РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ВРАЦА

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

13.03.05 Г.

IV клас

1 зад. Пресметнете (7923.3 – 12175:5)– (7156+7.428) = ?

(3 точки)

2 зад. На три дървета са кацнали 36 врабчета. Когато от първото дърво прелетели на второто 6 врабчета, а от второто прелетели на третото 4 врабчета, на трите дървета врабчетата станали по равно. Колко врабчета първоначално е имало на всяко дърво?

(4 точки)

3 зад. Един параход изминал по течението на река Дунав 120 км за 4 часа. За колко време параходът ще измине обратно този път, ако скоростта на течението на реката е 3 км в час?

(6 точки)

4 зад. Басейн с размери 24 м и 8 м е ограден от четирите си страни с пътека, която е широка 50 см. Колко кашона плочки са необходими да се застеле пътеката с плочки, ако за застилането на 3 кв.м от нея се използват 6 кашона?

(7 точки)

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ВРАЦА

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

13.03.05 Г.

Указание за проверка

IV клас

1 зад.

(7923.3 – 12175:5) – (7156+7.428) = 21334 – 10152 = 11182

За всяко вярно извършено действие по 0,5 точки, общо **3 точки.**

2 зад.

36:3=12 врабчета на всяко дърво след двете прелитания **(1 точка).** Следователно на първото дърво са били 12+6=18 врабчета **(1 точка),** на третото дърво е имало 12 - 4= 8 врабчета **(1 точка),** а на второто дърво врабчетата са 36 – (18+8)= 10 **(1 точка).**

3 зад.

120 : 4 = 30 км /час – скорост на парахода по течението **(1 точка).**

30 – 3 = 27 км/час - скорост на парахода в неподвижна вода **(2 точки).**

27 – 3 = 24 км/час - скорост на парахода срещу течението **(2 точки).**

120 : 24 = 5 часа са небходими на парахода да измине обратно пътя **(1 точка).**

4 зад.

Площта на пътеката е 25.9 – 24.8 =33 кв.м **(4 точки).**

(33:3).6 = 66 кашона **(3 точки).**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО–ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
V клас

__Зад.1__ а) Да се изчисли 2.А–В, ако А е числената стойност на израза

$$\frac{\left(23\frac{2}{3}-18\frac{1}{6}\right):\frac{11}{4}}{\left(15\frac{3}{10}-13\frac{1}{2}\right):1\frac{4}{5}}-\left(\frac{1}{5\frac{1}{2}-4}-\frac{1}{10\frac{1}{2}-8}\right):\frac{4}{15},$$ а

$$B=\left(1:\frac{2}{3}-\frac{1}{2}:2\frac{3}{5}\right)\frac{13}{17}-0{,}236$$

(5 точки)

б)Намерете всички дроби от вида $M=\frac{\overline{1a5}}{\overline{23bc}}$, които са съкратими на 45. (С $\overline{xyz}$ се означава трицифреното число с цифри x, y и z) **(5 точки)**

__Зад.2__ При всяко изпиране парче плат с форма на правоъгълник се свива, като дължината му се намалява два пъти, а ширината му – с 3 см. След три изпирания парчето плат има лице 6 кв. см. Колко е била първоначалната му дължина, ако в началото парчето плат е имало широчина 10 см? **(5 точки)**

__Зад.3__ Нафтата в един съд е 4/7 от вместимостта му. Прелели 7/10 от тази нафта във втори празен съд.От прелятото количество отлели 5/7 и го прелели в трети празен съд, а 7/10 от нафтата в него прелели в четвърти празен съд. Да се подредят съдовете по количеството нафта в тях.

(5 точки)

Време за работа–4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.

Указание за проверка

V клас

Зад.1 а) Намерена стойност на A=1 **(3 точки)**

Намерена стойност на B=0,764 **(1 точка)**

Изчислено 2.A-B=1,236 **(1 точка)**

б)От условието следва, че c може да бъде 0 или 5**(1 точка)**

От признака за делимост на 9 следва, че $a=3$ **(1 точка)**

От признака за делимост на 9 следва, че $b=4$ или $b=8$ **(1 точка)**

Следователно търсените дроби са $\frac{135}{2340}$ и $\frac{135}{2385}$ **(2 точки)**

Зад.2 Ако x е дължината на плата, то след третото изпиране ще бъде $\frac{x}{8}$ **(3 точки)**, а ширината ще бъде 1 см **(1 точка)**. Тогава x=48 см**(1 точка)**.

