ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

ТЕМА ЗА ЧЕТВЪРТИ КЛАС
25.02.2006 година

1зад. Намерете неизвестното число:

а/ 123.5 + Х = 369:3 + 1 000 - 456

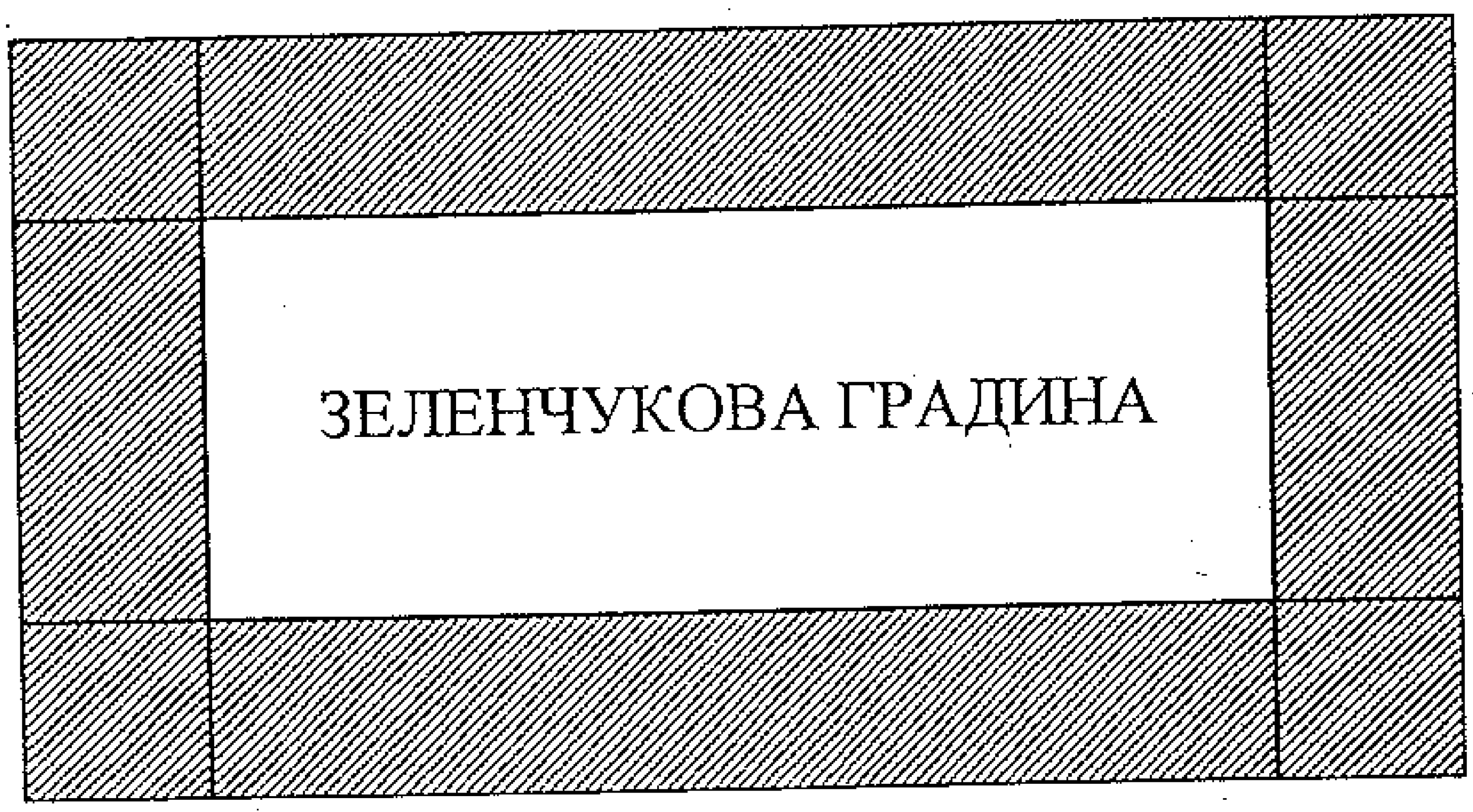
б/ 1 000 – А = 155: 5 + 720 : 8 . 9

в/ У : 4 = /424.2 + 999/ – 1254 : 6

г/ 7747 - /5394 – 295/ = У . / 248 – 984: 4/

2 зад. Намерете най–голямото и най–малкото произведение на трицифрено число, записано с цифрите 3,9 и 5 и двуцифрено число, записано с цифри 1 и 2.

