РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА

ул." Софроний Врачански" №6, тел. 62 22 82; факс 092 62 46 43

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

ТЕМА ЗА ЧЕТВЪРТИ КЛАС
07.03.2004 год.

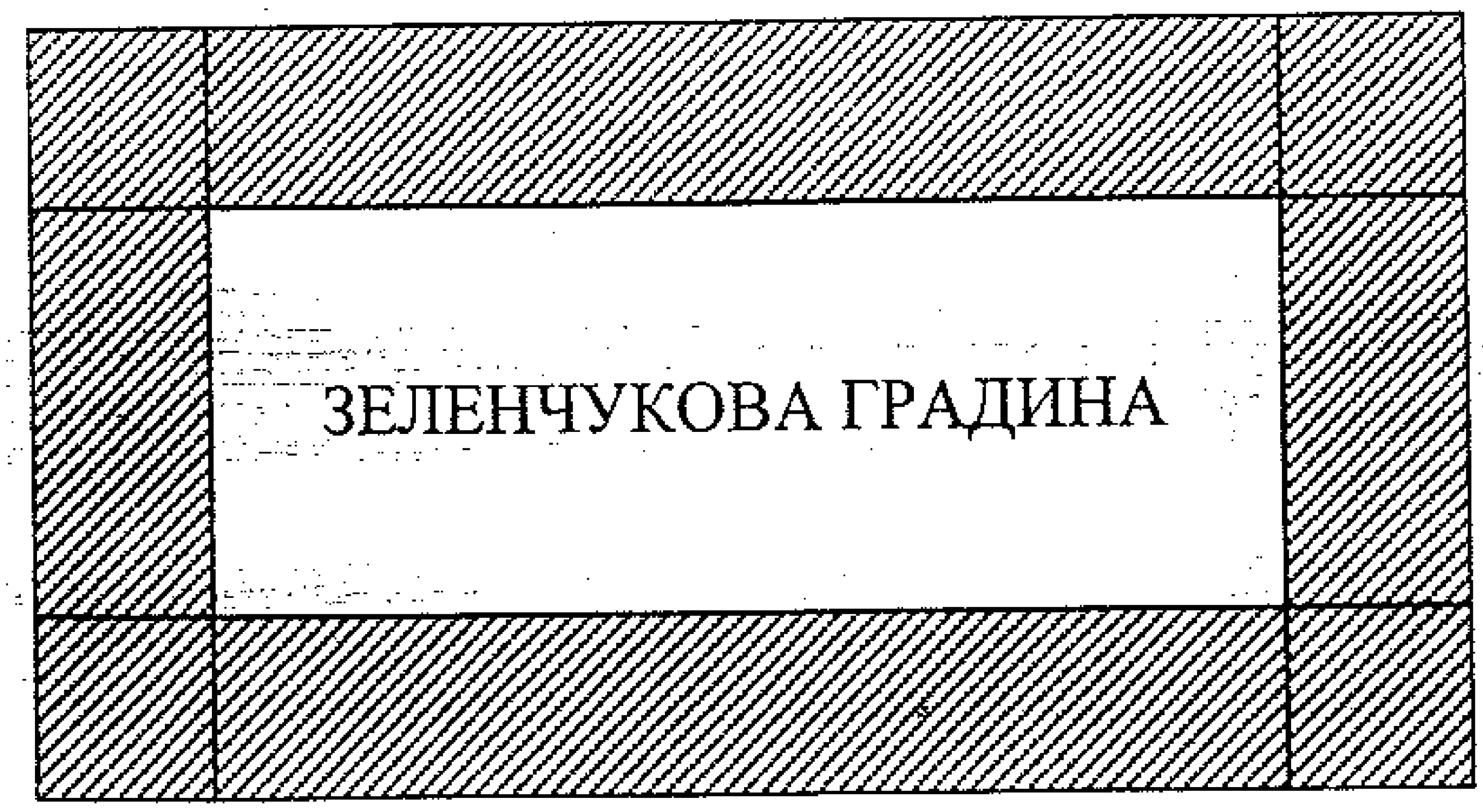
1зад. Пресметнете:

/ 2004 + 5824 : 7/ : 4 + 9 . 150 – 59 =

2 зад. Една книга съдържа 372 страници. Колко цифри са използвани за номерирането и, ако номерацията започва от трета страница?

3 зад. Катер се движи срещу течението на една река и изминава 96 км за 6 часа. Ако скоростта на катера в спокойна вода е 9 пъти по-голяма от скоростта на течението на реката, намерете с каква скорост ще се движи катерът по течението.

4 зад. Ширината на зеленчукова градина, с форма на правоъгълник, е три пъти по – малка от дължината. При оградането на градината с ограда, намираща се на 2 м от засадената площ, се оказало, че лицето на заградения участък е със 128 кв.м по-голямо от лицето на зеленчуковата градина. Намерете дължината на оградата.



РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА

ул." Софроний Врачански" №6, тел. 62 22 82; факс 092 62 46 43

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

ТЕМА ЗА ЧЕТВЪРТИ КЛАС

07.03.2004 год.

ВАРИАНТИ НА РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ И УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ПИСМЕНИТЕ РАБОТИ НА УЧЕНИЦИТЕ

1зад. Пресметнете:

/2004 + 5824 : 7/ : 4 + 9 . 150 – 59 =/2004+832/:4+1340-59=2836:4+1350-59=709+1350-59=2000

За всяко вярно извършено действие – по 0,5 точки. **Общо за зад.1: 3 точки**

2 зад. Една книга съдържа 372 страници. Колко цифри са използвани за номерирането и, ако номерацията започва от трета страница?

Решение: От трета до деветата страница са използвани 7 цифри. / 1 точка/

Броят на страниците, номерирани с двуцифрени числа е 99 – 9 =90. За номерирането на всяка страница са необходими по 2 цифри или за всички страници, номерирани с двуцифрени числа са нужни 90.2=180 цифри. / 1 точка/

Броят на страниците, номерирани с трицифрени числа е 372-99=273 и за тях са необходими 273.3=819 цифри. / 1 точка/

Общият брой на цифрите е: 7 + 180 + 819 = 1006 / 1 точка/

Общо за зад.2: 4 точки

3 зад. Катер се движи срещу течението на една река и изминава 96 км за 6 часа. Ако скоростта на катера в спокойна вода е 9 пъти по-голяма от скоростта на течението на реката, намерете с каква скорост ще се движи катерът по течението.

Решение: Vс/у течението = 96:6=16км/ч /1 точка/

Ако Vтечението = x км/ч то следва, че Vкат. сп. вода = 9.x /2 точки/

Тогава Vс/у течението= 9.x – x = 16 /1 точка/

Следователно: x = 2 км/ч / Vтечението = 2 км/ч / /1 точка/

Vсп. вода= 9.2 = 18км / ч 0,5точки/

Vпо течението = Vсп. вода + Vтечение = 18+2 = 20 км/ч / 0,5 точки/

Общо за зад. 3: 6 точки

4 зад. Ширината на зеленчукова градина с форма на правоъгълник е три пъти по – малка от дължината. При ограждането на градината с ограда, намираща се на 2 м от засадената площ, се оказало, че лицето на заградения участък е със 128 кв. м по-голямо от лицето на зеленчуковата градина. Намерете дължината на оградата.