Зад.3 Получени за първи съд 6/35 **(1 точка)**

Получен за втори съд 4/35 **(1 точка)**

Получен за трети съд 3/35 **(1 точка)**

Получен четвърти съд 7/35 **(1 точка)**

Подредени по големина **(1 точка)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
VI клас

__Зад.1__ Да се пресметне стойността на израза:

$$|5{,}3-A|-2.|A+4{,}7|-|A|, \text{ за}$$

$$A=\frac{\left(16\frac{1}{6}-21\frac{2}{3}\right):2{,}75}{15{,}3:\left(-1\frac{4}{5}\right)+13\frac{1}{2}:1{,}8}+\left(\frac{1}{1-4\frac{1}{3}}-\frac{4\frac{1}{3}-3}{3}\right):\frac{1}{9}$$

(5 точки)

__Зад.2__ Обемът на правоъгълен паралелепипед е 30 кубически сантиметра, а дължините на ръбовете му се изразяват с различни естествени числа в сантиметри.

а) Да се намерят тези дължини, ако сборът от дължините на всички ръбове се дели на 16.

(5 точки)

б) С колко процента ще се увеличи или ще се намали обема на паралелепипеда, ако размерите на двете по-малки измерения на паралелепипеда се увеличат с 20%, а най- големият - се намали с 20%.

(5 точки)

__Зад. 3__ Да се намери трицифрено число с цифри a, b и c, ако за тях са изпълнени равенствата $\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{3}=\frac{c+a}{4}$.

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.

Указание за проверка
VI клас

<u>Зад.1</u> Намерена стойност на A= –4,7 **(3,5 точки)**

Намерена стойност на израза: 5,3 **(1,5 точки)**

<u>Зад.2</u> а)От V=30 куб.см следват следните четири случая за дължината, ширината и височината:

1см,1см,30см; 1см,2см,15см; 1см,3см,10см; 1см,5 см,6 см.

(4 точки)

Направен извод за правоъгълния паралелепипед с измерения 1см, 5см, 6см, че измеренията са различни и че сборът от дължините на всички ръбове се дели на 16**(1 точки)**

б)Пресметнати размерите на новия паралелепипед: 1,2см;6см;4,8см **(3 точки)**

Намерен обема му: 34,56куб.см. **(0,5 точки)**

Сравнени обемите на двата паралелепипеда и изчислен процент на нарастване (15,2 %) **(1,5 точки)**

<u>Зад.3</u> От свойствата на пропорциите следва, че c+a=2(a+b), 4(b+c)=3(c+a) и 3(a+b)=2(b+c). **(1,5 точки)**

Извод за a=3b /или c=5в, или 5a=3c/ **(1 точка)**

Равенства са изпълнени от тройките числа (0;0;0) и (3;1;5).

(1 точка)

Търсените числа са: 315, 351, 135, 153, 513, 531.

(1,5 точки)

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО–ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
VII клас

<u>Зад.1</u> Да се докаже тъждеството:

$$(a+b+c-d)^2+(a+b-c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(-a+b+c+d)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

(5 точки)

<u>Зад. 2</u> Даден е правоъгълен триъгълник ABC.

а) Нека $\angle C=90^\circ$, $AC<BC$, $CH (H\in AB)$ е височината към AB и CL е ъглополовящата на ъгъл ACB. Върху BC е избрана точка P такава, че BP = CB–CA. Правата AP пресича CH в точка N. Да се намери CN, ако AL =10см.

(5 точки)

б) Нека върху хипотенузата AB е избрана такава точка M, че BM=BC. Върху катета AC е избрана такава точка P, че CP=CH, където CH е височината към хипотенузата. Да се докаже, че ъгъл APM е прав.

(5 точки)

<u>Зад.3</u> Да се докаже, че числото $M=10^{2(k+1)}-2^{k+3}.5^{k+2}+100$ се дели на 8100 за всяко естествено число k.

(5 точки)

Време за работа–4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО–ВРАЦА

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

13.03.05г.