3 зад. Ширината на зеленчукова градина, с форма на правоъгълник, е три пъти по – малка от дължината. При ограждането на градината с пет реда бодлива тел, намираща се на 2 м от засадената площ, се оказало, че лицето на заградения участък е със 128 кв.м по-голямо от лицето на зеленчуковата градина. Колко килограма тежи телта, използвана за оградата, ако 10м от нея тежат 7 килограма и градината има един вход, дълъг 4 метра?



РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

25.02.06г.

Указание за проверка

IV клас

1 зад.

а) Х = 52 **(2 точки)**

б) А = 159 **(2 точки)**

в) У = 6552 **(2 точки)**

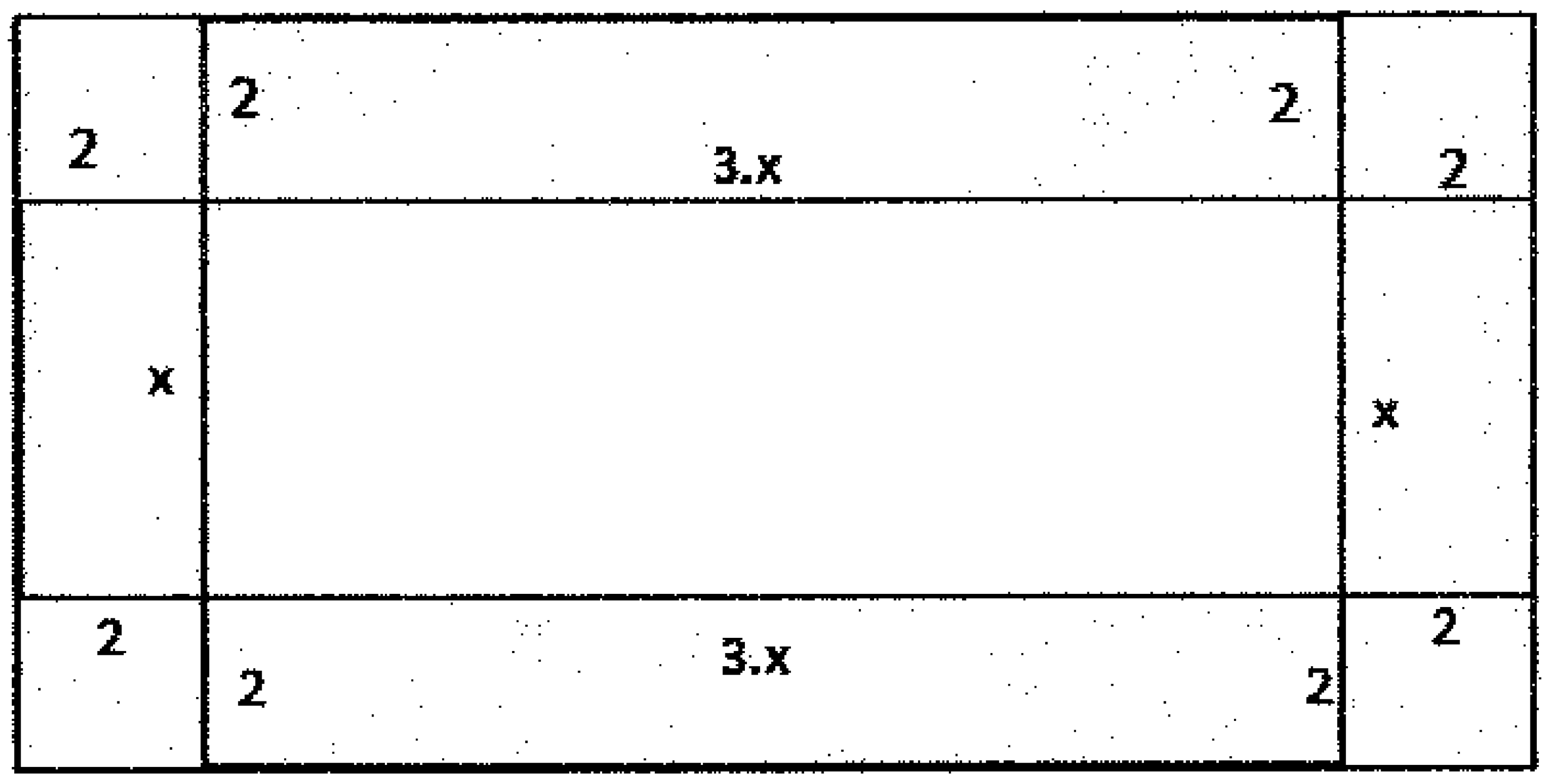
г) У = 1324 **(2 точки)**

2 зад.

