x^2+5(k+1).x-4(k+1)$, където k е параметър. Определете k така, че за всяко x да бъде изпълнено $f(x)>g(x)$.

2 зад. Във вътрешността на остър ъгъл AOB е взета точка M. Петите на перпендикулярите, спуснати от точката M към раменете OA и OB на ъгъла, са съответно P и Q. Петата на перпендикуляра, спуснат от P към OB, е R, а тази на перпендикуляра, спуснат от Q към OA, е S. Да се докаже, че OM е перпендикулярна на RS.

3 зад. Да се докаже, че за произволно реално число a съществува триъгълник с дължина на страните $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$ и $\sqrt{4a^2+3}$.

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.
ТЕМА ЗА 11. клас
на гимназии и СОУ - профилирано обучение

---

1 зад. а/ Решете неравенството $|x^2-5x+2| \le 4$;

б/ Дадени са функциите $f(x)=(2k-1).x^2+(7k+2).x-3k$ и $g(x)=(k+3).x^2+5(k+1).x-4(k+1)$, където k е параметър. Определете k така, че за всяко x да бъде изпълнено $f(x)>g(x)$.

2 зад. Във вътрешността на остър ъгъл AOB е взета точка M. Петите на перпендикулярите, спуснати от точката M към раменете OA и OB на ъгъла, са съответно P и Q. Петата на перпендикуляра, спуснат от P към OB, е R, а тази на перпендикуляра, спуснат от Q към OA, е S. Да се докаже, че OM е перпендикулярна на RS. Да се намери дължината на RS, ако $OM=a$ и $\angle AOB=\alpha$.

3 зад. Да се реши уравнението

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\frac{13}{6}.$$

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.

ТЕМА ЗА XI КЛАС

на техникуми и СПТУ и на гимназии и СОУ-непрофилирано обучение, както и за 12. клас на гимназии и СОУ - профилирано обучение

---

1 зад. Числата x,y и z образуват аритметична прогресия.

а/ Да се докаже, че числата 2, $x^2 + 4.y^2 + z^2$, $x^4 + 16.y^4 + z^4$ образуват геометрична прогресия;

б/ Да се намерят числата, ако сумата им е 15 и сумата от квадратите им е 83.

2 зад. Четириъгълникът ABCD със страна AB= 25, диагонал BD= 24 е вписан в окръжност с център точка O и диаметър страната AB. Лицето на триъгълника BCD е равно на 108. Да се намерят дължините на страните AD,BC,CD и диагоналът AC . Да се докаже, че диагоналът AC е ъглополовяща на ъгъла BAD и че правата CO е перпендикулярна на BD.

3 зад. Да се намери най-малката стойност на израза

$$f(x)= (x-1)^2 +(x-2)^2 + \dots +(x-2001)^2$$

Регионален инспекторат по образованието на МОН - Враца
Олимпиада по математика - I кръг - 22.02.2003 г.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

на техникуми и СОУ-непрофилирано обучение

---

1 зад.

а/ Да се намери сумата $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x}-x} + \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}$.

б/ Намерете стойностите на параметрите a и в , ако

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+3x+b}{x+3b}-x\right)=-6 .$$

2 зад. Определете обема на правилна четириъгълна пирамида с околен ръб ℓ и двустенен ъгъл между две съседни околни стени α.

3 зад. Функцията f(x) за всяко x удовлетворява равенството $f(x+1)= f(x)+ 2x + 1$. Да се намери f(2001), ако $f(0)= 0$.

Кратки решения на задачите за 4. клас:

1 зад.)

а) $100-96:(56-52)+(160+17.5):7-3.8+66=100-96:4+(160+85):7-24+66=$

$=100-24+245:7-24+66=76+35-24+66=111-24+66=87+66=\underline{153}$

За всяко вярно извършено действие - по 0,5 точки. Общо за 1а) зад. 5 точки

б) 102345 - най-малкото шестцифрено число, записано с различни цифри (2 точки)

99999 - най-голямото петцифрено число (1 точка)

$102345-99999=\underline{2346}$ (1 точка). Общо за 1б) зад. 4 точки

2 зад.) Лесно се съобразява, че търсеното число е трицифрено и да го означим с $\overline{abc}$. Възможни са следните случаи:

I) $\overline{abc}+\overline{bc}=176$. Единствената възможност за a е 1, т.е. $a=1$. Тогава $(10.b+c)+(10.b+c)=76$ или $10.b+c=38$, откъдето $b=3, c=8$, т.е. $\overline{abc}=\underline{138}$ (1 точка)

II) $\overline{abc}+\overline{ac}=176 \Rightarrow (100a+10b+c)+(10a+c)=110a+10b+2c=176$, откъдето $55a+5b+c=88$. Тогава $a=1$ е единствената възможност и $5b+c=33$, откъдето $b=5, c=8$ или $b=6, c=3$, т.е. $\overline{abc}=\underline{158}$ (1 точка) или $\overline{abc}=\underline{163}$ (1 точка)

III) $\overline{abc}+\overline{ab}=176 \Rightarrow 110a+11b+c=176$. Тогава $a=1$ и $11b+c=66$, откъдето $b=6, c=0 \Rightarrow \overline{abc}=\underline{160}$ (1 точка). Общо за 2 зад. 4 точки

3 зад.) Дължината на градината е $430+8=438$ м (1 точка)

Широчината на градината е $200+8=208$ м (1 точка)

$\Rightarrow$ Обиколката на градината е $2(208+438)=1292$ м (1 точка)

Един ред бодлива тел е с дължина $1292-2.6=1280$ м (1 точка)

Телта има дължина $6.1280=7680$ м (1 точка)

Телта тежи $(7680:10).2=\underline{1536}$ кг (2 точки)

Общо за 3 зад. 7 точки

Зад. 1а) - сп. „Математика", бр. 1, 2001 г., стр. 12

Зад. 1б) - сп. „Математика", бр. 4, 2002 г., стр. 40

Зад. 2) - сп. „Математика", бр. 6, 2001 г., стр. 49

Зад. 3) - сп. „Математика плюс", бр. 3-4, 2002 г., стр. 8

Кратки решения на задачите за 5. клас:

1зад.)

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(1\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{11}{6}-\frac{3}{6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{3}\cdot\frac{2}{\cancel{6}_3}=\frac{\overset{3}{1}}{3}+\frac{\overset{1}{8}}{9}=\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$

За всяко вярно извършено действие и за верен отговор по 0,5 точки или общо 2 точки

$\frac{2}{5}<x_i<\frac{3}{5}\ (i=1,2,3,4) \Leftrightarrow \frac{10}{25}<x_i<\frac{15}{25}\ (i=1,2,3,4) \Rightarrow x_1=\frac{11}{25}, x_2=\frac{12}{25}, x_3=\frac{13}{25}, x_4=\frac{14}{25}$

За всяко от числата по 0,5 точки или общо 2 точки. Общо за зад.1а) 4 точки

б) простите делители на 6 са 2 и 3 и следователно търсеният сбор е от вида $\frac{29}{6}=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$, където a и b са решенията на диофантовото уравнение $3a+2b=29$ (2 точки). Те са $a=1$ и $b=13$, $a=3$ и $b=10$, $a=5$ и $b=7$, $a=7$ и $b=4$, $a=9$ и $b=1$ (1 точка)

Тъй като a и b са прости числа, остават само решенията $a=1$ и $b=13$, или $a=5$ и $b=7$. Следователно $\frac{29}{6}=\frac{5}{2}+\frac{7}{3}=\frac{1}{2}+\frac{13}{3}$ (1 точка). Общо за зад.1б) 4 точки

2зад.) За страните на триъгълника имаме четири възможности:

$P_{\square}=2(26+14)=80\text{ см} \Rightarrow P_{\triangle}=80\text{ см}$ (1 точка)

I) основата му е с дължина 14 см. Тогава бедрото на триъгълника е $(80-14):2=33$ см $\Rightarrow AB=14$ см, $BC=AC=33$ см (1 точка)

II) основата му е с дължина 26 см. Тогава бедрото е $(80-26):2=27$ см $\Rightarrow AB=26$ см, $BC=AC=27$ см (1 точка)

III) бедрото му е с дължина 14 см. Тогава за основата на триъгълника получаваме $80-2.14=52$ см (1 точка), но такъв триъгълник не съществува (1 точка)

IV) бедрото му е с дължина 26 см. Тогава за основата получаваме $80-2.26=28$ см $\Rightarrow AB=28$ см, $BC=AC=26$ см (1 точка)

Общо за 2зад. 6 точки

3зад.) $11/A \Rightarrow 11/4A \Rightarrow 11/(8a+20b)$ (1 точка)

Очевидно $11/11a$ (1 точка) и $11/22b$ (1 точка)

Следователно $11/(11a+22b-4.A)$ (2 точки) $\Leftrightarrow 11/(11a+22b-(8a+20b)) \Leftrightarrow 11/(11a+22b-8a-20b)$

Следователно $11/(a(11-8)+b(22-20))$, т.е. $11/(3a+2b)$ или $11/B$ (1 точка)

Общо за 3.зад. 6 точки

Зад.1а) – тест по математика – V клас – СУ „Кл. Охридски"
Зад.1б) – сп. „Математика", бр. 2, 2001г., стр. 39
Зад.2) – сп. „Математика", бр. 1, 2002г., стр. 47
Зад.3) – сп. „Математика", бр. 6, 2002г., стр. 35

Кратки решения на задачите за 6. клас:

1 зад.) $|c| = |-7| = 7$ (0,5 точки)

а) $|b + |c|| = |-6+7| = |1| = 1$ (0,5 точки)

$|a - |b+|c|| + c| = |-5-1-7| = |-13| = 13$ (0,5 точки)

$|b - |c|| = |-6-7| = |-13| = 13$ (0,5 точки)

$|a + |b-|c|| - c| = |-5+13-(-7)| = |-5+13+7| = |15| = 15$ (0,5 точки)

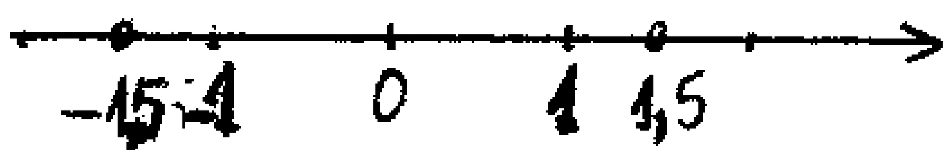
$|a-|b+|c||+c| + |a+|b-|c||-c| = 13+15 = \underline{\underline{28}}$ (0,5 точки) Общо за 1а) зад. 3 точки

б) $n = 0,(6) - \frac{2}{3} : \left(-\frac{7}{15} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{7}{15} - \frac{5}{15}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} : \left(\frac{-12}{15}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{12} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$