Указание за проверка

VII клас

Зад .1 За извода $(a+b+c-d)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c-d) + (c-d)^2$

(1 точка)

За извода $(a+b-c+d)^2 = (a+b)^2 - 2(a+b)(c-d) + (c-d)^2$

(1 точка)

За извода $(a-b+c+d)^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)(c+d) + (c+d)^2$

(1 точка)

За извода $(-a+b+c+d)^2 = (-a+b)^2 + 2(-a+b)(c+d) + (c+d)^2$

(1 точка)

Доказване на тъждеството. **(1 точка)**

Зад. 2 а) Означаваме пресечната точка на CL и AP с точка O.

Доказано CO=AO=OP **(2,5 точки)**

Доказан $\Delta AOL \cong \Delta CON$ **(1,5 точки)**

Намерена CN=10см. **(1 точка)**

б) Означаваме ъгъл A с α, ъгъл B с β. Извод, че $\alpha + \beta = 90^0$.

(0,5 точки)

Намерени $\angle MCB = \angle CMB = 90^0 - \frac{\beta}{2}$, $\angle HCB = 90^0 - \beta = \alpha$ и $\angle MCH = \frac{\beta}{2}$. **(1,5 точки)**

Намерени $\angle ACH = 90^0 - \alpha = \beta$ и $\angle ACM = \frac{\beta}{2}$. **(1 точка)**

Доказан $\Delta CPM \cong \Delta CHM$. **(1,5 точки)**

Доказан $\angle APM = 90^0$ **(0,5 точки)**

Зад. 3 $M = 10^{2(k+1)} - 2^{k+3}.5^{k+2} + 100 =$

$= 10^2.10^{2k} - 2.2^{k+2}.5^{k+2} + 10^2 = 10^2.10^{2k} - 2.10^{k+2} + 10^2 =$

$10^2.10^{2k} - 2.10^2.10^k + 10^2$ /1*точка*/ $= 10^2(10^{2k} - 2.10^k + 1)$ /1*точка*/ $=$

$= 100(10^k - 1)^2$ /1*точка*/ $= 100.(\underbrace{10.10.10......10}_{k\text{-пъти}} - 1)^2 =$

$= 100.(\underbrace{999...9}_{k\text{-деветки}})^2 = 100.(9.\underbrace{111...1}_{k\text{-единици}})^2 = 100.9^2.(\underbrace{111...1}_{k\text{-единици}})^2$ /1*точка*/ $= 8100.(\underbrace{111...1}_{k\text{-единици}})^2$.

Следователно M се дели на 8100 за всяко естествено число к.

(1 точка)

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
VIII клас

Зад.1 Да се реши уравнението $x|x+1|+2=x-6$

(5 точки)

Зад.2 Нека ABCD е успоредник. Средите на отсечките AB, BC, CD и DA са означени съответно с M, N, P и Q.

а)Продълженията на отсечките BC и DM се пресичат в точка K, а правата през точката B, успоредна на AN, пресича DK в точката L. Да се намери периметърът на триъгълника BLK, ако DM=c , AN=d и AD=b.

(5 точки)

б)Намерете в какво отношение правата CT_1, където T_1 е пресечната точка на AN и BD, дели страната AB.

(5 точки)

Зад. 3 Да се докаже, че ако $abc=1$ и $ab+a+1\neq 0$, то

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.

Указание за проверка

VIII клас

<u>Зад .1</u> При $x \le -1$ имаме уравнението $-x^2-2x+8=0$ /1 **точка**/ с корени -4 и 2 /1 **точка**/; при $x>-1$ се получава уравнението $x^2+8=0$ /1 **точка**/, което няма решение/1 **точка**/. Следователно решение на уравнението е -4 /1 **точка**/.

<u>Зад .2</u> а) Нека E=AN$\cap$MD, R=BP$\cap$AN, T=BP$\cap$CQ, F=DM$\cap$CQ.