Решение: Тъй като лицето на заградения участък е със 128 кв.м по – голямо от лицето на зеленчуковата градина, това означава, че лицето на участъка между оградата и градината е 128 кв. м. /1 точка/

Ако от това лице извадим лицето на участъците с форма на квадрат, което е 4 . 2 . 2 = 16 кв. м, ще получим:

128 – 16 = 112 кв. м /1 точка/

Това е площта на четирите правоъгълници, които са два по два еднакви и се намират между лехите и оградата. Тези правоъгълници имат една и съща ширина – 2 м. Дължината на единия е три пъти по – голяма от дължината на другия, от което следва, че лицето на по-големия правоъгълник съдържа 3 пъти лицето на по-малкия. Следователно 112 кв.м можем да разгледаме като сбор от лицата на 8 еднакви правоъгълника, всеки от които е еднакъв с по-малкия правоъгълник. Ако приемем,че площта на малкия правоъгълник е x кв.м, то площта на четирите правоъгълника е: x + x +3x +3x = 8x или:

112 : 8 = 14 кв.м /лицето на малкия правоъгълник/ /2 точки/

14 : 2 = 7 м /ширината на градината/

7.3 = 21 м /дължината на градината/ / 1 точка/

Размерите на оградата са:

7 + 2 + 2 = 11 м и 21 + 2 + 2 = 25 м /1 точка/

Дължината на оградата е : 2 . / 11 + 25 / = 2.36 = 72 м /1 точка/

Общо за зад. 4 : 7 точки

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 5.КЛАС

---

1 зад.Да се пресметне стойността на израза

$$A=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}:\frac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{45}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{45}-\frac{1}{343}}$$

Да се намери най-голямата дроб със знаменател 7, която е по-голяма от $\frac{8}{3}A$ и по-малка от $\frac{16}{3}A$ и най-малката дроб със знаменател 9, която е по-голяма от 2A и по-малка от 6A.

2 зад. а/От правоъгълник с размери 80 мм и 100 мм са изрязани последователно три правоъгълни ивици с ширина 1 см. Покажете, че както и да се изрязват ивиците, обиколката на получения правоъгълник е с 6 см по-малка от обиколката на дадения. Намерете възможно най-малкото лице на правоъгълника, който ще се получи след трите отрязвания.

б/ Правоъгълник с лице 50 кв.см, може да бъде разрязан на два квадрата. Върху всяка от страните на правоъгълника извън него е построен равностранен триъгълник. Да се намери обиколката на получената звездовидна фигура.

3 зад. Нека N е 2002-цифрено число, което се дели на 9. С a е означен сборът на цифрите на N, с b –сборът от цифрите на числото a, а с c – сборът от цифрите на b. Да се намери остатъкът от делението на $M = N + 11.(a + b + c) + 2002$ с 9.

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

1 зад.сп.”Математика”, бр.1,2003г., стр. 15, сп.”Математика”, бр.6,2003г., стр. 15.
2 зад.а/ и б/сп.”Математика”, бр.6, 2002 г., стр. 29.
3 зад.сп.”Математика плюс”, бр.2, 2003 г., стр. 6.

<u>КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5.КЛАС</u>

Задача 1.(6точки)

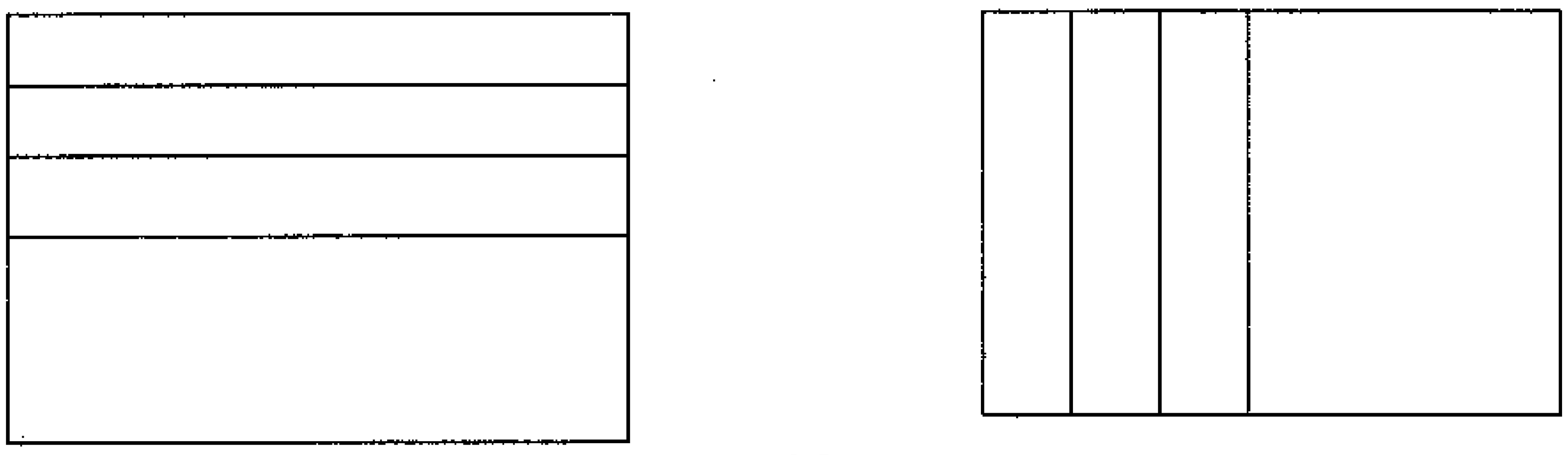
$$A=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}:\frac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{45}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{45}-\frac{1}{343}}=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27})}:\frac{4(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{45}-\frac{1}{343})}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{45}-\frac{1}{343}}=\frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{3}<\frac{4}{7}<\frac{2}{3};\frac{1}{4}<\frac{3}{9}<\frac{3}{4}.$$

Задача 2.(а/ 4точки, б/ 4точки)

а/Изрязването на ивиците може да се направи по следните начини:

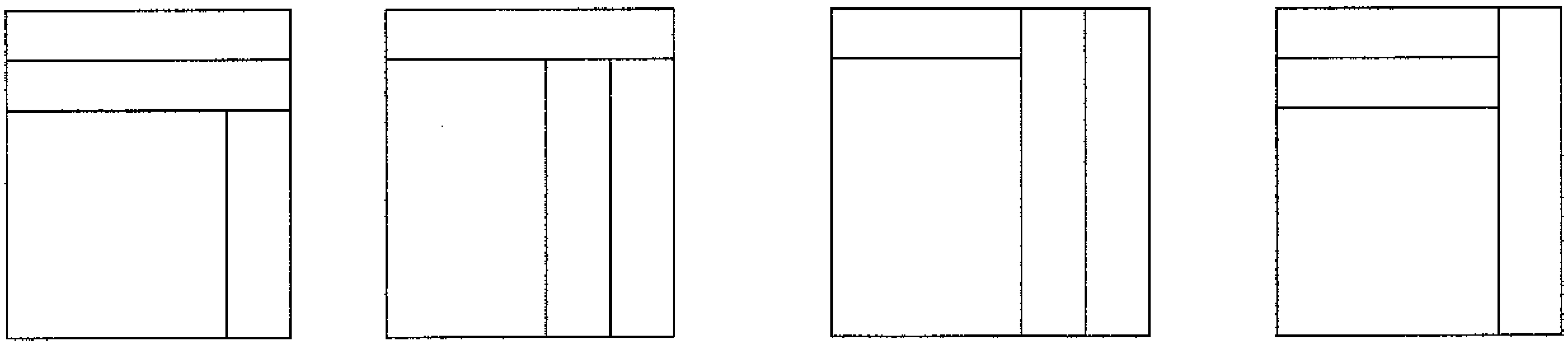
- Трите ивици се изрязват от една страна:



а= 10 см
b=8 см

Новите размери в този случай са $a_1 = 10$см, $b_1 = 5$ см или $a_2 = 7$ см, $b_2 = 8$ см, откъдето $P_1 = 2(10+5)=$<u>30 см</u>, $S_1=10.5=$<u>50 см^2</u> или $P_2 = 2(7+8)=$<u>30 см</u>, $S_2=7.8=$<u>56 см^2</u>.