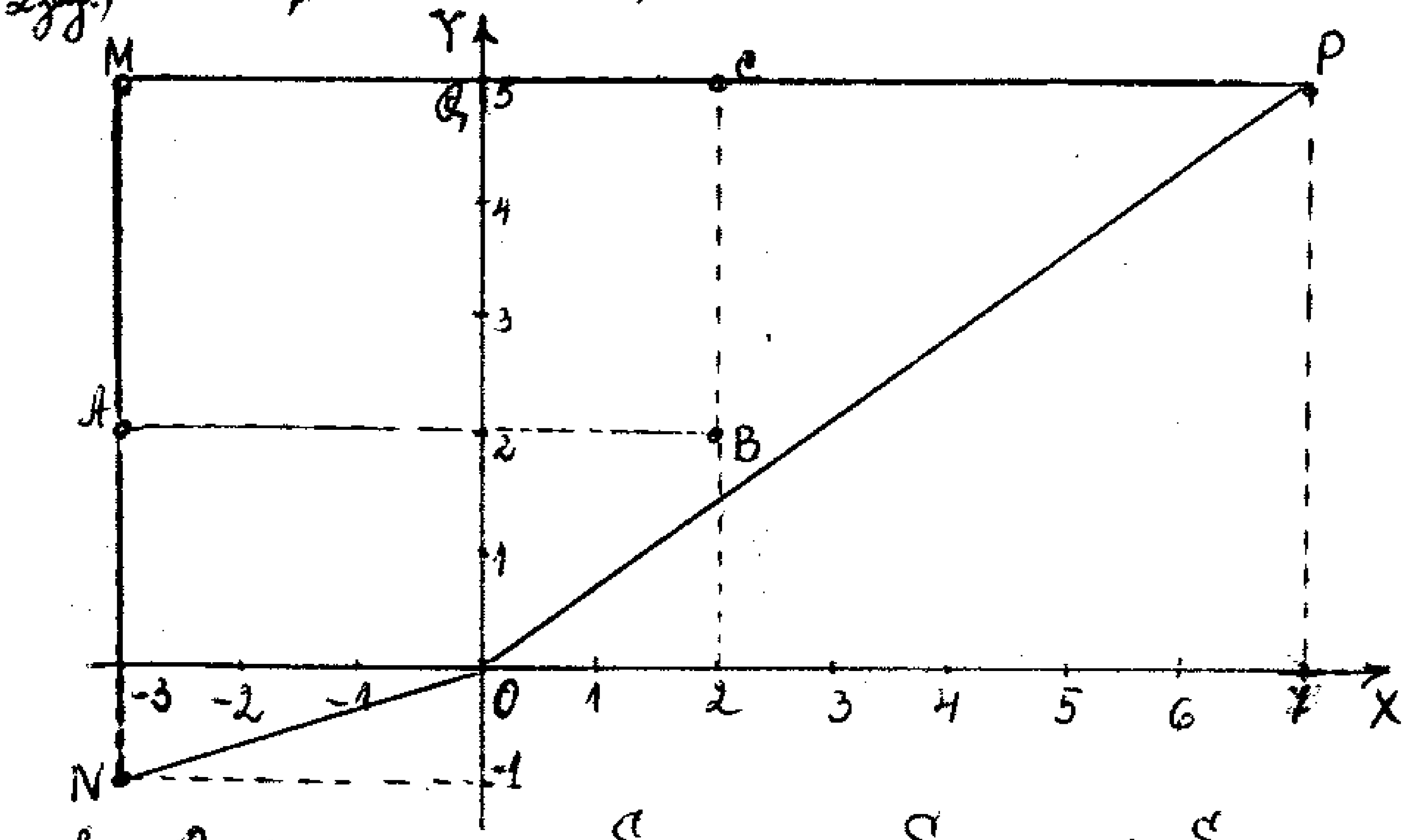
(0,5 точки) (0,5 точки) (0,5 точки) (0,5 точки)

$|x| < 1,5 \Rightarrow \underline{\underline{x = -1, 0 \text{ или } 1}}$ (по 0,5 точки за всеки верен отговор)

Общо за 1б) зад. 3,5 точки



2 зад.)



За изобразяването на т. A, B и C – по 0,5 точки за всяка вярно изобразена в координатната система xOy точка или общо 1,5 точки. Като се използва определението за успоредник, от чертежа се вижда, че търсените точки са следните: M(-3,5), N(-3,-1) и P(7,5) – по 1 точка за всяка намерена точка или общо 3 точки

Ако $Q = Oy \cap MP$, то $S_{OPMN} = S_{MNOQ} + S_{\Delta OPQ} = \frac{33}{2} + \frac{35}{2} = \underline{\underline{34\ cm^2}}$ (1 точка), тъй като

$MNOQ$ – трапец $\Rightarrow S_{MNOQ} = \frac{(MN+QO)}{2} \cdot MQ = \frac{(6+5)}{2} \cdot 3 = \frac{33}{2}\ cm^2$ (1 точка) и

ΔOPQ – правоъгълен $\Rightarrow S_{\Delta OPQ} = \frac{QO \cdot QP}{2} = \frac{5 \cdot 7}{2} = \frac{35}{2}\ cm^2$ (1 точка) Общо за 2. зад. 7,5 точки

3 зад.)

	виолончело	пиано	китара	цигулка	англ. ез.	фр. ез.	немски ез.	исп. ез.
Маша	не	не	да	не	не	не	не	да
Лида	не	да	не	не	не	не	да	не
Женя	да	не	не	не	не	да	не	не
Катя	не	не	не	да	да	не	не	не

Данните от условието на задачата нанасяме в приложената таблица.

Първият извод е, че Катя знае английски език и свири на цигулка (1,5 точки). Вторият извод е, че Женя, която знае френски език, свири на виолончело (1,5 точки). Третият извод е, че Маша знае испански език и Лида знае немски език (1,5 точки). Последният извод е, че Лида свири на пиано и следователно Маша свири на китара (1,5 точки). Общо за 3. зад. 6 точки

Зад. 1а) – сп. „Математика“, бр. 6, 2002 г., стр. 36
Зад. 1б) – Математика за 6. клас, Т. Аргирова и др., стр. 54
Зад. 2) – сп. „Математика“, бр. 2, 2001 г., стр. 13
Зад. 3) – Сборник по математика за 4. клас, В. Величков и Я. Райков, стр. 53

Кратки решения на задачите за 7. клас:

1зад.) а) $M=(x^n-1)^2-(x^n+1)^3+x^n(x^{2n}+5)+(x^n-1)(x^n+1)=$

$=\underbrace{(x^{2n}-2x^n+1)}_{(0{,}5\text{ точки})}-\underbrace{(x^{3n}+3x^{2n}+3x^n+1)}_{(0{,}5\text{ точки})}+\underbrace{(x^{3n}+5x^n)}_{(0{,}5\text{ точки})}+\underbrace{(x^{2n}-1)}_{(0{,}5\text{ точки})}=$

$=x^{2n}-2x^n+\cancel{1}-\cancel{x^{3n}}-3x^{2n}-3x^n-\cancel{1}+\cancel{x^{3n}}+5x^n+x^{2n}-1=\underline{\underline{-x^{2n}-1}}$ (1 точка) Общо за 1а) зад. 3 точки

б) $x=\frac{|a|}{a}=\frac{-a}{a}=-1$, защото $a<0$ (0,5 точки) и $n=\frac{|b|}{b}=\frac{b}{b}=1$, защото $b>0$ (0,5 точки)

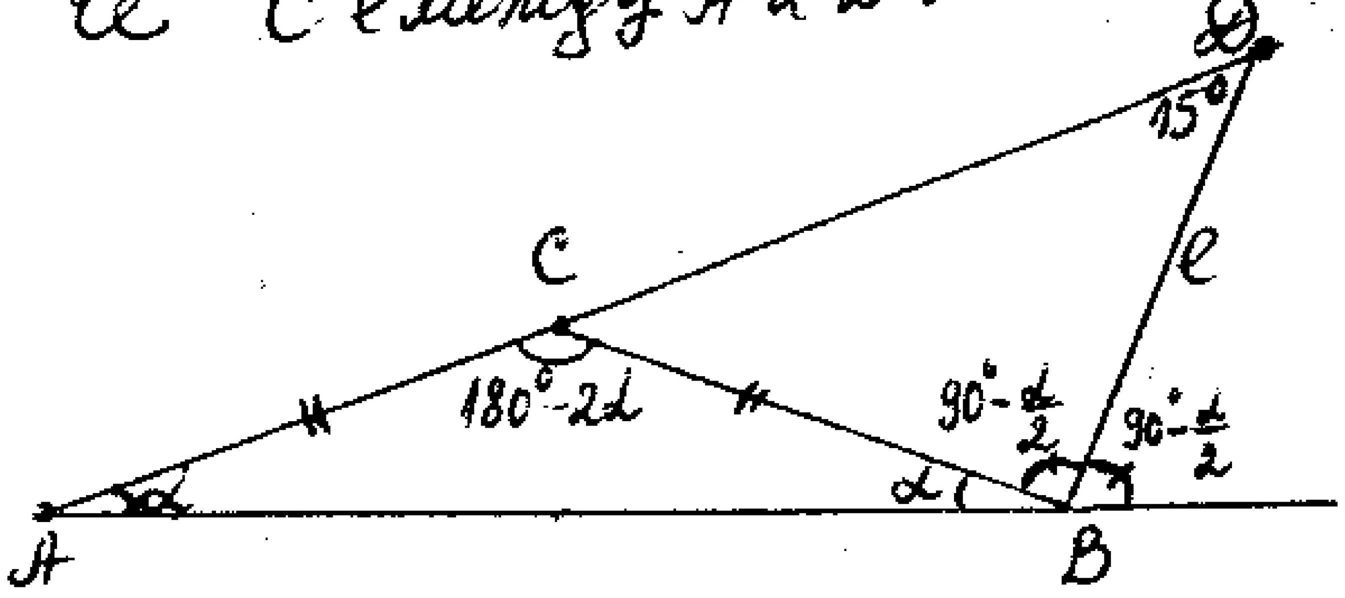
$\Rightarrow M=-(-1)^{2.1}-1=-(-1)^2-1=-1-1=\underline{\underline{-2}}$ (1 точка)

Общо за 1б) зад. **2 точки**

2зад.) Равнобедреният $\triangle ABC$ може да бъде с $AC=BC$, $AB=BC$ и $AB=AC$

I сл.) Нека $AC=BC$

а) Ъглополовящата ℓ на външния ъгъл при връх B пресича правата AC в точка D такава, че C е между A и D. Означаваме $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=\alpha$ (0,5 точки). Тогава $\sphericalangle ACB=180^\circ-2\alpha$ (0,5 точки) и



$\sphericalangle CBD=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ (1 точка)