Обосноваване на равенствата BC=AD=BK=b, MK=DM=c. /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата FE=TR, ER=TF/ERTF-успоредник/ и LB=ER/LBRE-успоредник/ /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата AE=ER и RB=2ME/ME- средна отсечка в триъгълник ABR/ /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата DF=FE и AE=2FQ/FQ- средна отсечка в триъгълник AED/ /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата CT=TF и DF=2PT/PT- средна отсечка в триъгълник DFC/ /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата RB=TR и TC=2RN/RN-средна отсечка в триъгълник CTB/ /0,5 **точки**/

Обосноваване на равенствата EM=LM=0,2c, LK=0,8c и LB=ER=0,4d. /1,5 **точки**/

Определяне на $P_{KBL}=b+\frac{4}{5}c+\frac{2}{5}d$ =b +0,4d+0,8c /0,5 **точки**/

б) AN -медиана в триъгълник ABC /1 **точка**/

От ABCD успоредник, следва че AO=CO, където O=AC$\cap$BD. /1 **точка**/

Следователно BO- медиана в триъгълник ABC. /1 **точка**/

Следователно T_1-медицентър на триъгълник ABC /1 **точка**/

CT_1 разполовява AB, защото CT_1-медиана в триъгълник ABC/1 **точка**/

<u>Зад.3</u> Разширяваме първата дроб с c /1,5 **точки**/, втората с ac/1,5**точки**/ и получаваме $\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{abc}{c+1+ac}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{ac+1+c}{ac+1+c}=1$ /1 **точка**/ като отчетем, че от $abc=1$ следва, че числата a,b и c са различни от нула и условието $ab+a+1\neq 0$ е равносилно на $ac+c+1\neq 0$ /1 **точка**/.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО–ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
IX клас

Зад. 1. Решете системата

$$\begin{cases}(x+4y)^2-7(x+4y)+10=0\\ x+y^2=1\end{cases}$$

(5 точки)

Зад. 2. За пицария купуват общо 6 kg масло от два вида, разликата в цената за килограм за които е 0,30 лв. Каква е продажната цена на всеки вид масло, ако за едното са заплатили 8,10 лв, за по-скъпото-с 9,18 лв повече, и е ползвана 10% отстъпка от цените като покупка на едро?

(5 точки)

Зад. 3. Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност k с център точката O. Диагоналът AC пресича диагонала DB в точка S. Нека $SM\perp AB$ ($M\in AB$), $SN\perp BC$($N\in BC$), $SP\perp CD$($P\in CD$) и $SQ\perp DA$($Q\in DA$). Да се докаже, че:

а) четириъгълникът MNPQ е описан около окръжност с център точката S **(5 точки)**

б)ако $AC\perp BD$, то четириъгълникът MNPQ е вписан в окръжност с център средата на SO и тази окръжност минава през средите на AB,BC,CD и DA. **(5 точки)**

Време за работа–4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
Указание за проверка
IX клас

Зад.1. Извършване на полагането $x+4y=u$ и решаване на полученото уравнение. **(1 точка)**

Определяне на системите, еквивалентни на дадената система. **(1 точка)**

Вярно определени трите решения на системата: $(-3;2)$, $(-6\pm 4\sqrt{3};2\mp\sqrt{3})$. **(3 точки)**

Зад.2. Намерена цена 9 лв (без отстъпка) за по-евтиното масло **(1 точка)**

Намерена цена 17, 28 лв (с отстъпка) и цена 19,2 лв (без отстъпка) за по-скъпото масло **(1 точка)**

Съставен математически модел- дробното уравнение с DM : $x>0$, където с x kg е означено количеството масло от I вид **(1 точка)**

Еквивалентни преобразувания и получаване на квадратното уравнение $20x^2-88x-9=0$ **(1 точка)**

Решаване на квадратното уравнение, съобразяване с DM на дробното уравнение и получаване на продажните цени 4,50 лв и 4,80 лв за килограм масло от всеки вид **(1 точка)**

Зад.3. **а)** $\angle CAD=\angle CBD=\alpha$(вписани в окръжността през т. A,B,C, D)

$\Leftrightarrow \angle QAS=\angle NBS=\alpha$ **(1 точка)**

$\angle QAS=\angle QMS=\alpha$ (вписани в окръжността през т. Q,A,M,S) **(1 точка)** и

$\angle NBS=\angle NMS=\alpha$ (вписани в окръжността през т. M,B,N,S) **(1 точка)**

$\Rightarrow\angle QMS=\angle NMS=\alpha$, т.е. т.S лежи на ъглополовящата на $\angle QMN$ **(1 точка)**

Аналогично се доказва , че т.S лежи на ъглополовящите на $\angle MQP$, $\angle MNP$ и $\angle NPQ$, с което твърдението е доказано **(1 точка)**

б)Нека точките M_1, N_1, P_1 и Q_1 са среди съответно на AB,BC,CD и AD.