- Ако от две срещуположни страни отрежем съответно една и две ивици, тогава получаваме резултати за P и S като в предишния случай
- Отрязваме от две страни с общ връх съответно една и две ивици:



Новите размери в този случай са $a_3 = 9$ см, $b_3 = 6$ см, откъдето $P_3 = 2(9+6)=$<u>30см</u>, $S_3=9.6=$<u>54 см^2</u> или $a_4 = 8$ см, $b_4 = 7$ см, откъдето $P_4 = 2(7+8)=$<u>30 см</u>, $S_2=7.8=$<u>56 см^2</u>.

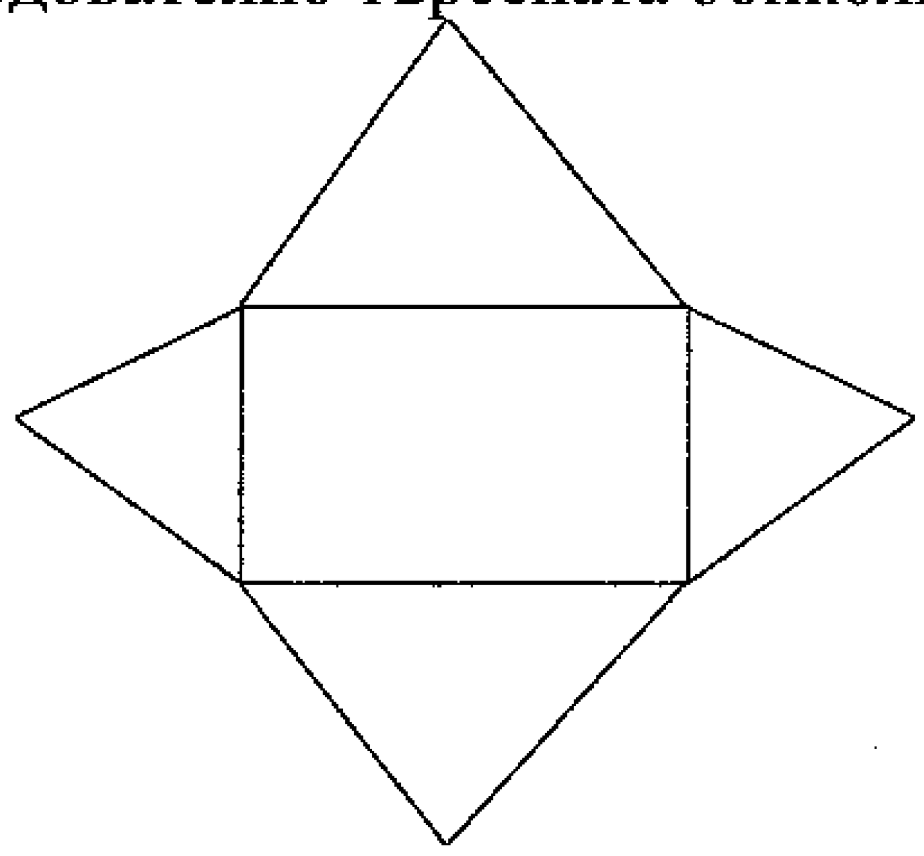
- Отрязваме ивиците от три страни:

Тогава a_5=9 см, b_5=6 см и P_5=2(9+6)=<u>30 см</u>, S_5=9.6=<u>54 см^2</u> или

a_6=8 см, b_6 =7см и P_6=2(8+7)=<u>30 см</u>, S_6=<u>56 см^2</u>.

Във всички случаи P=30 см , а обиколката на изходния правоъгълник е p=2(8+10)=36 см и следователно p-P=6 см. Възможното най-малко лице на правоъгълника е 50 кв.см.

б/ Ако страните на правоъгълника са x и y, $x \geq y$, то лицето му е xy=50. Щом правоъгълникът може да бъде разрязан на 2 квадрата, то x=2y. Тогава 2y.y=50, откъдето y=5 см и x= 10 см. Следователно търсената обиколка е p=4.10 +4.5=60 см.



Задача 3.(6 точки) От признака за делимост на 9 следва, че всяко от числата *a*, *b*, *c* се дели на 9 и следователно търсеният остатък е остатъкът на 2002 при деление на 9, т.е. 4.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 6.КЛАС

---

1 зад. а/ Да се намери числото x от пропорцията

$$\frac{-0{,}14.1{,}5-0{,}8.(-0{,}125)}{10{,}4.0{,}125+0{,}4.\frac{3}{10}:\left(-0{,}4.\frac{1}{4}\right)}=\frac{0{,}1.x}{\left|-0{,}4.7+\left|-0{,}8\right|\right|}.$$

б/ Да се изчисли отношението $\frac{b}{a}$, ако

$$\frac{22b-2a}{a}=2-2:2\frac{1}{3}.$$

2 зад. В една книжарница докарали сборници по математика, христоматии и новия том на “Хари Потър”, които били общо повече от 1792 и по-малко от 1850 бройки.

Първият ден от всички сборници по математика продали $\frac{1}{7}$, от христоматиите – съответно $\frac{1}{5}$, а от “Хари Потър” - $\frac{4}{49}$. Втория ден продадените книги били съответно $\frac{1}{14}, \frac{1}{30}$ и $\frac{1}{3}$ от докараните бройки, а третия ден - $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{10}$.

Колко книги били докарани в книжарницата? По колко книги от всеки вид са останали след третия ден?

3 зад. В остроъгълния триъгълник ABC трите височини AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка H. Ако $AH:HA_1=1:1$ и $BH:HB_1=2:1$, да се намери $CH:HC_1$.

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

1 зад.а/ сп."Математика", бр.6,2002г., стр. 36 и сп."Математика", бр.6,2003г., стр. 16.
б/сп."Математика", бр.6,2003г., стр. 36.
2 зад. сп."Математика плюс", бр.4, 2003г., стр. 16.
3 зад. сп."Математика", бр.2,2002г., стр. 47.

КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6.КЛАС

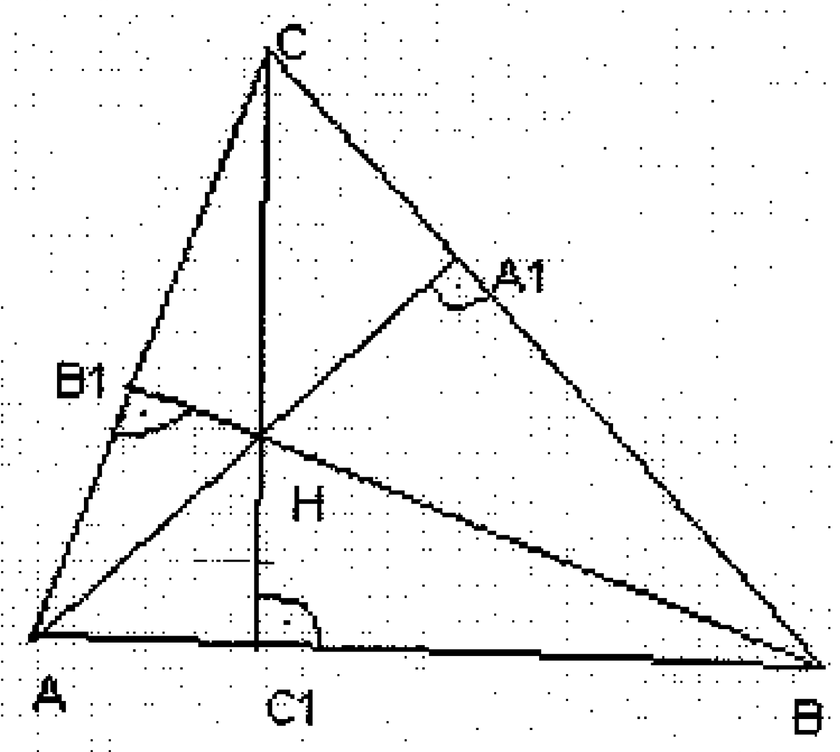
Задача 1а/.(3 точки) $\dfrac{-0,14.1,5-0,8.(-0,125)}{10,4.0,125+0,4.\dfrac{3}{10}:\left(-0,4.\dfrac{1}{4}\right)}=-1,1;\ \left|-0,4.7+\left|-0,8\right|\right|=2$; x= -22.

б/(3 точки) Частното $\dfrac{22b-2a}{a}=\dfrac{22b}{a}$ - 2. След преобразуване получаваме

$22\dfrac{b}{a}$-2=2-2:$\dfrac{7}{3}\Rightarrow 22\dfrac{b}{a}=\dfrac{22}{7}$. Следователно $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{7}$.

Задача2.(7 точки) Означаваме броя на сборниците по математика с x, броя на христоматиите с y и броя на томовете"Хари Потър" със z (x,y,z –естествени числа). Ясно е, че НОК(7,14,5) дели x, НОК (5,30,4) дели y, а НОК (49,3,10) дели z. Следователно x= 70k, y=60m и z=1470n, където k,m и n са естествени числа и е изпълнено неравенството 1 792 < 70k + 60m + 1470n < 1 850. Очевидно к=3, m=2, n=1е единственото решение на това неравенство, което означава , че x=210, y=120 и z=1470. В книжарницата са били докарани 1800 книги. Продадените сборници по математика през трите дни са съответно 30, 15 и 42 , продадените христоматии - 24, 4 и 30 , а продадените томове"Хари Потър" - 120, 490 и 147. Останалите книги по видове са съответно 123, 62 и 713.

Задача 3.(7 точки)Многократно използваме, че лицата на два триъгълника с равни височини се отнасят така, както се отнасят основите на триъгълниците, към които са спуснати тези височини. Означаваме S_{AHB_1}=Q и от $BH:HB_1$ = 2:1 намираме S_{ABH}=2S_{AHB_1}=2Q. Тъй като $AH:HA_1$ =1:1, то $S_{BHA_1}=S_{ABH}$=2Q. Ако S_{CHA_1}= x , то S_{AHC} = x и S_{CB_1H}= x-Q . От $BH:HB_1$ = 2:1 намираме S_{CHB}=2S_{CHB_1}, откъдето x+2Q=2(x-Q) и следователно S_{CHA_1}= S_{AHC}=x=4Q, а от тук следва, че S_{CB_1H}= 3Q. Сега използваме, че лицата на два триъгълника с равни основи се отнасят така, както се отнасят височините им към тези основи. Следователно $\dfrac{CC_1}{HC_1}=\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABH}}=\dfrac{12Q}{2Q}=\dfrac{6}{1}$, откъдето $CH:HC_1$=5:1.



РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 7.КЛАС

---

1 зад.Да се приведе в нормален вид многочлена

$$A=\left(-3a-\frac{1}{3}x\right)^2-(x+3a)(3a-x)-\frac{10x^2-1}{9}.$$

Ако стойността на А за x = -1 е $-\frac{8}{9}$, да се намери стойността на А за x = $-\frac{1}{6}$.

Да се разложи на множители многочлена $B=3^{n+2}.y^2 - 3^{n+1}.2xy+3^n.x^2 - 3^{n-1}.12a^2$.

2 зад.Нека височините AD, $D\in BC$, BE, $E\in AC$ и CF, $F\in AB$ в остроъгълен Δ ABC се пресичат в точка H, а M и P са средите съответно на страната AB и отсечката CH. Да се докажат следните твърдения:

а/ $DM=EM=\frac{1}{2}AB$ и $DP=EP=\frac{1}{2}CH$; $\angle MDP=\angle MEP=90^0$, $\angle DPE=2.\angle ACB$ и $\angle DME=180^0-2.\angle ACB$;

б/Ако ъглополовящите на ъглите CAH и CBH се пресичат в точка N, то точките M, N и P лежат на една права.

3 зад. Нека $\frac{p}{q}$ е несъкратима дроб, равна стойността на израза

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{21^2}\right)$. Колко е стойността на израза p + q ?

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

1 зад. сп."Математика плюс", бр.1, 2003 г., стр. 15,
сп."Математика", бр.1, 2003г., стр. 41.
2 зад.сп."Математика плюс", бр.3, 2003г., стр. 24;
3 зад.сп."Математика плюс", бр.4, 2003 г., стр.46.

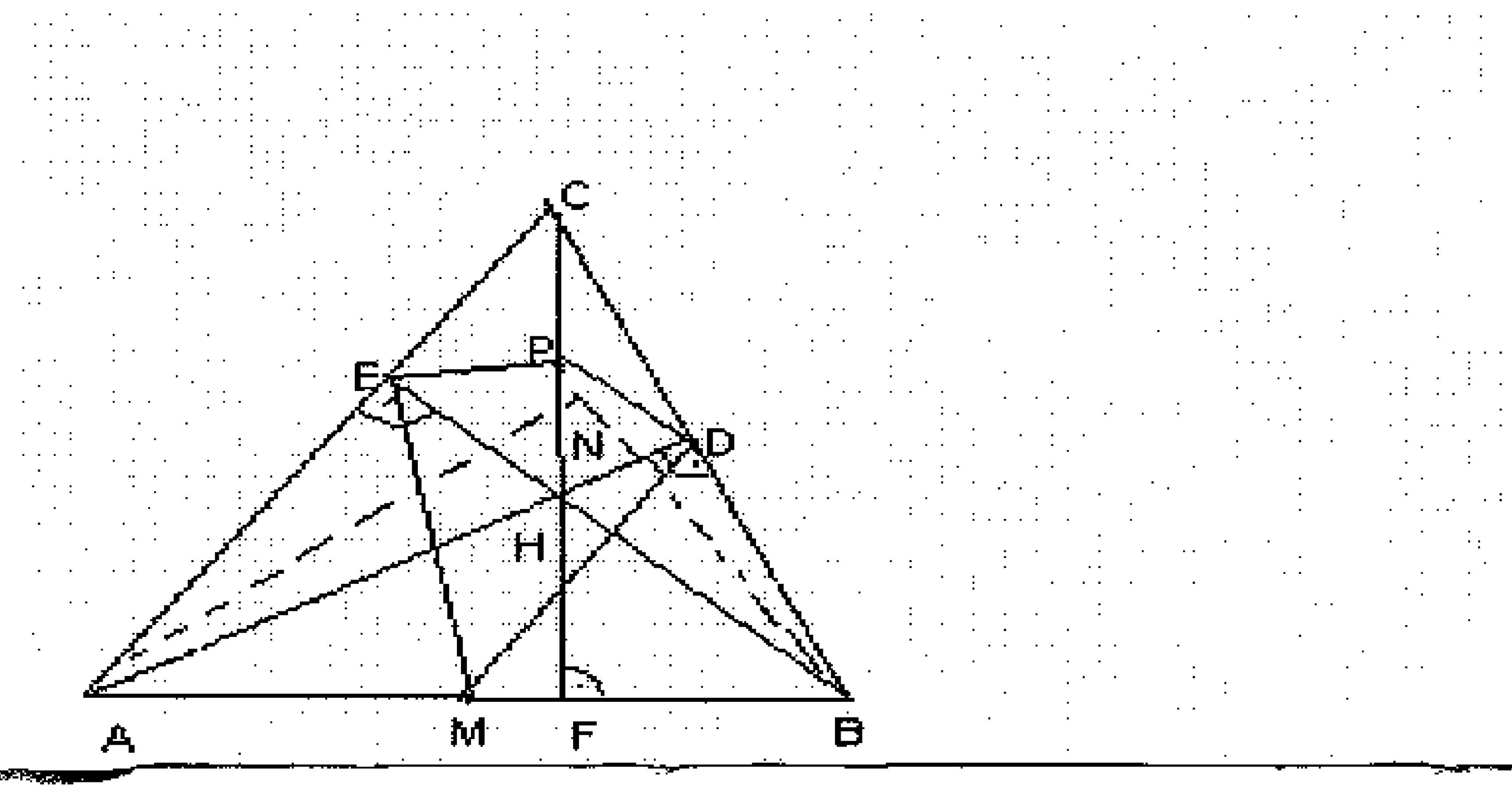
КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7.КЛАС