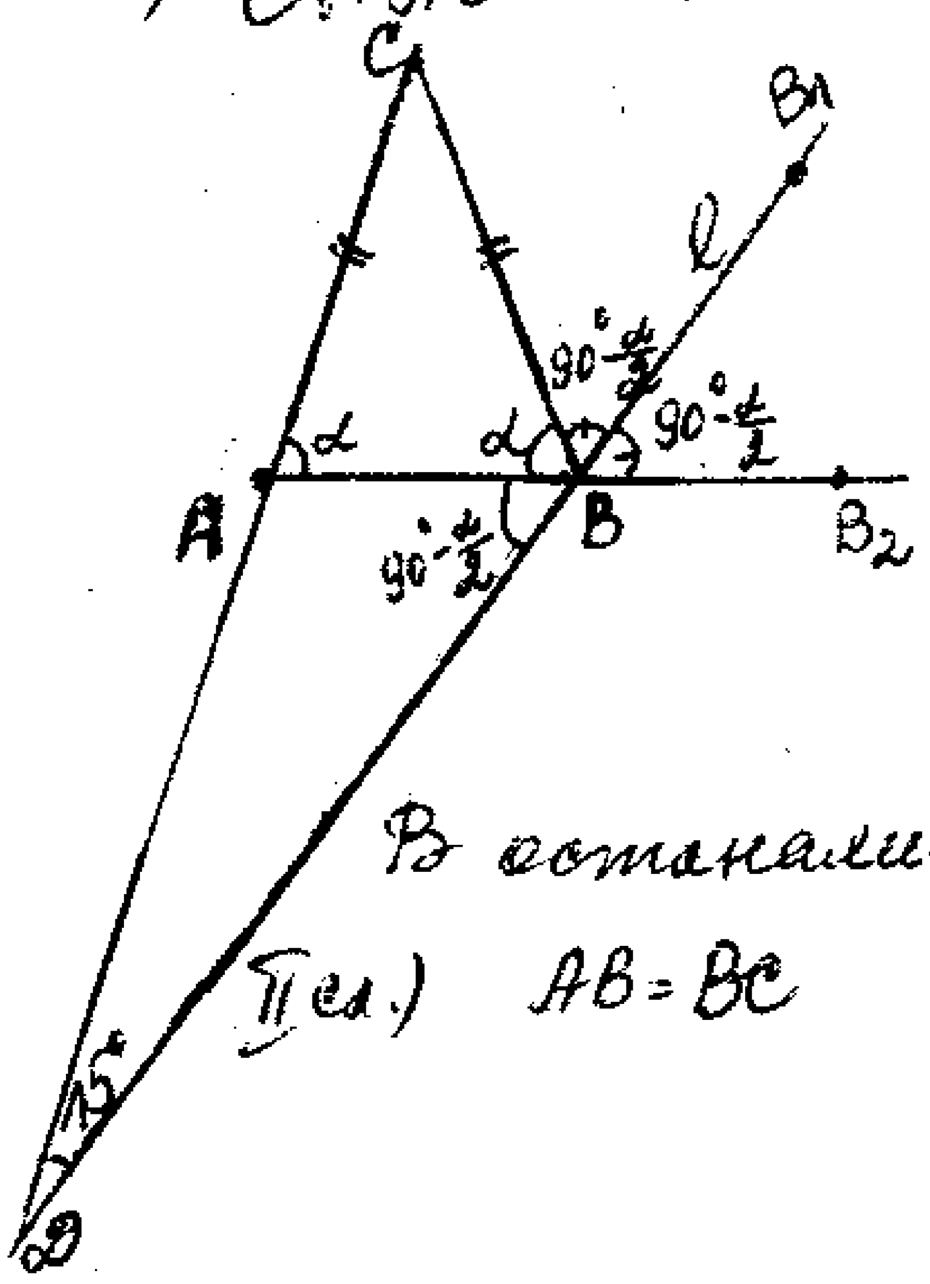
$\sphericalangle ACB=\sphericalangle CDB+\sphericalangle CBD$ (външен ъгъл за $\triangle CBD$)(0,5 точки)

$\Updownarrow$

$180^\circ-2\alpha=15^\circ+90^\circ-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=50^\circ$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=50^\circ \text{ и } \sphericalangle ACB=80^\circ}}$ (0,5 точки)

б) $\ell\cap AC=D$ такава, че A е между D и C. $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=\alpha$ (0,5 точки)



$\sphericalangle CBB_1=\sphericalangle B_1BB_2=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ (1 точка)

$\sphericalangle ABD=\sphericalangle B_1BB_2=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ (връхни $\sphericalangle$) (0,5 точки)

$\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABD+\sphericalangle ADB$ (външен ъгъл за $\triangle ABD$)(0,5 точки)

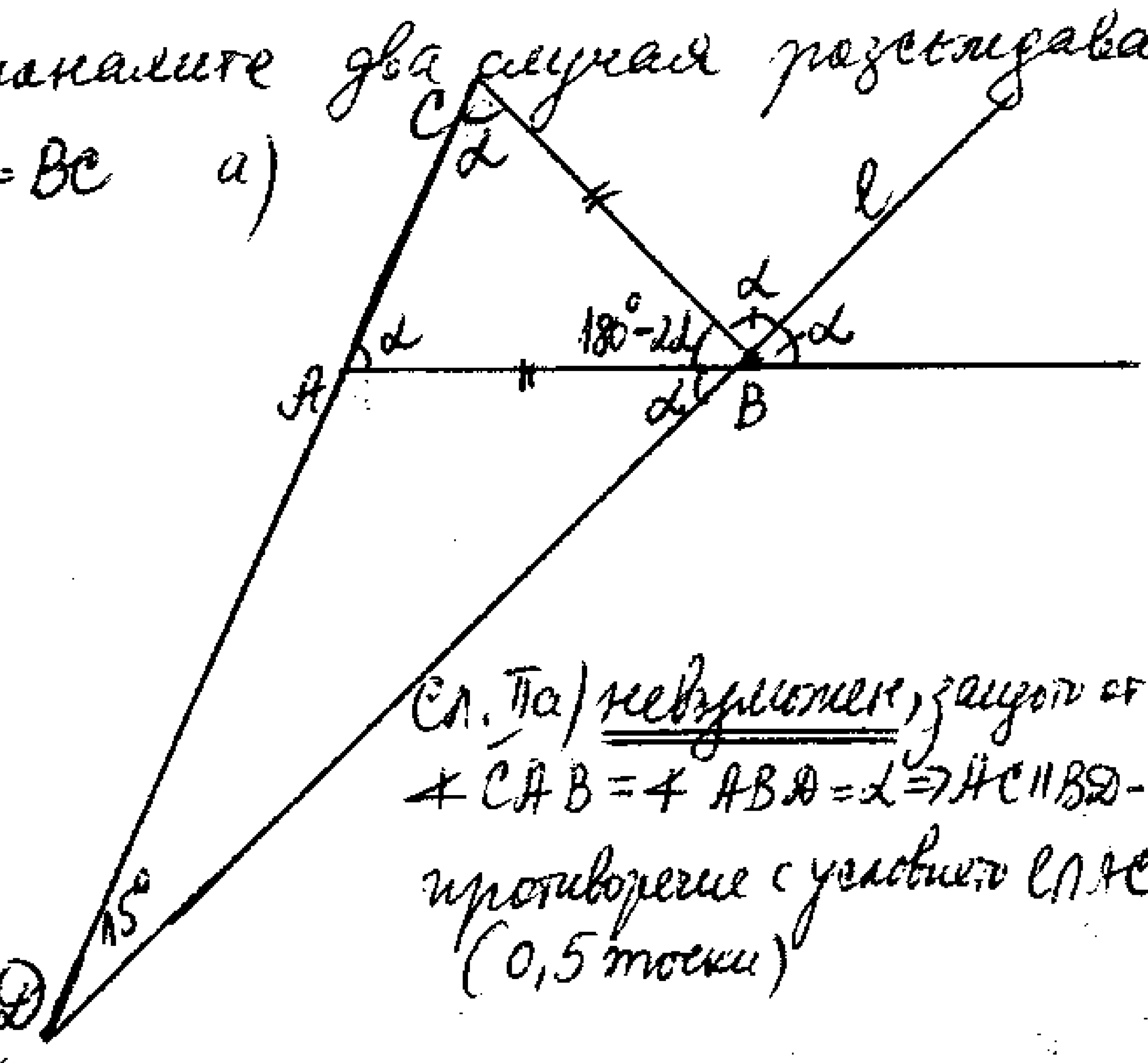
$\Updownarrow$

$\alpha=90^\circ-\frac{\alpha}{2}+15^\circ\Rightarrow\alpha=70^\circ$

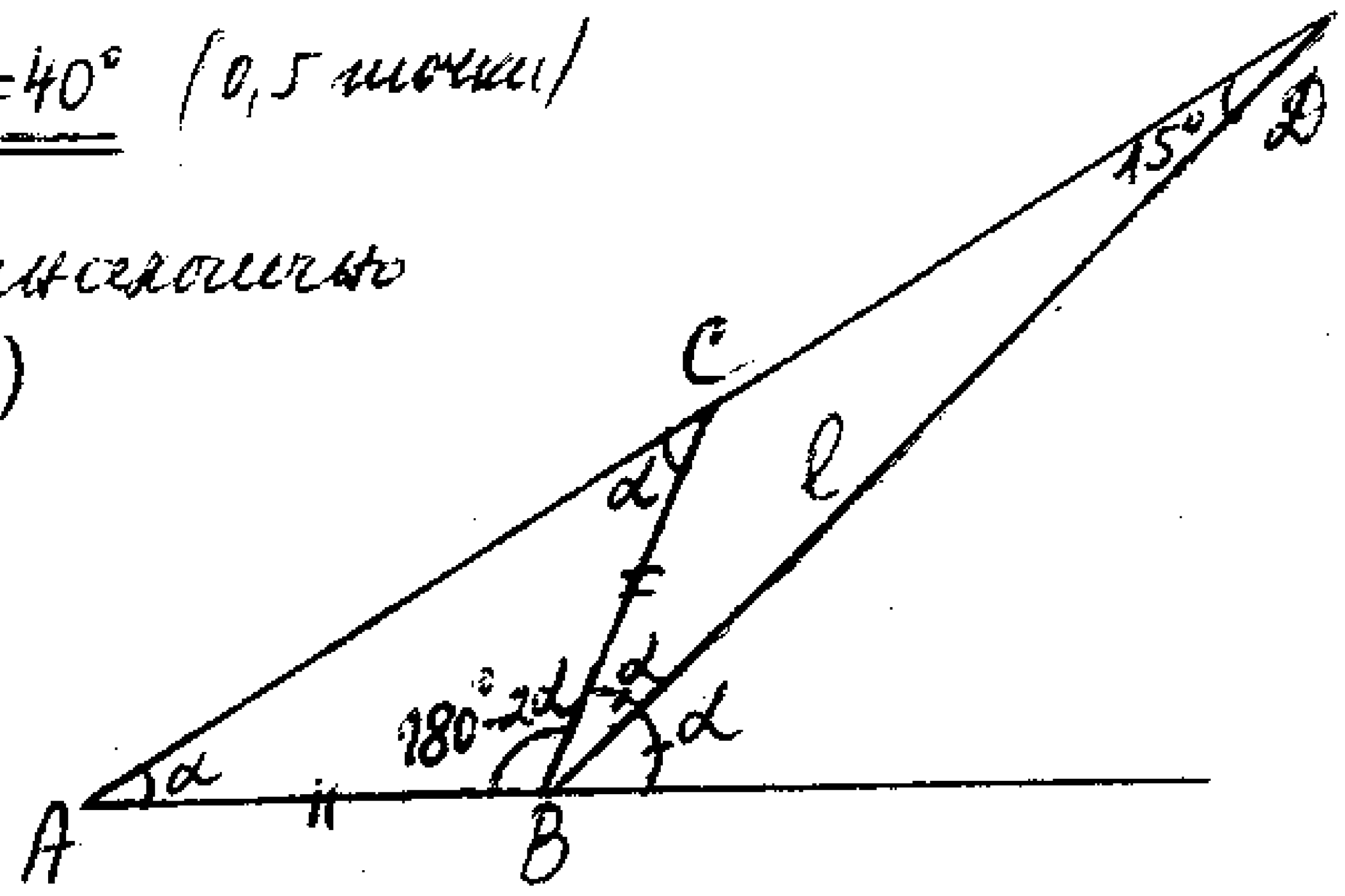
$\Rightarrow \underline{\underline{\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=70^\circ \text{ и } \sphericalangle ACB=40^\circ}}$ (0,5 точки)

В останалите два случая разсъждаваме аналогично

II сл.) $AB=BC$ а)



б)