Обосноваване на твърдението $Q_1M_1N_1P_1$-правоъгълник$\Rightarrow$

$Q_1O_1=O_1N_1=P_1O_1=O_1M_1$, където O_1- пресечна точка на диагоналите на този правоъгълник **(1 точка)**

Доказване на твърдението, че височината SQ в правоъгълния триъгълник ASD се явява медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник BCS, т.е. т.S,Q и N_1 лежат на една права.

Аналогично т. Q_1 лежи на правата SN, P_1 – на SM ,M_1-на SP **(2 точки)**

Доказване на твърдението SN_1OQ_1–успоредник , откъдето следва че т.O_1 разполовява SO **(1 точка)**

QO_1-медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник QN_1Q_1 , откъдето следва че $QO_1=Q_1O_1$

Аналогично се доказва, че $O_1N_1=O_1N$, $O_1P_1=O_1P$ и $O_1M_1=O_1M$, с което твърдението е доказано **(1 точка)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
X клас

Зад. 1. Да се решат неравенствата:

а/ $\frac{2}{y} \geq y-1$ **(5 точки)**

б/ $\sqrt{2-\frac{2}{x+1}} < \sqrt{2+\frac{2}{x}}+1$ **(5 точки)**

Зад. 2. Медианата BM и ъглополовящата CL в триъгълника ABC се пресичат в точка P. Да се докаже, че $\frac{CP}{PL}-\frac{AC}{BC}=1$

(5 точки)

Зад. 3. Да се реши уравнението $\sqrt[3]{p+y}+\sqrt{12-y}=6$, където p е произведението на целите стойности на k, за които решенията на уравнението $\frac{4k}{x+1}=3k-5$ са отрицателни.

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
Указание за проверка
X клас

Зад.1.а) Тъждествени преобразувания и получаване на еквивалентното неравенство $\frac{y^2-y-2}{y}\le 0$ **(1 точка)**

Намерени корени на квадратния тричлен **(1 точка)**
Определяне на интервалите върху числовата ос **(1 точка)**
Определяне на знака на дробта в интервалите **(1 точка)**
Получен отговор $y\in(-\infty,-1]\cup(0,2]$ **(1 точка)**

б) Полагаме $y=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}>0$ **(1 точка)** и неравенството добива вида $\frac{y^2-y-2}{y}<0$ **(1 точка)**, решението на което е $y\in(0;2)$ **(1 точка)**. Решението на неравенството $0<\sqrt{\frac{2x}{x+1}}<2$ е $(-\infty;-2)\cup(0;\infty)$ **(2 точки)**.

Зад.2. Построяваме LO($O\in BC$), успоредна на AC, която пресича BM в точка Q **(1 точка)**. От подобността на триъгълниците PCMи PLQ следва $\frac{PM}{PQ}=\frac{MC}{QL}=\frac{PC}{LP}$ **(1 точка)**, а от подобността на ABM и LBQ – $\frac{AM}{LQ}=\frac{MB}{QB}=\frac{AB}{LB}$ **(1 точка)**.

Заместваме с AM=MC **(0,5 точки)** и $\frac{AL}{LB}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\frac{AB}{LB}=\frac{AC+BC}{BC}$ **(1 точка)**, откъдето получаваме търсеното равенство $\frac{CP}{PL}-\frac{AC}{BC}=1$ **(0,5 точки)**.

Зад.3. Определяне на DM на уравнението $\frac{4k}{x+1}=3k-5$: $x\neq 1$ **(0,5 точки)**.