Задача 1.(5 точки)A= $2ax + \frac{1}{9}$. По условие $2a(-1)+\frac{1}{9} = -\frac{8}{9}$, следователно a=0,5 и

A= $x+\frac{1}{9}$. Тогава стойността на A за $x = -\frac{1}{6}$ е $A = -\frac{1}{18}$.

$B=3^{n+2}.y^2 - 3^{n+1}.2xy + 3^n.x^2 - 3^{n-1}.12a^2 = 3^n.(3^2.y^2 - 3.2xy + x^2) - 3^{n-1}.12a^2 =$
$3^n.(3y-x)^2 - 3^n.(2a)^2 = 3^n.(3y-x+2a).(3y-x-2a)$.

Задача 2.а/(4точки)Равенствата $DM=EM=\frac{1}{2}AB$ и $DP=EP=\frac{1}{2}CH$ се доказват като се използва свойството на медианата към хипотенузата съответно за правоъгълните триъгълници ABD, ABE, CDH и CEH. Тъй като DM=AM и DP=HP, то $\angle ADM = \angle DAM$ и $\angle PDH = \angle PHD$, откъдето $\angle MDP = \angle ADM + \angle PDH = \angle DAM + \angle AHF = 90^0$. От DM=MB и EM=AM следва, че $\angle BMD = 180^0 - 2\angle ABC$ и $\angle AME = 180^0 - 2\angle BAC$. Следователно $\angle DME = 180^0 - (\angle BMD + \angle AME) = 2(\angle BAC + \angle ABC) - 180^0 = 2(180^0 - \angle ACB) - 180^0 = 180^0 - 2\angle ACB$, а $\angle DPE = \angle DPH + \angle EPH = 2(\angle DCP + \angle ECP) = 2\angle ACB$.
б/(6точки) $\angle NAH = 0,5\angle CAH = 0,5\angle CBH = \angle NBC$, откъдето $\angle NAB + \angle NBA = \angle BAH + \angle ABD = 90^0$. Следователно $MN = \frac{1}{2}AB = DM = EM$, а $\angle DMN = \angle EMN = 90^0 - \angle ACB$. Доказваме с еднакви триъгълници, че DN=EN, откъдето следва , че N лежи на симетралата на отсечката DE. От друга страна от условие а/ следва, че точките M и P лежат на симетралата на същата отсечка.



Задача 3. (5 точки) Последователно получаваме

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{21^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{21}\right)\left(1+\frac{1}{21}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.....\frac{20}{21}.\frac{22}{21} = \frac{11}{21},$$

следователно $p + q = 11 + 21 = 32$.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 8.КЛАС

---

1 зад.а/Дадено е квадратното уравнение $(a-1)x^2 - 3x + a^2 - 5a + 4 = 0$, където а е реален параметър. Да се намери а, ако единият от корените на уравнението е нула. Да се реши уравнението за а=3.

б/Да се намерят стойностите на параметъра к, ако се знае, че корените x_1 и x_2 на уравнението $2kx^2 + (2\sqrt{2}k + 3\sqrt{2})x + k+1 = 0$ са равни. За кои стойности на к уравнението има точно един корен?

2 зад. На катетите CA и CB на равнобедрения правоъгълен ΔABC са избрани съответно точките D и E така, че CD = CE. Перпендикулярите, спуснати от точките D и C към правата AE, пресичат хипотенузата AB съответно в точките K и L. Да се докаже, че KL = LB.

3 зад. Колко на брой и кои са наредените двойки естествени числа (x,y) удовлетворяващи уравнението $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$?

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 9.КЛАС

---

1 зад. Да се реши уравнението

$$(x+3)\left(\frac{x}{x^3-0{,}125}+\frac{1}{x^2+2{,}5x-1{,}5}-\frac{2}{x^2+0{,}5x+0{,}25}\right)=0.$$

2 зад.Хордите AC и BD в окръжност с център O са перпендикулярни, имат различни дължини и се пресичат в точката K. Нека M и N са съответно центровете на окръжностите, описани около ΔABK и ΔCDK.

а/Ако $\angle KAB=50^0$, намерете $\angle OMK$ и $\angle MKN$ и докажете, че OMKN е успоредник.

б/Докажете, че правите KN и AB са перпендикулярни.

3 зад. Докажете, че $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

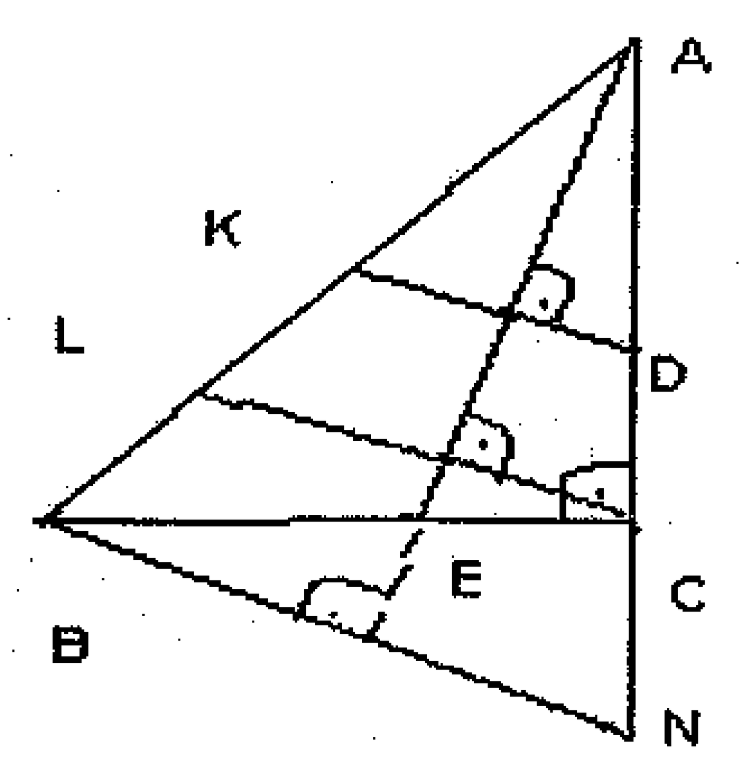
1 зад. Сборник задачи по алгебра 7.-10.клас, К.Коларов и др., стр.100.
2 зад. Сборник теми и задачи по геометрия за 8. клас, П.Нинова, стр.20.
3 зад. сп."Математика плюс", бр.4, 2003г.стр.47.

КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8.КЛАС

Задача 1. а/(3точки) От $x_1=0$, следва, че $a^2-5a+4=0$ и тъй като $a\neq 1$, то остава стойността $a=4$. При $a=3$ получаваме уравнението $2x^2-3x-2=0$, откъдето $x_1=2$ и $x_2=-\frac{1}{2}$.

б/ (3 точки) $x_1=x_2$ при $k=-\frac{9}{8}$; уравнението има точно един корен при $k=-\frac{9}{8}$ и $k=0$.

Задача 2. (7 точки)През т.B построяваме права, успоредна на CL, която пресича правата CA в точка N. Следователно $BN\perp AE$ и лесно се доказва, че $\angle CBN=\angle CAE$. Тогава от CA=CB следва, че $\Delta ACE\cong\Delta BCN$, т.е.CE=CN. Тъй като по условие CE=CD, то CD=CN. В трапеца KBND точка C е среда на DN и CL II BN. Следователно L е среда на BK, т.е.KL=LB.



Задача 3.(7 точки) Последователно получаваме $10y+10x=xy\Leftrightarrow xy-10x-10y=0\Leftrightarrow x(y-10)-10(y-10)=100\Leftrightarrow(x-10)(y-10)=100$. Предвид x и y естествени числа, възможностите за x-10 са 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100, а съответните за y-10 са 100, 50, 25, 20, 10, 5, 4, 2 и 1. Следователно търсеният брой наредени двойки е 9 и те са : (11,110) ; (110,11) ; (12,60); (60,12); (14,35); (35,14); (15,30); (30,15); (20,20).

1 зад. сп."Математика", бр.6, 2002г., стр.40.
2 зад. сп."Математика", бр.6, 2002г., стр.32.
3 зад. сп."Математика", бр.4, 2003г., стр. 29.

КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9.КЛАС

Задача 1. (6 точки)Означаваме A=x+3 и B=$\left(\frac{x}{x^3-0{,}125}+\frac{1}{x^2+2{,}5x-1{,}5}-\frac{2}{x^2+0{,}5x+0{,}25}\right)$.

Като вземем предвид, че $x^3-0{,}125=(x-0{,}5).(x^2+0{,}5x-0{,}25)$ и $x^2+2{,}5x-1{,}5=$ $(x-0{,}5)(x+3)$, уравнението B се преобразува до еквивалентното уравнение

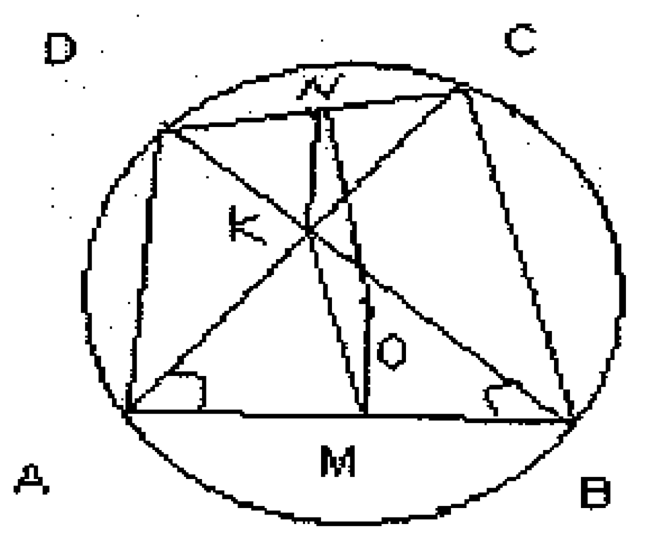
$x(x+3)+x^2+0{,}5x+0{,}25=2(x^2+2{,}5x-1{,}5)$ при $x\neq 0{,}5$ и $x\neq -3$, откъдето намираме $x=\frac{13}{6}$.

От x+3=0 получаваме x = -3 за решение на A, което не е допустима стойност на x в даденото уравнение.

Решение на уравнението A.B=0 е $x=\frac{13}{6}$.

Задача 2.а/(3 точки)Понеже $\angle AKB=90^0$, то M и N са средите съответно на AB и CD. Тогава $\angle OMK=\angle ONK=10^0$ и $\angle MON=\angle MKN=170^0$. Следователно OMKN е успоредник.

б/(4 точки /при доказване на твърдението без да се използва $\angle KAB=50^0$ от а/ усл./) Правите NK и OM са успоредни ($\angle MKN=90^0+2\angle ABK$, $\angle OMK=180^0-2\angle ABK-90^0$ и $\angle MKN+\angle OMK=180^0$), но $OM\perp AB$, следователно $KN\perp AB$.



Задача 3.(7 точки)Имаме $\sqrt{2+\sqrt3}=\sqrt{\frac32}+\sqrt{\frac12}$, $\sqrt{2-\sqrt3}=\sqrt{\frac32}-\sqrt{\frac12}$. Тогава

$$\frac{2+\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}=\frac{\left(\sqrt{\frac32}+\sqrt{\frac12}\right)^2}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}=\frac{(1+\sqrt3)^2\sqrt2}{2.(3+\sqrt3)}=\frac{(1+\sqrt3)^2\sqrt2}{2\sqrt3(1+\sqrt3)}=\frac{1+\sqrt3}{\sqrt6}.$$

Аналогично получаваме $\frac{2-\sqrt3}{\sqrt2-\sqrt{2-\sqrt3}}=\frac{\sqrt3-1}{\sqrt6}$. Като заместим получаваме

$$\left(\frac{2+\sqrt3}{\sqrt2+\sqrt{2+\sqrt3}}+\frac{2-\sqrt3}{\sqrt2-\sqrt{2-\sqrt3}}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt3}{\sqrt6}+\frac{\sqrt3-1}{\sqrt6}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt3}{\sqrt6}\right)^2=2.$$

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 10.КЛАС

1 зад.Да се реши неравенството $\left|x^2-8x+15\right|\le\left|15-x^2\right|$.

2 зад. Даден е трапецът ABCD(AB||CD).

а/Нека $\angle DAB=90^0$ и точките M и N са разположени съответно върху бедрата BC и AD така, че $MN\perp BC$.Да се докаже, че триъгълниците AMD и BNC са подобни.

б/Височината CC_1 $(C_1\in AB)$ има дължина а и разделя трапеца на квадрата AC_1CD и триъгълника C_1BC. Радиусите на окръжностите, вписани в триъгълника C_1BC и квадрата AC_1CD се отнасят както 1:3. Да се намери периметърът на триъгълника C_1BC .

3 зад. Да се опрости изразът $\dfrac{\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{4}{3}}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}x^{\frac{5}{6}}+25x^{\frac{2}{3}}}.\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$.