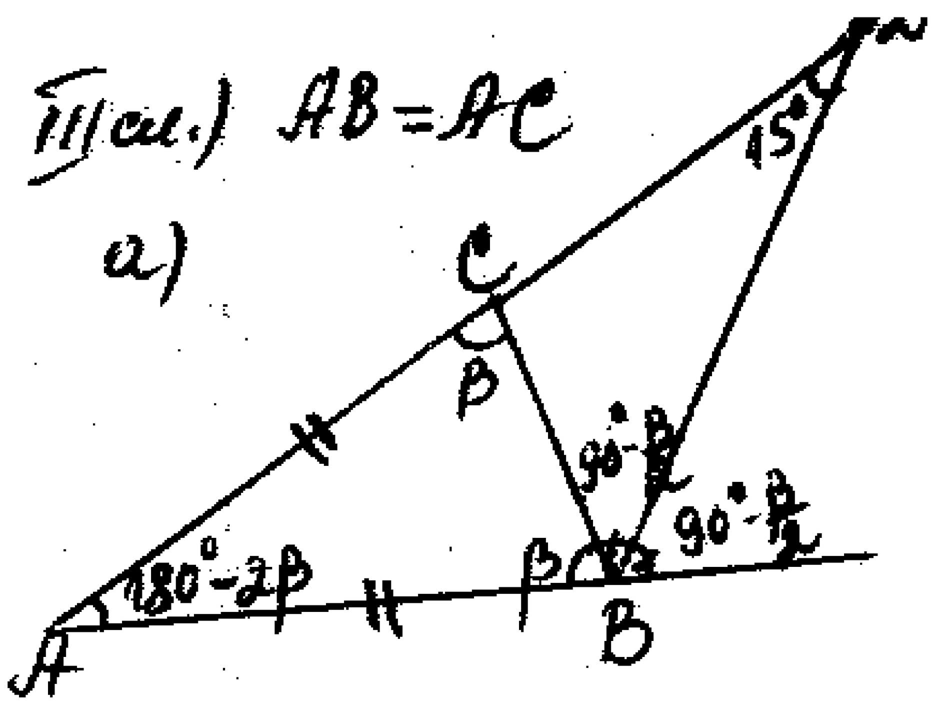


Сл. IIа) невъзможен, защото от $\sphericalangle CAB=\sphericalangle ABD=\alpha\Rightarrow AC\parallel BD$ – противоречие с условието $\ell\cap AC$ (0,5 точки)

Сл. II б) невъзможен, защото от $\sphericalangle ACB=\sphericalangle CBD=\alpha\Rightarrow AC\parallel BD$ – противоречие с условието $\ell\cap AC$ (0,5 точки)

III сл.) $AB = AC$

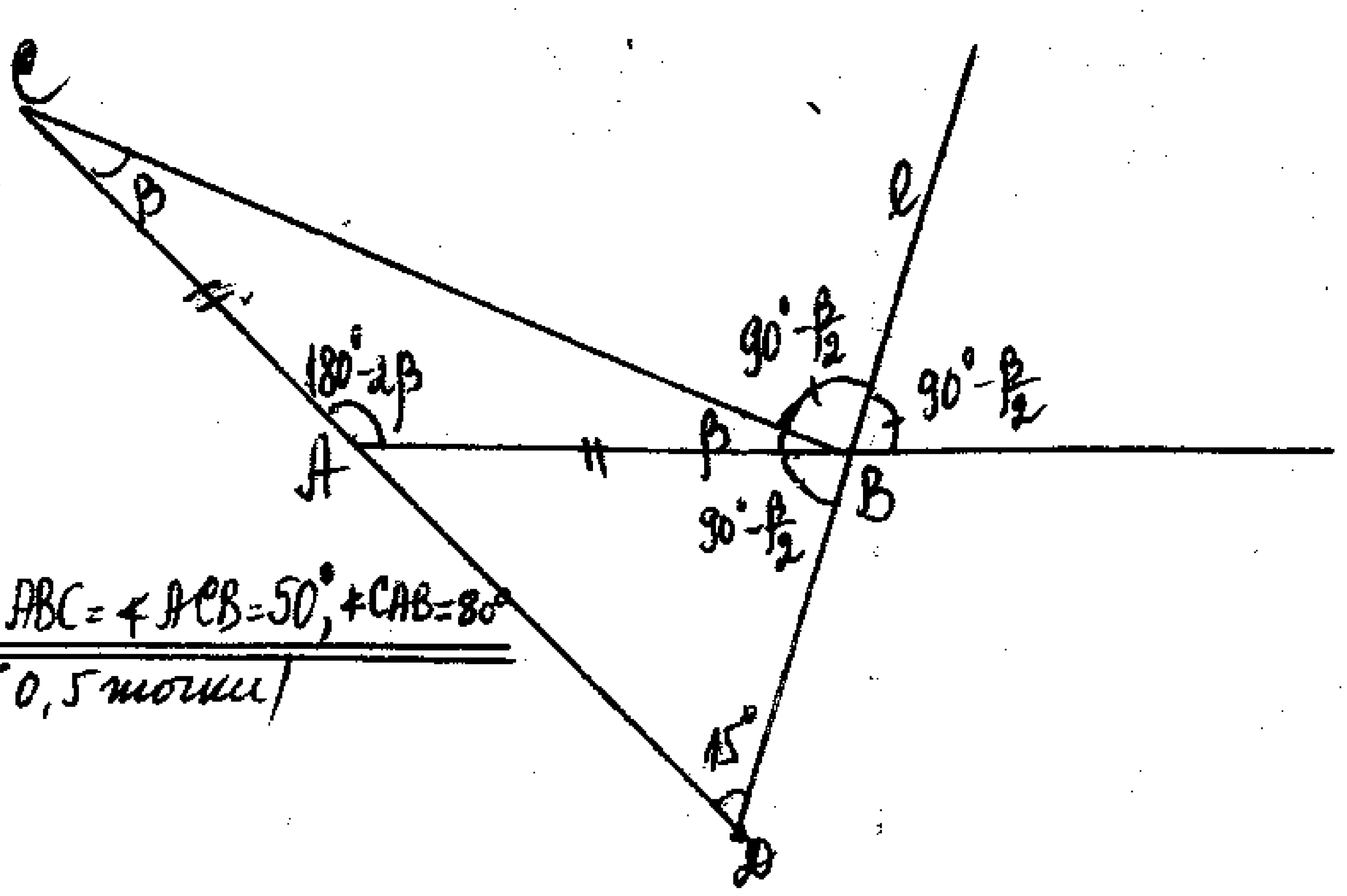
а)



$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 70°$, $\sphericalangle CAB = 40°$

(0,5 точки)

б)



$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 50°$, $\sphericalangle CAB = 80°$

(0,5 точки)

Общо за 2 зад. **8 точки**

3 зад.) Означаване с x лв покупката ($x > 0$)

Означаване с a лв парите, дадени от I брат ($a > 0$)

Съгласно условието $a = 25\%.(x-a) = \frac{1}{4}(x-a) \Rightarrow a = \frac{x}{5}$ (2 точки)

Означаване с b лв парите, дадени от II брат ($b > 0$)

Съгласно условието $b = 33\frac{1}{3}\%.(x-b) = \frac{100}{300}.(x-b) \Rightarrow b = \frac{x}{4}$ (2 точки)

Означаване с c лв парите, дадени от бащата

Съгласно условието $c = 50\%(x-c) = \frac{1}{2}(x-c) \Rightarrow c = \frac{x}{3}$ (2 точки)

От $a + b + c + 5{,}2 = x \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 5{,}2 = x$

$\Rightarrow 12x + 15x + 20x + 312 = 60x \Rightarrow 13x = 312 \Rightarrow x = 24$ (лв струва компактдиска) (1 точка)

Общо за 3 зад. **7 точки**

Зад. 1а) Математика за 7. клас, Здравка и Георги Паскалеви, стр. 43

Зад. 1б) сп. „Математика плюс", 2 бр., 2002 г., стр. 12

Зад. 2) сп. „Математика", бр. 1, 2002 г., стр. 48

Зад. 3) сп. „Математика", бр. 2, 2002 г., стр. 45

Кратки решения на задачите за 8 клас:

1 зад.) а) $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=A$

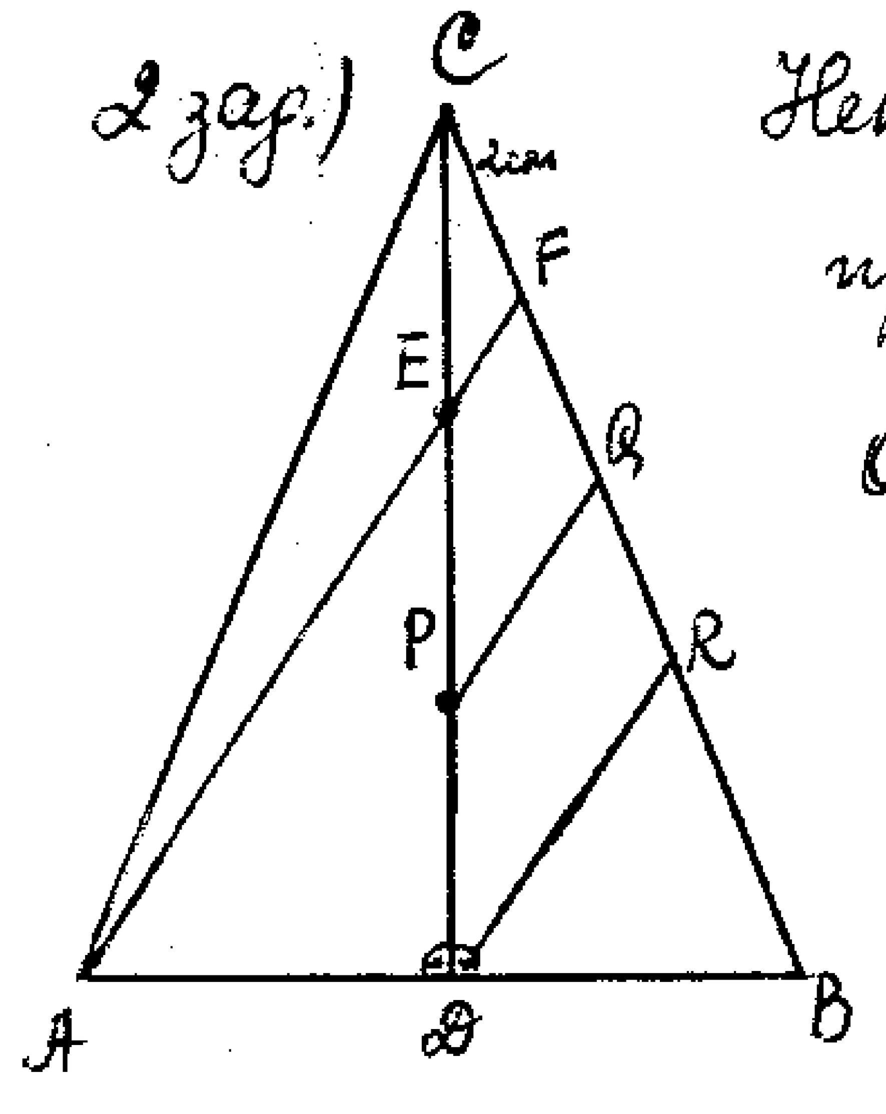
Общо за зад. 1(а) 2 точки

б) Тъй като $N=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=\frac{-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}\neq 0$, (1 точка) (1 точка) (1 точка)

следователно ако $A=0$, от $A=N.B$ (доказано в а)) и $N\neq 0 \Rightarrow B=0$ (1 точка)

Общо за зад. 1б) 4 точки

2 зад.)