953.21 = 20 013 - най-голямото произведение **(1,5 точки)**

359.12 = 4 308 - най-малкото произведение **(1,5 точки)**

3 зад. Съгласно условието



4.(2.2) + 2.(2.3x) +2.(2.x) = 128 **(2 точки)**

$\Rightarrow$x= 7$\Rightarrow$a=7м, b=21м **(1,5 точки)**

Р=2. (7+2+2) + 2.(3.7+2+2)= 72 м **(2 точки)**

(72 – 4).5 = 68.5 = 340 м (тел) **(2 точки)**

(340:10).7 = 238 кг **(1,5 точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
V клас

<u>Зад.1</u> а) Да се пресметнат числените стойности на изразите A и B , ако

$$A=\left(\left(3\frac{2}{3}-\frac{2}{3}.5\right):\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}}-\left(4-4.\frac{2}{3}\right).\frac{1}{20}\right).\frac{240}{91},\ \text{а } B=\frac{80808080}{91919191}.$$

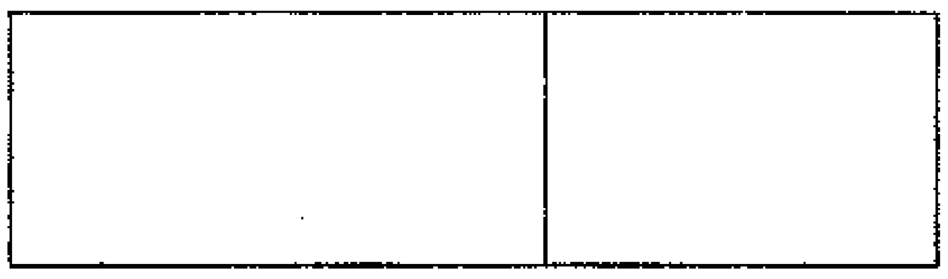
Сравнете по големина числата A, B, $\frac{11}{13}$ и $\frac{12}{13}$.

(6 точки)

<u>Зад.2</u> В една група от 50 момичета има само руси и кестеняви, като всяко от момичетата е със сини или кафяви очи. Да се намери броят на кестенявите с кафяви очи, ако 14 руси момичета са синеоки, кестенявите са 31 и 18 от момичетата са с кафяви очи.

(4 точки)

<u>Зад.3</u> Два правоъгълника имат обща страна и образуват нов правоъгълник, както е показано на чертежа. Обиколките на двата правоъгълника са съответно 70см и 60 см, а обиколката на новия правоъгълник е 100 см.



а) Сравнете обиколката на най-малкия правоъгълник с обиколката на правоъгълник, на който разликата от дължините на съседните му страни е 4 см и дължината на едната му страна е 14 см.

(4 точки)

б) Намерете дължините на страните на трите правоъгълника и броя на квадратчетата със страна 6 см, които могат да се изрежат от най-големия правоъгълник. **(6 точки)**

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка

V клас

Зад.1 а) Намерена стойност на A **(3 точки)**

Намерена стойност на B **(1,5 точки)**

Извод за $\frac{11}{13} < A = B = \frac{80}{91} < \frac{12}{13}$. **(1,5 точки)**

Зад.2 Намерен брой на момичетата с руси коси 50-31=19 **(1,5 точки)**

Намерен брой на момичетата с руси коси и кафяви очи 19- 14=5 **(1,5 точки)**

Намерен брой на момичетата с кестеняви коси и кафяви очи 18-5=13 **(1 точка)**

Зад.3 а) Нека x=14см и x>y $\Rightarrow$ y=14-4=10см и P=48 см<60см **(2 точки)**

Нека x=14см и x<y $\Rightarrow$ y=14+4=18см и P=64 см>60см **(2 точки)**

б) За обиколките на трите правоъгълника имаме

$P_1 = 2(a+b) = 70$ см $\Rightarrow$ a+b=35 см

$P_2 = 2(b+c) = 60$ см $\Rightarrow$ b+c=30 см

$P_3 = 2(a+b+c) = 100$см $\Rightarrow$ a+b+c=50 см

Тогава 35 +c=50см $\Rightarrow$ c=15см $\Rightarrow$ в+15=30 $\Rightarrow$ в=15см $\Rightarrow$ a+15=35 $\Rightarrow$ a=20см.

Правоъгълниците са с размери: (20см,15см) **(1,5 точки)** ; (15см,15см) **(1,5 точки)**; (35см,15см) **(1,5 точки)**.