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 11.КЛАС

1 зад.а/Сумата на първите три члена на аритметична прогресия е 27, а сумата на първите й пет члена е 80. На колко от първите членове на прогресията сумата е равна на 486?

б/В аритметична прогресия сумата на първите й k члена е равна на сумата на първите й p члена ($k\neq p$).Да се докаже, че сумата на първите $k+p$ члена на прогресията е равна на нула.

2 зад.В четириъгълника ABCD е вписана окръжност с радиус 2. Ъгъл DAB е прав. Страната AB е равна на 5, страната BC е равна на 6. Да се намери лицето на четириъгълника ABCD.

3 зад. Да се намери сумата

$S=1+2.3+3.7+\ldots+n.(2^n-1)$.

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

1 зад. сп."Математика", бр.1, 2003г., стр.43.
2 зад. а/ сп."Математика", бр.4, 2003г.;
б/ сп."Математика", бр.4, 2003г..
3 зад. сп."Математика", бр.2, 2003г., стр.45.

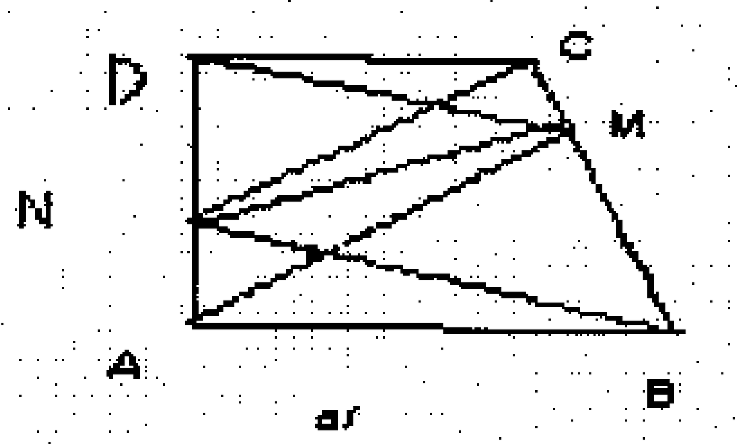
КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 10.КЛАС

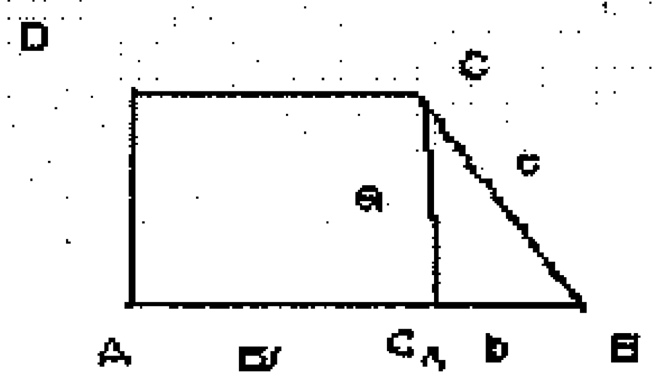
Задача 1.(6 точки)Тъй като двете страни на неравенството са неотрицателни , можем да повдигнем на квадрат и получаваме $\left|x^2-8x+15\right| \le \left|15-x^2\right| \Leftrightarrow$

$(x^2-8x+15)^2 - (15-x^2)^2 \le 0 \Leftrightarrow (x^2-8x+15-(15-x^2)).(x^2-8x+15+(15-x^2)) \le 0 \Leftrightarrow$

$x(x-4)(4x-15) \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{15}{4}\right] \cup [4,\infty)$.

Задача 2.а/(4 точки)Тъй като $\angle NMB = \angle NAB = 90^0$ и $\angle NDC = \angle CMN = 90^0$ около четириъгълниците ABMN и NMCD може да се опише окръжност. Тогава $\angle NAM = \angle NBM$ и $\angle NDM = \angle NCM$. Следователно $\Delta AMD \sim \Delta BNC$.





б/ /(4 точки)Означаваме $C_1B = b$ и BC=c. Радиусът на вписаната в квадрата окръжност е $\frac{a}{2}$, а на вписаната в триъгълника C_1BC - $\frac{a+b-c}{2}$. От условието $\frac{a}{2} = 3.\frac{a+b-c}{2}$ получаваме $c = b + \frac{2}{3}a$. От Питагоровата теорема за ΔC_1BC имаме $c^2 = a^2 + b^2$.

Определяме, че $b = \frac{5}{12}a, c = \frac{13}{12}a$ и следователно периметърът на ΔC_1BC е $p = \frac{5}{2}a$.

Задача 3.(6 точки) Допустимите стойности на израза са x>0.
Преобразуваме израза по следния начин:

$$\frac{\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{4}{3}} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3x + 10\sqrt{3}x^{\frac{5}{6}} + 25x^{\frac{2}{3}}}.\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}} = \frac{(\sqrt{3x^3} - \sqrt{3x}) + (5\sqrt[3]{x^4} - 5\sqrt[3]{x})}{\sqrt{(\sqrt{3x})^2 + 10\sqrt{3x}\sqrt[3]{x} + (5\sqrt[3]{x})^2}\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{3x} + 5\sqrt[3]{x})}{(\sqrt{3x} + 5\sqrt[3]{x})\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}} = \frac{x-1}{\frac{|x-1|}{|x|}} = \frac{(x-1)|x|}{|x-1|}.$$

Следователно $\frac{(x-1)|x|}{|x-1|} = -x$ при $0<x<1$ и $\frac{(x-1)|x|}{|x-1|} = x$ при $x>1$.

1 зад.а/ сп."Математика ", бр.5, 2002 г., стр. 48;

б/ сп."Математика", бр.1, 2002г., стр.55.

2 зад.сп."Математика ", бр.1, 2002г., стр. 52.

3 зад. сп."Математика ", бр.5, 2002 г., стр. 48.

КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 11.КЛАС

Задача 1. а/(3 точки) n=12.

б//(4 точки)Тъй като $k \neq p$, то ако допуснем, че $p > k$, прогресията ще бъде

$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{k+1}, \dots, a_p$ и $S_n = S_p$ или $\frac{2a_1+(k-1)d}{2}k = \frac{2a_1+(p-1)d}{2}p \Leftrightarrow$

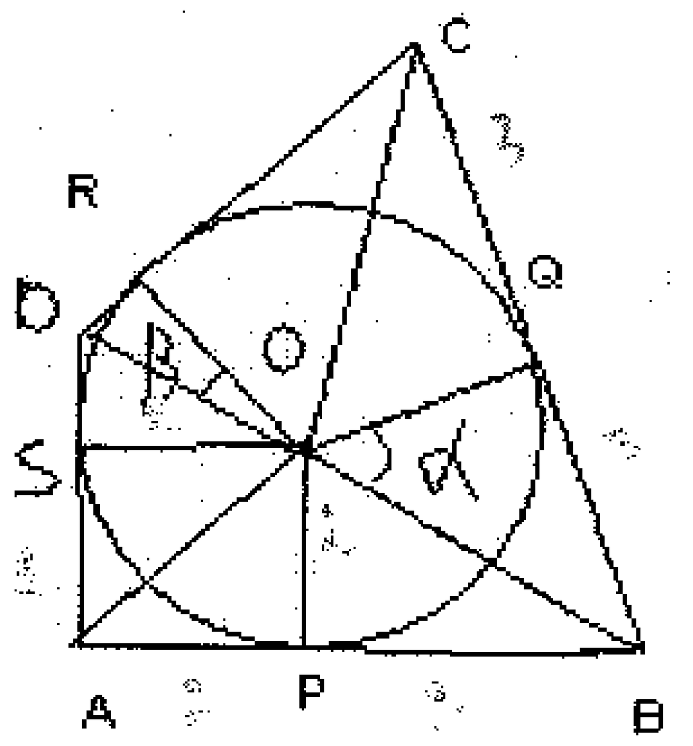
$2a_1k + k(k-1)d = 2a_1p + p(p-1)d \Leftrightarrow 2(k-p)a_1 = (k-p)(-k-p+1)d \Leftrightarrow 2a_1 = (-k-p+1)d$