Нека точката P е такава, че $DP=PE$ и през точките P и D прекарваме отсечките PQ и DR успоредни на AF ($Q\in BC$, $R\in BC$) (1 точка)

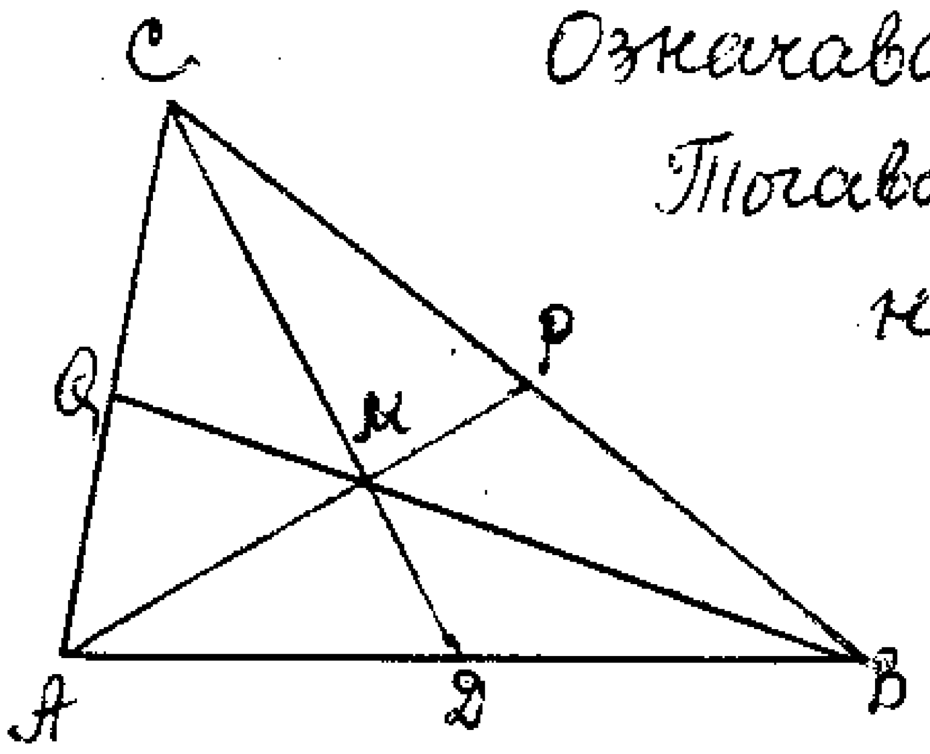
Отсечката EF е средна отсечка в $\triangle PQC$ и $CF=FQ=2$ см (1 точка)

Отсечката PQ е средна основа в трапеца $DRFE$ и $QR=FQ=2$ см (1 точка)

Тъй като триъгълникът ABC е равнобедрен, то $AD=DB$ (1 точка). Оттук следва, че DR е също средна отсечка в триъгълника AFB и $BR=RF=4$ см (1 точка). Следователно $BC=10$ см. (1 точка)

Общо за 2 зад. 6 точки

3 зад.) Нека $AP=m_a$, $BQ=m_b$, $CD=m_c$ са медианите на $\triangle ABC$. За да може от тези отсечки да се построи триъгълник, необходимо и достатъчно условие е $m_a+m_b>m_c$, $m_a+m_c>m_b$ и $m_b+m_c>m_a$ (1 точка)



Означаваме с M пресечната точка на медианите. Тогава за триъгълниците AMD и DBM са в сила неравенствата $AM-MD<AD$ (1 точка) и $BM+MD>BD$ (1 точка), т.е. $\frac{2}{3}m_a-\frac{1}{3}m_c<AD$ (1 точка) и $BD<\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_c$ (1 точка). Като съберем почленно последните две неравенства, получаваме $\frac{2}{3}m_a-\frac{1}{3}m_c+DB<AD+\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_c$ (1 точка) $\Leftrightarrow \frac{2}{3}m_a<\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c$ (0,5 точки), т.е. $m_a<m_b+m_c$ (0,5 точки).

По аналогичен начин се доказват и другите две неравенства (1 точка)

Общо за 3 зад. 8 точки

1 зад.) - См. „Математика", бр. 3, 2002 г., стр. 26

2 зад.) - См. „Математика", бр. 1, 2002 г., стр. 51

3 зад.) - см. „Математика", бр. 3, 2002 г., стр. 50

Кратки решения на задачите за 9. клас:

1 зад.) а) Уравнението има смисъл при $\underset{(1\,точка)}{x \neq \pm 1}$ и е еквивалентно на $f(x)=0 \Leftrightarrow \underset{(1\,точка)}{(x+1)(x^2-5x+1)=0} \Leftrightarrow x^2-5x+1=0 \Rightarrow x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ и $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$

(по 0,5 точки за всеки корен – общо 1 точка) Общо за зад. 1а) 3 точки

б) След тъждествено преобразуване получаваме:

$$\left(ax+bx-a^2-b^2\right)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right)=0 \Leftrightarrow (a+b)x-a^2-b^2=0 \text{ или } \frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}=0$$

(1 точка)

При $ab=0$ уравнението няма смисъл. ДМ: $x \neq a,\ x \neq b$ (1 точка)

Следователно $a \neq 0$ и $b \neq 0$ при $ab \neq 0$

Уравнението $(a+b)x=a^2+b^2$ при $a+b=0$ няма решение, а при $a+b \neq 0$ има решение $x_1=\frac{a^2+b^2}{a+b}$. За да е изпълнено $x_1 \in ДМ$ трябва $\frac{a^2+b^2}{a+b} \neq a$ и $\frac{a^2+b^2}{a+b} \neq b$, което е възможно при $a \neq b$, т.е. при $a-b \neq 0$

Следователно уравнението $(a+b)x=a^2+b^2$ при $a+b=0$ и $a-b=0$, т.е. $a^2-b^2=0$

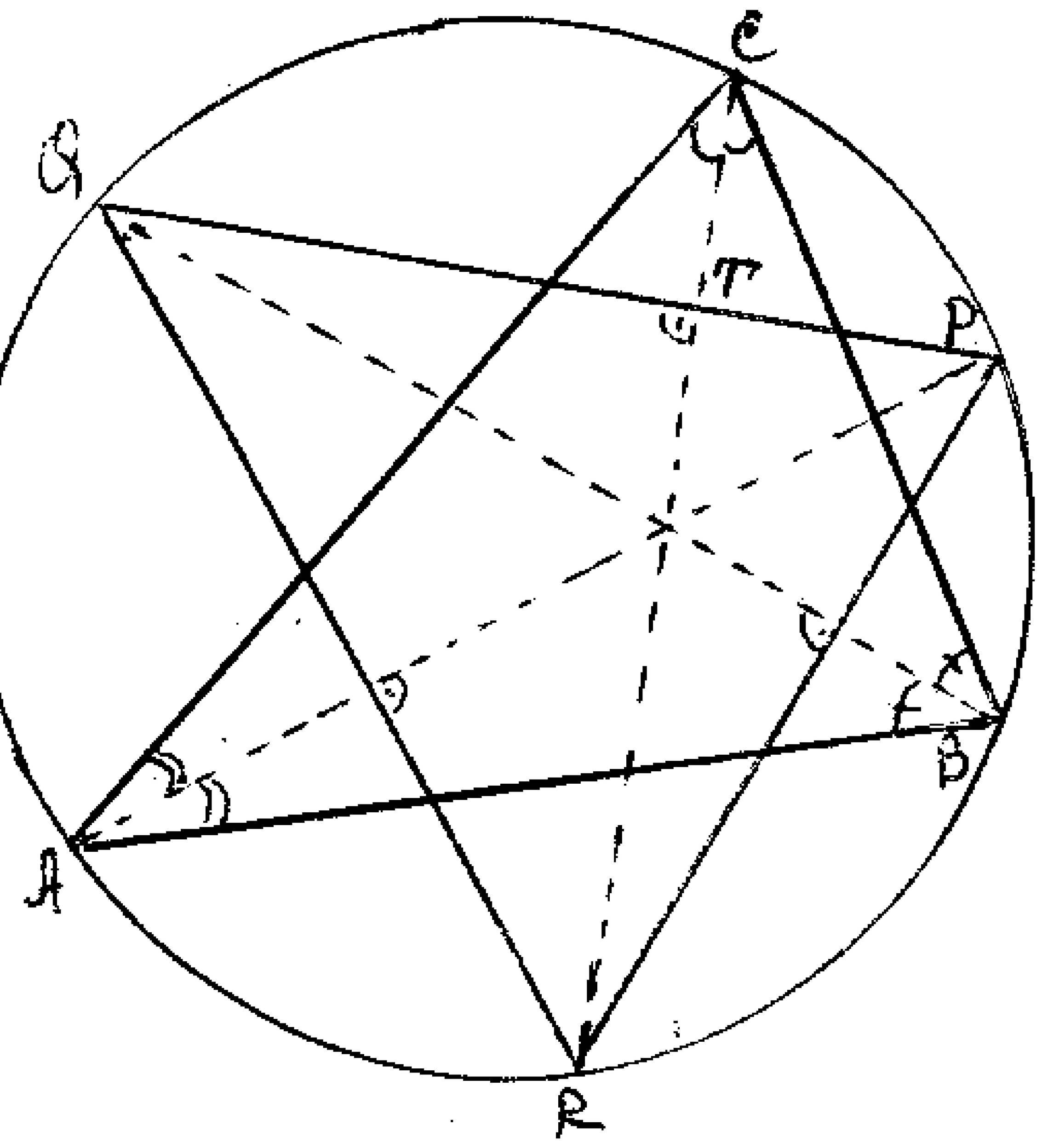
(1 точка) няма решение, а при $a^2-b^2 \neq 0$ има решение $x_1=\frac{a^2+b^2}{a+b} \in ДМ$

(1 точка) Уравнението $\frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}=0 \xLeftrightarrow[\text{в ДМ: } x \neq a,b]{\text{при } ab \neq 0} x^2-x(a+b)=0 \Leftrightarrow x_2=0 \in ДМ,\ x_3=a+b \in ДМ$

(1 точка) Следователно: при $ab \neq 0$, $a^2-b^2=0$ уравнението има решения $x_2=0$, $x_3=a+b$; при $ab \neq 0$ и $a^2-b^2 \neq 0$ уравнението има решения $x_1=\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $x_2=0$, $x_3=a+b$

Общо за зад. 1б) 5 точки

2 зад.)