Решаване на това уравнение и получаване на $x=\frac{k+5}{3k-5}$ **(1точка)**, където $k\neq 0$ **(0,5 точки)**

Определени търсените стойности на к: $k\in\{-4,-3,-2,-1,1\}$. **(1 точка)**

Определена стойност на р: р=24 **(0,5 точки)**

Решенията у на даденото уравнение или на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{24+y}=a\\ \sqrt{12-y}=b\\ a+b=6\end{array}\right.$ са

–88; –24; 3 **(1,5 точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО–ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
XI клас

__Зад. 1.__ Сумата на първите n члена на числовата редица a_1, a_2, a_3, ...,a_n,..... е $S_n = 2n^2 + 3n$.

а) докажете, че числовата редица е растяща аритметична прогресия

(5 точки)

б) намерете стойността на параметъра k, за която

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n^2+1}-\sqrt{kS_n+1}}{n+1}=0$$

(5 точки)

__Зад. 2.__ В правоъгълния триъгълник ABC с прав ъгъл ACB са построени височината CH $(H \in AB)$ и ъглополовящата AL $(L \in BC)$. Да се намери лицето на триъгълника ABC, ако $BC=a$ и $\angle BHL = 60°$.

(5 точки)

__Зад. 3.__ В триъгълника ABC е вписан триъгълник PQR (P ∈ AB, Q ∈ BC, R∈ CA). Докажете, че лицето на поне един от триъгълниците APR, BPQ и CRQ не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на триъгълника ABC.

(5 точки)

Време за работа–4 часа

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

13.03.05г.

Указание за проверка

XI клас

Зад.1. **а)** $S_{n-1}=2(n-1)^2+3(n-1)=2n^2-n-1$ **(1 точка)**. Но $S_n=S_{n-1}+a_n \Leftrightarrow a_n=S_n-S_{n-1}=4n+1$ **(1 точка)** $\Rightarrow a_{n-1}=4n-3$ **(1 точка)** $\Rightarrow d=a_n-a_{n-1}=4>0$ **(1 точка)** $\Rightarrow$редицата е растяща аритметична прогресия с първи член $a_1=5$ и $d=4$ **(1 точка)**

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{a_n^2+1}-\sqrt{kS_n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2+8n+2}-\sqrt{2kn^2+3kn+1}}{n+1}$ **(1 точка)**

За изнасяне на множител n^2 пред скоби в изразите под корените **(1 точка)**
За изнасяне на множител n пред корените, като се отчете че $n\in N$ **(1 точка)**
За изнасяне на множител n в числителя и знаменателя **(1 точка)**

Използване на границите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n^2}=0, \kappa - р.число$ и получаване на равенството $4-\sqrt{2k}=0 \Rightarrow k=8$ **(1 точка)**

Зад. 2 Нека $\angle ABC=\beta$ и $LK\perp CH$ и $LM\perp AB$ ($K\in CH$, $M\in AB$) **(1 точка)**

Обосноваване на равенствата HM=KL, LM=CL, $\angle KLC=\beta$ **(1 точка)**

От $\dfrac{HM}{LM}=\dfrac{KL}{LC}$ следва, че $\cos\beta=\cot g60^\circ=\dfrac{\sqrt3}{3}$ **(1 точка)**

Пресмятане на $\sin\beta=\dfrac{\sqrt6}{3}$ и на $AB=a\sqrt3$ **(1 точка)**

Тогава $S_{ABC}=\dfrac{AB.BC}{2}\sin\beta=\dfrac{a^2\sqrt2}{2}$ **(1 точка)**

Зад.3. Означаваме лицата на триъгълниците APR, BQP и CRQ съответно с S_1, S_2 и S_3. Обосноваване на твърденията $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{AP.AR}{AB.AC}, \dfrac{S_2}{S}=\dfrac{BP.BQ}{AB.BC}, \dfrac{S_3}{S}=\dfrac{CR.CQ}{CB.AC}$. **(1 точка)**

Да допуснем, че всички отношения са по-големи от $\dfrac{1}{4}\Rightarrow$

$\dfrac{AP.AR.BP.BQ.CR.CQ}{AB^2.BC^2.AC^2}>\dfrac{1}{64}$ **(1 точка)**

От друга страна, използвайки неравенството между средно геометрично и средноаритметично на две числа, получаваме

$AP.BP\le\dfrac{AB^2}{4}$; $BQ.CQ\le\dfrac{BC^2}{4}$; $CR.AR\le\dfrac{AC^2}{4}$. **(2 точки)**

Следователно $\dfrac{AP.AR.BP.BQ.CR.CQ}{AB^2.BC^2.AC^2}\le\dfrac{1}{64}$ – противоречие, дължащо се на допускането и следователно това твърдение не е вярно, с което задачата е решена. **(1 точка)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.
XII клас

Зад. 1. Дадено е уравнението $x^4-10x^2+a=0$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които уравнението има 4 различни реални корена. Да се намерят стойностите на a, за които корените на уравнението образуват аритметична прогресия

(5 точки)

Зад. 2. В четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основата е ромб със страна 2 и ъгъл A, равен на 60^0. Околният ръб AA_1 има дължина $\sqrt{2}$ и образува с основните ръбове AB и AD остър ъгъл с мярка α. Да се намери :

а) ъгълът между AD_1 и A_1B; **(5 точки)**

б) обемът на призмата и допустимите стойности на α.