По-дължината 35см се нанасят най-много 5 отсечки с дължина 6 см, а по ширината - най-много 2 отсечки по 6 см, откъдето следва, че броят на квадратчетата е 5.2=10 **(1,5 точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

25.02.06г.
VI клас

<u>Зад.1</u> Числата а и в са отрицателни. Кое от тях е по-голямо, ако

$$|a| = \left(3:(-2.(-2)+(-5{,}5)) - \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-0{,}5+|-1{,}25|\right)\right):\left(-5\frac{1}{5}\right),$$

$$|в| = \frac{\left(-1+\frac{12}{13}\right)-2.\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(1-1\frac{8}{13}+1\frac{1}{39}\right)}{8+4.\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(|-2|-\left|-2\frac{1}{2}\right|\right)}$$

(5 точки)

<u>Зад.2</u> В ΔABC точка $A_1 \in BC$ и $BA_1 = \frac{1}{6}BC$, точка $B_1 \in CA$, така че $CB_1 = \frac{1}{3}CA$ и C_1 е среда на AB. Нека M е пресечна точка на AA_1 и BB_1, N е пресечна точка на BB_1 и CC_1 и P е пресечна точка на AA_1 и CC_1.

а) Намерете $S_{ABA_1} : S_{BCB_1} : S_{AC_1C}$

(4 точки)

б) Да се докаже, че $S_{MNP} = S_{A_1BM} + S_{B_1CN} + S_{C_1AP}$

(5 точки)

<u>Зад. 3</u> Пътешественик изминал през първия ден 31,5% от целия път; през втория ден изминал 27% от половината път, а изминатите пътища през третия и четвъртия ден се отнасят така, както 1,2:1. Колко километра е маршрутът, ако изминатият път през третия ден е с 3,3 км по-голям от изминатия през втория ден?

(6 точки)

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка
VI клас

Зад.1 Намерена стойността $|a| = \frac{15}{52}$ **(2 точки)**

Намерена стойността $|в| = \frac{8}{39}$ **(2 точки)**

Намерена стойността $а = -\frac{15}{52}$ **(0,25точки)**

Намерена стойността $в= -\frac{8}{39}$ **(0,25 точки)**

Извод а<в, защото $-\frac{45}{156} < -\frac{32}{156}$ **(0,5 точки)**

Зад.2а)$\Delta ABA_1 = \frac{1}{6}S_{ABC}$ **(1точка)**, $\Delta BCB_1 = \frac{1}{3}S_{ABC}$ **(1точка) и** $\Delta AC_1C = \frac{1}{2}S_{ABC}$

(1 точка) $\Rightarrow S_{ABA_1} : S_{BCB_1} : S_{AC_1C} = 1:2:3$ **(1 точка)**

б) $S_{ABA_1} + S_{BCB_1} + S_{AC_1C} - (S_{APC_1} + S_{MBA_1} + S_{NCB_1}) = S_{ABC} - S_{MNP}$ **(3точки)**

Но $S_{ABA_1} + S_{BCB_1} + S_{AC_1C} = S_{ABC}$ (доказано в а/)**(1 точка)**

$\Rightarrow S_{MNP} = S_{A_1BM} + S_{B_1CN} + S_{C_1AP}$ **(1 точка)**

Зад.3 Нека х км е дължината на маршрута(х>0)
Изразяване на изминатия път през първия ден-0,315х**(1 точка)**
Изразяване на изминатия път през втория ден-0,135х**(1 точка)**
Изразяване на изминатия път през третия и четвъртия ден-0,55х **(1 точка)**
Изразяване на изминатия път през третия ден-0,3х **(2 точки)**
Намиране на дължината на маршрута х=20км **(1 точка)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
VII клас

Зад.1 Приведете в нормален вид многочлена

$$A=\left(-\frac{2x}{3}+y\right)^2-\frac{4}{9}.(3y+x)(x-3y)-\left(2x-1\frac{1}{2}.x+y\right)\left(y-\frac{11x}{6}\right)$$

и пресметнете числената му стойност, ако y е най-голямото цяло отрицателно число, а $x=\frac{5.2^8.32^2-3.2^2.8^5}{7.8^3.2^7}.(-1)^{2n+1}$.

(6 точки)

Зад. 2 Даден е остроъгълният ΔABC. Ъглополовящите на $\angle BAC$ и $\angle ABC$ се пресичат в точка O. През точка O са построени права, успоредна на AC, която пресича AB и BC съответно в точките M и N и права, успоредна на BC, която пресича AB и AC съответно в точките P и Q.