Нека $(PQ, CR)=T$. Тогава получаваме

$$\sphericalangle CTQ=\frac{1}{2}\left(\underset{(1\,точка)}{\overset{\frown}{CQ}+\overset{\frown}{RP}}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CQ}+\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{BR}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}+\underset{(1\,точка)}{\frac{\overset{\frown}{CB}}{2}}+\frac{\overset{\frown}{BA}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BA}\right)=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ \Rightarrow CR \perp PQ$$ (1 точка)

Аналогично се доказва, че $AP \perp QR$ и $BQ \perp RP$ (1 точка)

Следователно ъглополовящите на $\triangle ABC$ са височини на $\triangle PQR$. (1 точка) Следователно, за да намерим върховете на $\triangle ABC$, построяваме височините на $\triangle PQR$ и там, където пресекат окръжността k, са точките A, B, C. (1 точка) Общо за 2. зад. 6 точки

3 зад.) x кг – I сплав, y кг – II сплав $(x, y>0)$, p_1 – проба на златото в I сплав, p_2 – проба във II сплав

$\Rightarrow \frac{p_1 \cdot x}{1000}=7{,}5 \Rightarrow \underset{(1\,точка)}{p_1=\frac{7500}{x}}$; $\frac{p_2 \cdot y}{1000}=30 \Rightarrow \underset{(1\,точка)}{p_2=\frac{30000}{y}}$. Съгласно условието на задачата

(От $x, y>0 \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0$)

(1 точка) $\left|\begin{array}{l}\frac{30000}{y}-\frac{7500}{x}=200 \\ \frac{750(x+y)}{1000}=7{,}5+30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=50-y \Rightarrow 50>y>0 \\ 300x-75y=2xy \Rightarrow 2y^2-475y+15000=0\end{array}\right.$

(1 точка) $\left\{\begin{array}{l}y_1=37{,}5 \in (0,50) \\ y_2=200 \notin (0,50)\end{array}\right.$

$\Downarrow$

$x_1=50-37{,}5=12{,}5$

(За определяне на допуст. стойн. на x и y – 1 точка)

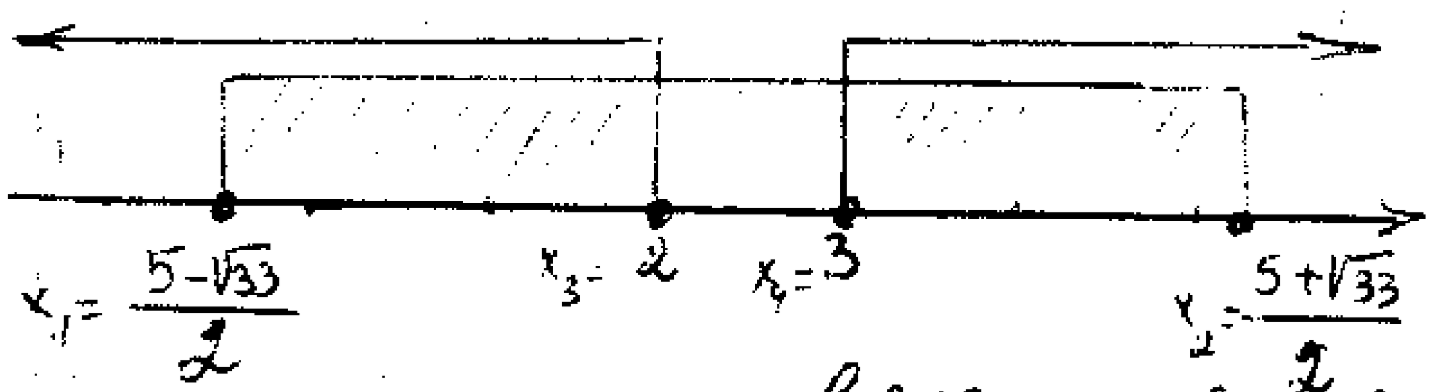
(1 точка) Следователно I сплав е 12,5 кг, а II сплав е 37,5 кг. Общо за 3 зад. 6 точки

Кратки решения на задачите за 10. клас:

1 зад. а) $|x^2-5x+2| \leq 4 \iff \left|\begin{array}{l} x^2-5x+2 \leq 4 \\ x^2-5x+2 \geq -4 \end{array}\right.$ (1 точка) $\iff \left|\begin{array}{l} x^2-5x-2 \leq 0 \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{array}\right.$ $\Updownarrow$ $\left|\begin{array}{l} (x-x_1)(x-x_2) \leq 0 \\ (x-x_3)(x-x_4) \geq 0 \end{array}\right.$

$x_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

$x_3 = 2$, $x_4 = 3$



$\Rightarrow x \in \left[\frac{5-\sqrt{33}}{2}; 2\right] \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$

(По 1 точка за решенията на всяко неравенство и 1 точка за крайния отговор) Общо за зад. 1а) 4 точки

б) $f(x) > g(x) \iff (2k-1)x^2+(7k+2)x-3k > (k+3)x^2+5(k+1)x-4(k+1)$ за $\forall x$

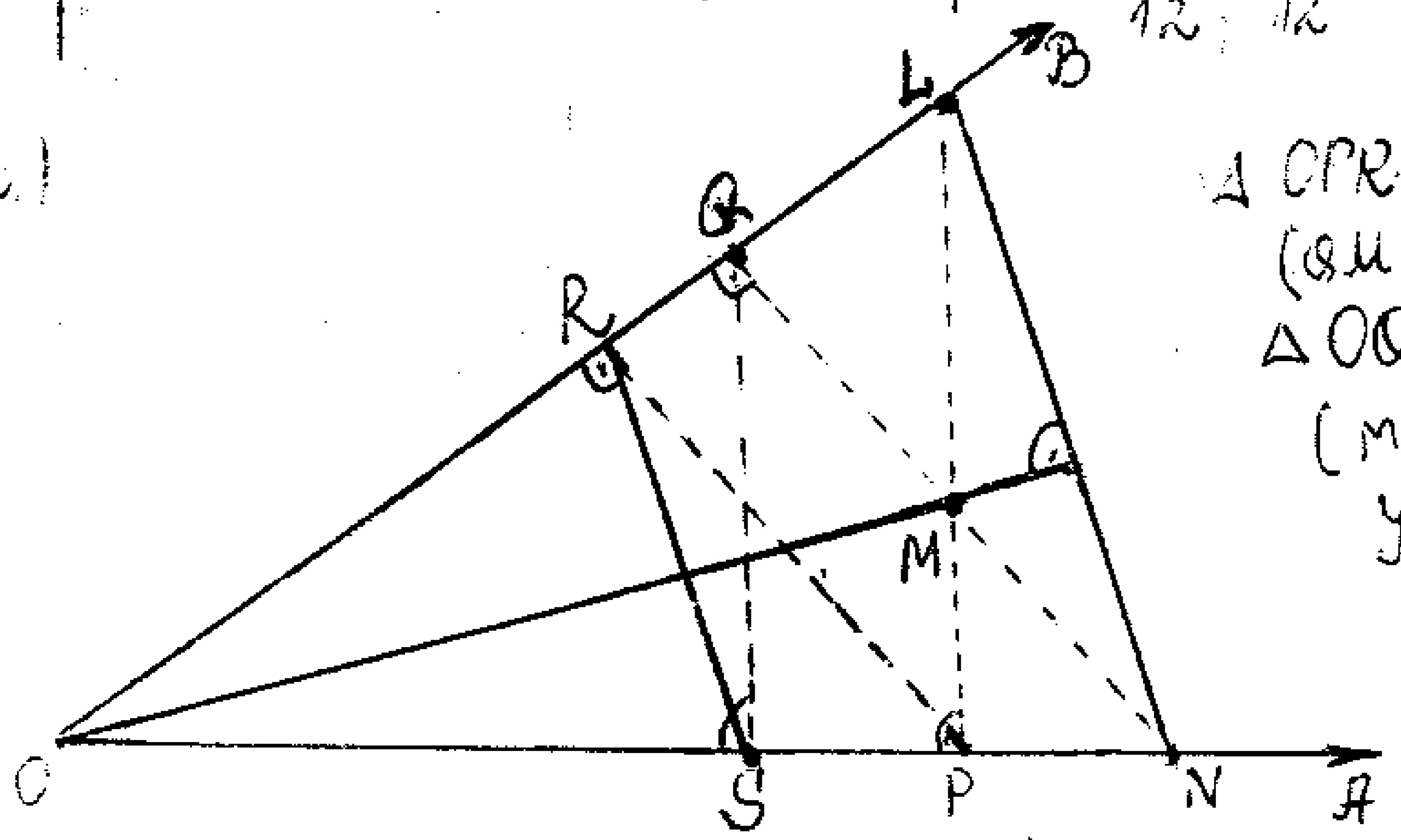
$(2k-1-k-3)x^2+(7k+2-5k-5)x-3k+4k+4>0$ за $\forall x$

$(k-4)x^2+(2k-3)x+(k+4)>0$ за $\forall x$ (1 точка) $\iff \left|\begin{array}{l} k-4>0 \\ D=(2k-3)^2-4(k-4)(k+4)<0 \end{array}\right.$ (1 точка)

$\left|\begin{array}{l} k>4 \\ 4k^2-12k+9-4k^2+64<0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} k>4 \\ k>\frac{73}{12}=6\frac{1}{12} \end{array}\right. \Rightarrow k>\frac{73}{12}$ или $k \in \left(\frac{73}{12}; +\infty\right)$ (1 точка)

Общо за зад. 1б) 3 точки

2 зад.)



$\triangle OPR \sim \triangle ONQ \Rightarrow \frac{OP}{OR} = \frac{ON}{OQ}$ (1) (1 точка)
$(QM \cap OA = N)$

$\triangle OQS \sim \triangle OLP \Rightarrow \frac{OL}{OP} = \frac{OQ}{OS}$ (2) (1 точка)
$(MP \cap OB = L)$

Умножаване почленно (1) и (2) и получаване $\frac{OL}{OR} = \frac{ON}{OS}$ (0,5 точки) $\Rightarrow$

(0,5 точки) $\triangle OLN \sim \triangle ORS \Rightarrow RS \parallel LN$ (1 точка). Точката M е ортоцентър на $\triangle OLN \Rightarrow OM \perp NL$, (1 точка)

но $NL \parallel RS \Rightarrow OM \perp RS$ (1 точка) Общо за 2 зад. 6 точки

Зад. 3)

Изразите $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$ имат смисъл за $\forall a$ (1 точка)

$a^2-a+1>0$ за $\forall a$, защото $D_1<0$ и коефициентът пред a^2 е положителен;

$a^2+a+1>0$ за $\forall a$, защото $D_2<0$ и коефициентът пред a^2 е положителен;

$4a^2+3>0$ за $\forall a$, защото $4a^2 \geqq 0$ за $\forall a$ и $3>0$

и са положителни (1 точка)

$\sqrt{4a^2+3} > \sqrt{a^2-a+1}$ за $\forall a$ ($3a^2+a+2>0$, защото $D_3<0$ и коефициентът пред $a^2>0$) (1 точка)

Аналогично $\sqrt{4a^2+3} > \sqrt{a^2+a+1}$ за $\forall a$ (1 точка)

Следователно $\sqrt{4a^2+3}$ е страната с най-голяма дължина и за да съществува триъгълник, за всяко a трябва да е изпълнено неравенството $\sqrt{4a^2+3} < \sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{a^2+a+1}$ (2 точки)

Повдигаме двете страни на неравенството на квадрат и получаваме $4a^2+3 < 2a^2+2+2\sqrt{a^4+a^2+1}$

Това неравенство е вярно, тъй като

$\underbrace{2a^2+1}_{>0 \text{ за } \forall a} < 2\sqrt{a^4+a^2+1} \iff 4a^4+4a^2+1 < 4a^4+4a^2+4 \iff 1<4$ (1 точка)

Общо за 3. зад. 7 точки

Зад. 1) – Математика, ПП, изд. „Просвета", стр. 333 и стр. 335

Зад. 2) – сп. „Математика", бр. 3, 2002 г., стр. 27

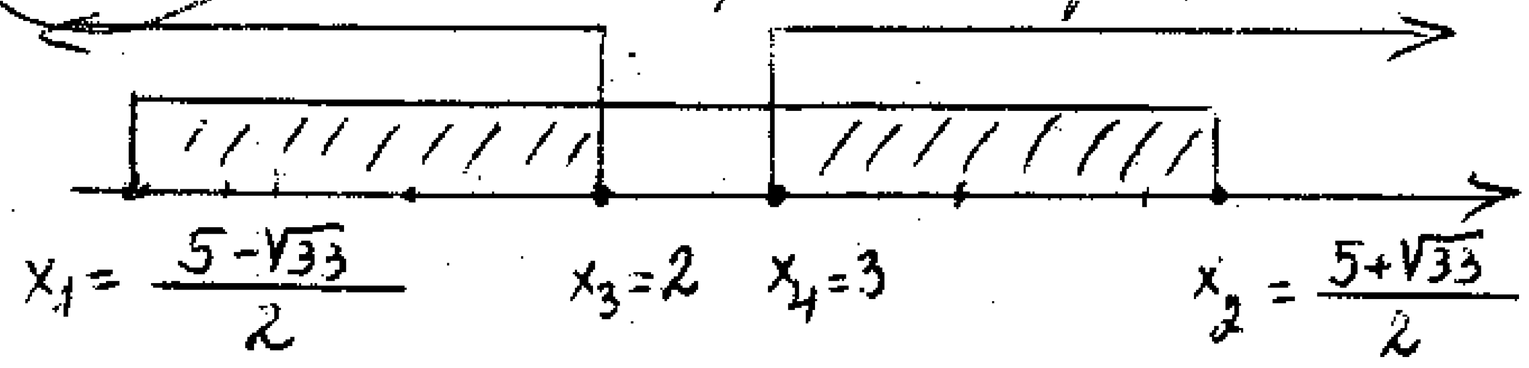
Зад. 3) – сп. „Математика", бр. 5, 2001 г., стр. 61

зад. а) $|x^2-5x+2|\le 4 \iff \begin{cases} x^2-5x+2\le 4 \\ x^2-5x+2\ge -4\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-5x-2\le 0 \\ x^2-5x+6\ge 0\end{cases}$ (1 точка)

$x_1=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

$x_3=2$, $x_4=3$

11 кл. гимназии / СОУ-профил. об.