(5 точки)

Зад. 3. Решете неравенството $\sqrt{2.3^{x+1}-9^x-5}<\frac{x^2+1}{x}$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
13.03.05г.Δ
Указание за проверка
XII клас

Зад.1. Даденото биквадратно уравнение има 4 различни реални корена точно когато уравнението $y^2-10y+a=0$ има два различни положителни корена y_1 и y_2 **(1 точка).** Това е изпълнено, когато $D=100-4a>0$, $y_1+y_2=10>0$ и $y_1y_2=a>0$. Оттук $a\in(0,25)$ **(1 точка).** Нека $y_1>y_2>0$ и $-\sqrt{y_1}$, $-\sqrt{y_2}$, $\sqrt{y_2}$, $\sqrt{y_1}$ образуват аритметична прогресия $\Rightarrow -\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=-2\sqrt{y_2} \Rightarrow y_1=9y_2$ **(1 точка)** $\Rightarrow y_1=9, y_2=1$ **(1 точка)** $\Rightarrow$ $a=9$ **(1 точка).**

Зад. 2. **а)** Тъй като $D_1C\|A_1B$, то $\angle(AD_1, A_1B)=\angle AD_1C$ **(1 точка)**
От косинусова теорема, приложена за триъгълниците ABC, AA_1B и ADD_1 намираме, че $AC^2=12$ **(1 точка)**, $A_1B^2=D_1C^2=6-4\sqrt{2}\cos\alpha$ **(1 точка)** и $AD_1{}^2=6+4\sqrt{2}\cos\alpha$ **(1 точка).** Тогава $AD_1{}^2+D_1C^2=12=AC^2$ и следователно ΔAD_1C е правоъгълен с $\angle AD_1C=90^0$ **(1 точка).**

б) Нека равнината през BD, перпендикулярна на AA_1, пресича AA_1 в точката P и M е средата на BD. ΔBDPе равнобедрен (PB=PD) и PM е височина. Обемът на дадената призма е 6 пъти по-голям от обема на пирамидата $ABDA_1$, който е $V_{ABDA_1}=\frac{1}{3}S_{BDP}.AA_1=\frac{\sqrt{2}}{3}.PM$. От правоъгълните триъгълници ABP и BMP намираме $PB=2\sin\alpha$ и $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{4\sin^2\alpha-1}$. От $4\sin^2\alpha-1>0 \Leftrightarrow (2\sin\alpha-1)(2\sin\alpha+1)>0$ намираме, че острият ъгъл $\alpha>\frac{\pi}{6}\Rightarrow\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$. Търсеният обем е $V=2\sqrt{2}\sqrt{4\sin^2\alpha-1}$ за $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

Намерен обем $V=2\sqrt{2}\sqrt{4\sin^2\alpha-1}$ **(3 точки)**

Намерени допустими стойности : $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ **(2 точки)**

Зад. 3. Нека $f(x)=x+\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$

Установяване, че $f(x)\geq 2$ за всяко $x>0$

Определяне на минималната стойност на $f(x)$ за $x=1$, т.е. $f_{min}(x)=f(1)=2$ **(2 точки)**

Намиране на DM на $g(x)=\sqrt{2.3.3^x-(3^x)^2-5}$: $x\in(0,\log_3 5)$

Установяване, че $g(x)=\sqrt{4-(3^x-3)^2}\leq 2$ за всяко $x\in DM$

Определяне на максималната стойност на $g(x)$ за $x=1\in DM$, т.е. $g_{max}(x)=g(1)=2$ **(2 точки)**

Извод за решенията на неравенството : всяко $x\neq 1$ от DM на неравенството, т.е. $x\in(0,1)\cup(1,\log_3 5)$ **(1 точка)**