Тогава $S_{k+p} = \frac{2a_1+(k+p-1)d}{2}(k+p) = \frac{(-k-p+1+k+p-1)d}{2}(k+p) = 0.$

Задача 2.(6 точки)Означаваме с O центъра на вписаната окръжност в четириъгълника ABCD, а допирните й точки със страните AB, BC, CD и DA означаваме съответно с P, Q, R и S. Нека $\angle POB = \alpha$, $\angle SOD = \beta$ и SD = x. Тогава

$$\beta = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} - 4\alpha}{2} = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha, tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2.\frac{3}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{12}{5}, tg\beta = \frac{tg\frac{3\pi}{4} - tg2\alpha}{1+tg\frac{3\pi}{4}.tg2\alpha} = \frac{7}{17},$$

$x = 2tg\beta = \frac{14}{17}$, откъдето $S_{ABCD} = p.r = (2+3+3+x).2 = (8+\frac{14}{17}).2 = 17\frac{11}{17}$.



Задача 3.(7 точки) Представяме сумата във вида

$S = 1+2.3+3.7+\dots+n.(2^n-1) = (1.2-1)+(2.2^2-2)+(3.2^3-3)+\dots+n.2^n - n =$

$(1.2+2.2^2+3.2^3+\dots+n.2^n) - (1+2+3+\dots+n) = S'_n - S_n$, където с S'_n и S_n сме означили сумите в съответните скоби. Пресмятаме тези суми така:

$S'_n = 1.2+2.2^2+3.2^3+\dots+n.2^n \Leftrightarrow \frac{S'_n}{2} = 1+2.2+3.2^2+\dots+n.2^{n-1}$. Тогава

$\frac{S'_n}{2} - S'_n = 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1} - n.2^n \Leftrightarrow -\frac{S'_n}{2} = \frac{1-2^n}{1-2} - n.2^n$ или

$S'_n = 2^{n+1}(n-1)+2$, $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{1+n}{2}n$. Следователно $S = 2^{n+1}(n-1)+2-\frac{1+n}{2}n$.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА - I КРЪГ – 07.03.04 Г.
ТЕМА ЗА 12.КЛАС

1зад. Да се докаже, че

$$tg9^0 - tg27^0 + tg\,81^0 - tg\,63^0 = 4$$

2 зад.Дадена е аритметичната прогресия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, в която $a_3 = -13$, $a_7 = 3$. Да се намери при колко члена на прогресията сумата ѝ е най-малка. Да се намери тази сума.

3 зад. Дадена е правата триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с ръбове $AB=4\sqrt{6}$, AC=6, BC=8 и AA_1=20. През C е построена равнина, чието сечение с призмата е равностранен триъгълник.

а/ Да се пресметне лицето на сечението

б/ Да се пресметне косинусът на ъгъла, който сечението образува с равнината на основата ABC на призмата.

Желаем Ви успешно представяне!
Време за работа-4 часа.

1 зад. сп."Математика плюс", бр.4, 2003г. стр.20.
2 зад. сп."Математика ", бр.6, 2002 г., стр. 41.
3 зад. сп."Математика ", бр.3, 2002 г., стр.23.

КРАТКИ ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 12.КЛАС

Задача 1. (5 точки) $tg9^0 - tg27^0 + tg\,81^0 - tg\,63^0 = tg9^0 + tg\,81^0 - (tg27^0 + tg\,63^0) =$

$tg9 + cotg9^0 - (tg27^0 + cotg27^0) = \frac{\sin 9^0}{\cos 9^0} + \frac{\cos 9^0}{\sin 9^0} - (\frac{\sin 27^0}{\cos 27^0} + \frac{\cos 27^0}{\sin 27^0}) =$

$= \frac{2}{\sin 18^0} - \frac{2}{\sin 54^0} = \frac{2.2\sin 18^0 \cos 36^0}{\sin 18^0 \cos 36^0} = 4.$

Задача 2.(5 точки)От даденото условие лесно се намира, че $a_1 = -21$ и $d=4$. Сумата от първите n члена на прогресията $S_n = \frac{2.a_1 + (n-1)d}{2} n = (2n-23).n$ е квадратна функция относно n. Минимумът на тази функция е в точката $n_0 = \frac{23}{4} \in (5,6)$. Затова трябва да сравним стойностите $S_5 = -65$ и $S_6 = -66$. Тъй като $S_6 < S_5$, то при n=6 сумата й ще бъде най-малката и тя е $S_6 = -66$.

Задача 3.а/(4 точки) Да допуснем, че равнината на сечението пресича само околните стени на призмата $ABCA_1B_1C_1$ и триъгълника MNC е търсеният равностранен триъгълник. Означаваме MN=MC=NC=x и AM=y, BN=z. Прекарваме $NR \perp AA_1$. Точката R е вътрешна за отсечката AM /да се обоснове/. Прилагаме Питагорова теорема за правоъгълните триъгълници MAC, NBC и MNR , откъдето намираме x=10, y= 8, z= 6. От AM=8, BN=6 и AA_1=20 следва, че равнината на сечението не пресича горната основа на призмата и триъгълникът MNC е търсеното сечение с $S_{MNC} = 25\sqrt{3}$.

б/(6 точки)Равнините MNC и ABC образуват двустенен ъгъл, от чийто ръб е известна само точката C. Правата MN от сечението и проекцията й AB в основата се пресичат в точката Q от пресечницата на равнините MNC и ABC, т.е. CQ е ръбът на търсения двустенен ъгъл. Подходяща точка за построяване на линейния ъгъл на двустенния ъгъл е точката N от MNC, защото е известна ортогоналната й проекция B върху ABC. Построяваме $BP \perp CQ$, $P \in CQ$. Тогава $\angle$(MNC, ABC)= $\angle$BPN. От правоъгълния Δ NBP имаме BN=6, а BP е височината в ΔCBQ с BC=8. От ΔAMQ ~ΔBNQ намираме BQ=$12\sqrt{6}$. Ъгълът CBQ е съседен на $\angle$ABC. От ΔABC пресмятаме по косинусова теорема $\cos\angle ABC = \frac{31\sqrt{6}}{96}$, $\cos\angle CBQ = -\cos\angle ABC = -\frac{31\sqrt{6}}{96}$, а $\sin\angle CBQ = \sin\angle ABC = \frac{5\sqrt{138}}{96}$.

Прилагаме косинусовата теорема за страната CQ на ΔCBQ и намираме CQ= $10\sqrt{13}$.Лицето $S_{CBQ} = \frac{BP.CQ}{2} = \frac{BC.BQ.\sin\angle CBQ}{2}$, откъдето получаваме $BP = \frac{3\sqrt{299}}{13}$.

От правоъгълния Δ NBP намираме $PN = \frac{15\sqrt{39}}{13}$ и $\cos\angle BPN = \frac{BP}{PN} = \frac{\sqrt{69}}{15}$.