$\begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)\le 0 \\ (x-x_3)(x-x_4)\ge 0\end{cases} \Rightarrow x\in\left[\frac{5-\sqrt{33}}{2};2\right]\cup\left[3;\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$

(По 1 точка за решенията на всяко неравенство и 1 точка за крайния отговор) Общо за зад. 1а) 4 точки

б) $f(x)>g(x) \iff (2k-1)x^2+(7k+2)x-3k>(k+3)x^2+5(k+1)x-4(k+1)$ за $\forall x$

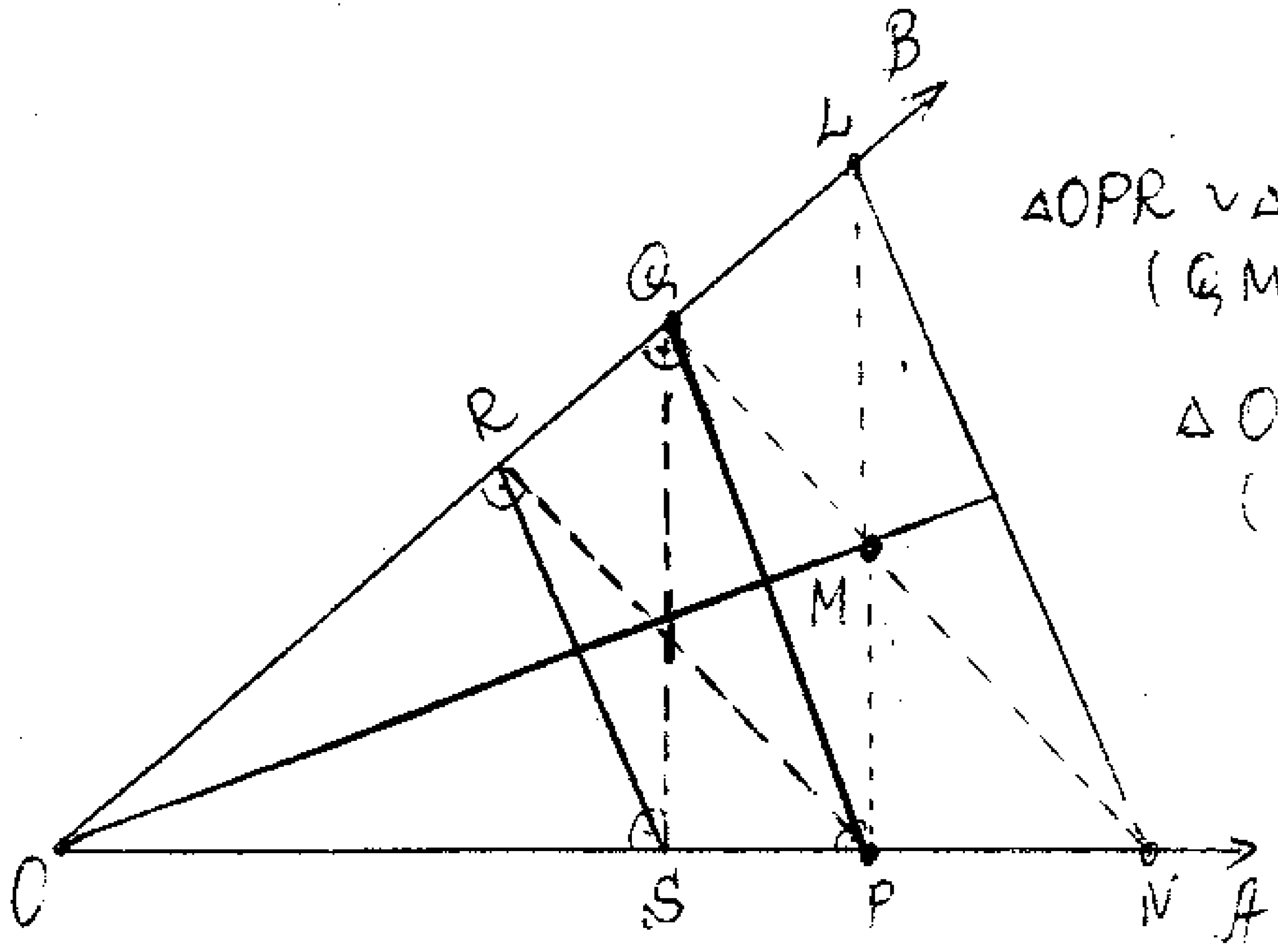
$(2k-1-k-3)x^2+(7k+2-5k-5)x-3k+4k+4>0$ за $\forall x$

$(k-4)x^2+(2k-3)x+(k+4)>0$ за $\forall x$ (1 точка) $\iff \begin{cases} k-4>0 \\ D=(2k-3)^2-4(k-4)(k+4)<0 \end{cases}$ (1 точка)

$\begin{cases} k>4 \\ 4k^2-12k+9-4k^2+64<0\end{cases} \iff \begin{cases} k>4 \\ k>\frac{73}{12}=6\frac{1}{12}\end{cases} \Rightarrow k>\frac{73}{12}$ или $k\in\left(\frac{73}{12};+\infty\right)$ (1 точка)

Общо за зад. 1б) 3 точки

2 зад.)



$\triangle OPR\sim\triangle ONQ \Rightarrow \frac{OP}{OR}=\frac{ON}{OQ}$ (1) (1 точка)
$(QM\cap OA=N)$

$\triangle OQS\sim\triangle OLP \Rightarrow \frac{OL}{OP}=\frac{OQ}{OS}$ (2) (1 точка)
$(MP\cap OB=L)$

Умножаване почленно (1) и (2) и получаване $\frac{OL}{OR}=\frac{ON}{OS} \Rightarrow$ (0,5 точки)

(0,5 точки) $\triangle OLN\sim\triangle ORS \Rightarrow RS\parallel LN$. Точката M е ортоцентър на $\triangle OLN \Rightarrow OM\perp NL$, но $NL\parallel RS \Rightarrow OM\perp RS$ (1 точка)

т. O, P, M и Q $\in$ окръжност k с диаметър $OM=a$ (0,5 точки)

$\triangle OPQ$ вписан в k и тъй като $\sphericalangle AOB=\sphericalangle POQ=\alpha$, то

$\frac{QP}{\sin\alpha}=a$ (синусова теорема) $\Rightarrow QP=a\sin\alpha$ (1) (0,5 точки)

$\triangle ORP\sim\triangle OSQ \begin{cases}\sphericalangle POR=\sphericalangle SOQ=\alpha \\ \sphericalangle ORP=\sphericalangle OSQ=90^\circ\end{cases}$

$\Downarrow$

$\frac{OR}{OS}=\frac{OP}{OQ} \iff \frac{OR}{OP}=\frac{OS}{OQ}$ (0,5 точки)

$\triangle OSR\sim\triangle OQP \begin{cases}\frac{OR}{OP}=\frac{OS}{OQ} \\ \sphericalangle SOR=QOP=\alpha\end{cases}$

$\Downarrow$

$\frac{OR}{OP}=\frac{OS}{OQ}=\frac{RS}{QP}$ (0,5 точки), но $\frac{OR}{OP}=\cos\alpha$ (0,5 точки), следователно $\frac{RS}{QP}=\cos\alpha \iff RS=QP\cos\alpha$ (2)

От (1) и (2) следва $RS=a\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{a\sin 2\alpha}{2}$ (0,5 точки) Общо за 2 зад. 7 точки

3 зад.) Забелязваме, че $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$. Тогава, ако $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=y$, то $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{y}$
(1 точка) (1 точка)
и уравнението приема вида $y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \Rightarrow y_1=\frac{3}{2}, y_2=\frac{2}{3}$ (1 точка)
(1 точка)
Заместваме получените стойности на y_1 и y_2 в полагането
и получаваме $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{3}{2}$, откъдето $x=\log_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(\frac{3}{2}\right)$ (1 точка) или

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{2}{3}$, откъдето $x=\log_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(\frac{2}{3}\right)$ (1 точка)

Общо за 3. зад. 6 точки

Зад. 1) – Математика за 12. клас, ПП, изд. „Просвета", стр. 333 и стр. 335
Зад. 2) – сп. „Математика", бр. 3, 2002 г., стр. 27
Зад. 3) – сп. „Математика", бр. 1, 2000 г., стр. 60

Кратки решения на задачите за 11. клас:

1зад.) Подразбиране, че по условие x, y, z са последователни членове на $\div \Rightarrow x+z=2y$ (0,5 точки)

а) Трябва да докажем, че от $x+z=2y \Rightarrow (x^2+4y^2+z^2)^2=2(x^4+16y^4+z^4)$ (... за $\div$) (0,5 точки)

Разкриваме скобите и получаваме

$$x^4+16y^4+z^4+2x^2z^2+8y^2z^2+8x^2y^2\overset{?}{=}2(x^4+z^4)+32y^4$$

$\Rightarrow (2y)^4-2\cdot(2y)^2(x^2+z^2)+(x^2-z^2)^2\overset{?}{=}0$. Заместваме $2y$ с $x+z$ и получаваме

$$(x+z)^4-2(x+z)^2(x^2+z^2)+(x^2-z^2)^2\overset{?}{=}0 \Rightarrow (x+z)^4-2(x+z)^2(x^2+z^2)+(x-z)^2(x+z)^2\overset{?}{=}0$$

или $(x+z)^2\cdot\left[(x+z)^2-2(x^2+z^2)+(x-z)^2\right]\overset{?}{=}0$

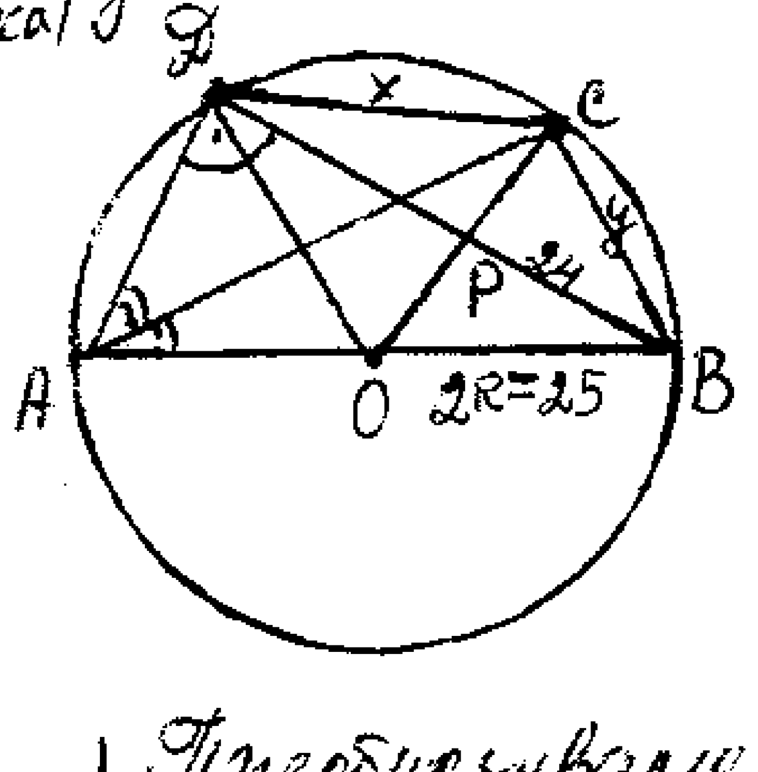
За произволни x и z е изпълнено тъждеството $(x+z)^2+(x-z)^2=2(x^2+z^2)$, с което твърдението е доказано (2 точки) Общо за зад. 1а) 3 точки

б) Трябва да решим системата $\begin{vmatrix} x+z=2y \\ x+y+z=15 \\ x^2+y^2+z^2=83 \end{vmatrix} \Rightarrow 3y=15 \Rightarrow y=5$ (1 точка)

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+z=10 \\ x^2+z^2=58 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=10-z \\ z^2-10z+21=0 \end{vmatrix} \Rightarrow z=3, x=7$ (1 точка) или $z=7, x=3$ (1 точка)

Решенията на задачите са прогресиите 3, 5, 7 и 7, 5, 3. Общо за зад. 1б) 3 точки

2зад.) От правоъгълния $\triangle ABD$ намираме $AD=7$ (1 точка). От $S_{\triangle BCD}=\frac{BC\cdot CD\cdot BD}{4R}$, намираме $xy=225$ (1 точка), където R е радиусът на описаната окръжност около $ABCD$, $BC=x$ и $CD=y$. От косинусова теорема за $\triangle BCD$ намираме $24^2=x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\alpha)$ (1 точка), където $\alpha=\sphericalangle BAD$. От $\triangle ABD$ имаме $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ (1 точка). Така получаваме $\begin{vmatrix} x^2+y^2=450 \\ xy=225 \end{vmatrix}$, откъдето $x=y=15$ (1 точка). От $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C=90^\circ$) намираме $AC=20$ (1 точка). От $DC=CB \Rightarrow \overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$.



Следователно $\sphericalangle DAC=\sphericalangle BAC=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow AC$ - ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$ (1 точка)

$\left.\begin{array}{l} \triangle DBC \text{ равнобедрен} \Rightarrow \sphericalangle CDB=\sphericalangle DBC \\ \triangle CDO\cong\triangle CBO \text{ (III пр.)} \Rightarrow \sphericalangle DCO=\sphericalangle BCO \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle DPC=\sphericalangle CPB$ и тъй ($DB\cap OC=P$)

като $\sphericalangle DPC+\sphericalangle CPB=180^\circ \Rightarrow \sphericalangle DPC=\sphericalangle CPB=90^\circ \Rightarrow OC\perp DB$ (1 точка)

Общо за 2. зад. 8 точки

3зад.) Преобразуваме израза и получаваме (1 точка)

$f(x)=x^2-2x+1+x^2-2.2x+2^2+x^2-2.3x+3^2+\dots+x^2-2.2001x+2001^2 \Leftrightarrow$

$=2001x^2-2(1+2+\dots+2001)x+(1^2+2^2+\dots+2001^2)$ (1 точка) $\Leftrightarrow y=2001x^2-2001.2002x+\frac{2001.2002.4003}{6}$ (1 точка) (1 точка)

Минималната стойност k на y се получава във върха на параболата (защото $2001>0$), за който $x=-\frac{b}{2a}=1001$ (1 точка), а $y_{min}=k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4.2001.\frac{2001.2002.4003}{6}-2001^2.2002^2}{4.2001}$

$\Rightarrow k=667667000$ (1 точка)

Общо за 3. зад. 6 точки

Зад.1) - Конкурсен изпит за ТУ, Варна, 2002 г.

Зад.2) - Конкурсен изпит за ПУ, 2001 г.

Зад.3) - сп. „Математика", бр. 6, 2001 г., стр. 41

Кратки решения на задачите за 12. клас:

1зад.)
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+x}-x}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x>0)}}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x^{\frac12}}{x^{\frac23}\sqrt[3]{1+\frac1x}-x}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})\sin(x-1)}{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3x+1})^2}$ (0,5 точки) (0,5 точки)

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x^{-\frac12}\right)}{x\left(\sqrt[3]{\frac1x+\frac{1}{x^2}}-1\right)}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})\sin(x-1)}{-2(x-1)}=-1-2=\underline{\underline{-3}}$ (1 точка)

(0,5 точки) (0,5 точки)

Общо за зад. 1а) **3 точки**

б) Преобразуване израза $\frac{ax^2+3x+b}{x+3b}-x=\frac{(a-1)x^2+(3-3b)x+b}{x+3b}$ (1 точка)

Тъй като по условие границата е крайно число, то $a-1=0\Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$ (1 точка)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-3b)x+b}{x+3b}=3-3b$. От $3-3b=-6\Rightarrow \underline{\underline{b=3}}$ (1 точка).

Общо за зад. 1б) **3 точки**

2зад.) По условие $\angle DEB=\alpha$, където $BE\perp CM$ и $DE\perp CM$ и $CM=DM=AM=BM=l$

От ABCDM-правилна пирамида ⇒ ABCD квадрат ⇒ $AO=OC=BO=OD=x$. Построяваме MO-височина на ABCDM

ΔMOC-правоъгълен ($MO\perp ABCD\Rightarrow MO\perp OC\subset ABCD$) (0,5 точки)

$BE\perp MC$, $DE\perp MC$ ⇒ $MC\perp(BED)$, но $OE\subset(BED)\Rightarrow MC\perp OE$ (0,5 точки) (0,5 точки)

$E=BE\cap DE$

⇒ $CO^2=CE.CM\Rightarrow x^2=CE.CM$ (0,5 точки)

От ΔCOE правоъгълен определяме, че $CE=\sqrt{x^2-OE^2}$ (0,5 точки)

ABCD-квадрат ⇒ $AC\perp BD$, OC-ортогонална проекция на OE ⇒ $OE\perp DB$ (0,5 точки) ⇒

(1) ΔBOE-правоъгълен $\overset{(1)(2)}{\Rightarrow} OE=OB\cot\frac{\alpha}{2}=x.\cot\frac{\alpha}{2}$ (3) (0,5 точки)

OE-височина в равнобедрения ΔBED ($DE=BE$, защото ABCDM-правилна пирамида) ⇒

(2) $\angle DEO=\angle BEO=\frac{\alpha}{2}$ (0,5 точки)

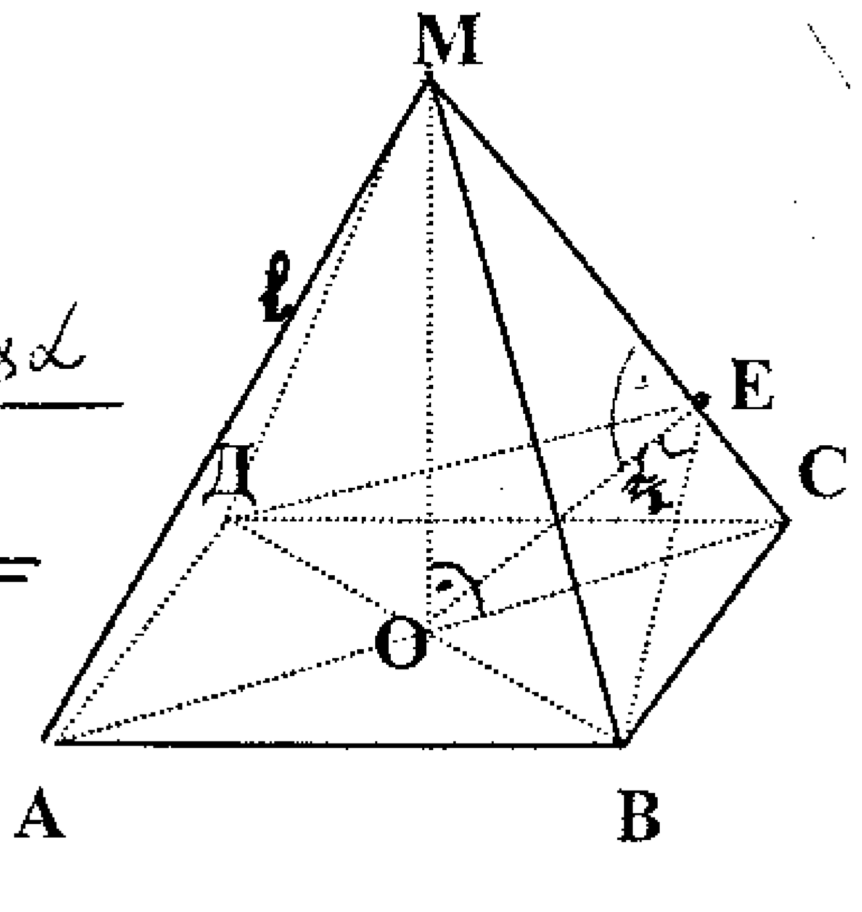
$CE=\sqrt{x^2-OE^2}\overset{(3)}{=}x\sqrt{1-\cot^2\frac{\alpha}{2}}$ (4) (1 точка)

$OC^2=CE.CM\overset{(4)}{=}lx\sqrt{1-\cot^2\frac{\alpha}{2}}=x^2\Rightarrow x=l\sqrt{1-\cot^2\frac{\alpha}{2}}$ (5) (0,5 точки) $\Rightarrow AB=\sqrt{2}x=\sqrt{2}l.\sqrt{1-\cot^2\frac{\alpha}{2}}$ (6) (0,5 точки)

$h=MO=\sqrt{CM^2-OC^2}=\sqrt{l^2-x^2}=l\sqrt{\cot^2\frac{\alpha}{2}}=l\cot\frac{\alpha}{2}$ (7) (1 точка)

$V\overset{(6)(7)}{=}\frac{Bh}{3}=\frac{\left(\sqrt{2}l\sqrt{1-\cot^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 l\cot\frac{\alpha}{2}}{3}=\frac{2l^3\cot\frac{\alpha}{2}\left(1-\cot^2\frac{\alpha}{2}\right)}{3}=\underline{\underline{\frac{-2l^3\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\alpha}{3\sin^3\frac{\alpha}{2}}}}$ (1 точка)

Общо за 2. зад. **8 точки**



3зад.
$x=0\Rightarrow f(1)=1$

$x=1\Rightarrow f(2)=f(1)+2.1+1$

$x=2\Rightarrow f(3)=f(2)+2.2+1$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$x=2000\Rightarrow f(2000)=f(1999)+2.1999+1$

$x=2001\Rightarrow f(2001)=f(2000)+2.2000+1$ (3 точки)

Събираме почленно тези равенства и намираме, че

$f(2001)=2(1+2+\dots+1999+2000)+1.2001=(1+2000).2000+2001=\underline{2001^2}$ (3 точки)

Общо за 3зад. **6 точки**

Зад.1а) сп. „Математика", бр.1, 2002г, стр. 52
Зад.1б) - I кръг ОМ, София, 2001г.
Зад. 2) - I кръг ОМ, София, 2001г.
Зад. 3) - сп. „Математика", бр. 4, 2002г, стр. 47