а) Намерете дължината на страната AB, ако периметърът на ΔMPO е равен на 8 см **(4 точки)**

б) Ако MN = PQ, докажете, че ΔABC е равнобедрен

(4 точки)

Зад.3 За кои стойности на x и y изразът

$M=6.x^2+y^2+2xy-30x-10y+50$ приема най-малка стойност? Пресметнете най-малката стойност на M.

(6 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка
VII клас

Зад .1 За преобразуване на $\left(-\frac{2x}{3}+y\right)^2$ **(1 точка)**

За преобразуване на $-\frac{4}{9}.(3y+x)(x-3y)$ **(1 точка)**

За преобразуване на $-\left(2x-x.1\frac{1}{2}+y\right)\left(y-\frac{11x}{6}\right)$ **(1 точка)**

За получаване на А$=4y^2+\frac{11}{12}x^2$ **(1 точка)**

Намерена стойността $y=-1$ **(0,5 точки)**
Намерена стойността $x=-2$ **(1 точка)**

Намерена стойността $A=7\frac{2}{3}$ **(0,5 точки)**

Зад. 2 а) $\angle$MAO=$\angle$CAO, защото AO- ъглополовяща
$\angle$MOA=$\angle$CAO (кръстни ъгли) $\Rightarrow$ $\angle$MAO=$\angle$MOA $\Rightarrow$ ΔAMO е равнобедрен и AM=OM. **(1,5 точки)**

Аналогично се доказва, че ΔBPO е равнобедрен и PB=OP. **(1,5 точки)**

AB=AM+MP+PB=OM+MP+OP $\Rightarrow$ AB=P_{MPO}=8см **(1 точка)**

б) Построяваме OT$\perp$ BC(T$\in$BC), OS$\perp$AC(S$\in$AC) и OR$\perp$AB (R$\in$AB)
Доказване на равенството OT=OS=OR **(1 точка)**
Доказване еднаквостта на ΔOQS и ΔONT **(1 точка)**
$\Rightarrow$ OQ=ON и тъй като по условие PQ=MN, то PO=MO, т.е. ΔMOP е равнобедрен и $\angle$OMP=$\angle$OPM. **(1 точки)**
$\angle$OMP=$\angle$CAB и $\angle$OPM=$\angle$CBA като съответни ъгли, откъдето $\angle$CAB = $\angle$CBA $\Rightarrow$$\Delta$ABC е равнобедрен **(1 точка)**

Зад.3 $M=6.x^2+y^2+2xy-30x-10y+50=$
$=.x^2+y^2+25+2xy-10x-10y+5x^2-20x+25=(x+y-5)^2+5(x-2)^2+5\geq 0$
(2 точки) за всяко x и y **(1точка)**. Най-малката стойност е M=5 **(1точка)** при x-2=0, т.е. x=2 **(1точка)** и при x+y-5=0, откъдето за x=2 следва y=3. **(1точка)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
VIII клас

Зад.1 а) Да се реши неравенството $\left|\frac{1}{a}-1\right|-5<0$, където

$$a=\left(\frac{3}{2x^2+2x}-\frac{2x-1}{1-x^2}-\frac{2}{x}\right):\frac{1}{x-1}.$$

(6 точки)

б) Да се докаже, че ако между коефициентите на уравненията $x^2+2px+q=0$ и $x^2+2p_1x+q_1=0$ съществува зависимостта $q+q_1=2pp_1$ и корените на едното уравнение не са реални, то корените на другото са реални.

(4 точки)

Зад.2 Диагоналите на квадрата ABCD се пресичат в точка O. С M и N са означени съответно средите на отсечките OD и BC. Да се определи видът на ΔAMN.

(5 точки)

Зад. 3 Във волейболен турнир взели участие 9 отбора, като всеки два играли помежду си по веднъж. Нека първият отбор има $а_1$ победи и $в_1$ загуби, вторият $а_2$ победи и $в_2$ загуби и т.н., деветият има $а_9$ победи и $в_9$ загуби(във волейбола няма равен резултат). Да се докаже, че

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_9^2=в_1^2+в_2^2+в_3^2+\ldots+в_9^2$$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка

VIII клас

Зад.1 **а)**Определяне на допустимите стойности на x: $x\neq -1,0,1$ **(0,5 точки).**

Опростяване и получаване на $a=\frac{1}{2x}$ **(3 точки)**

Намиране решенията на неравенството $|2x-1|<5$: $-2<x<3$**(2 точки)**

Но $x\neq -1,0,1$, следователно $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,3)$ **(0,5 точки)**

б) Определяне дискриминантата на I-то уравнение $D=p^2-q$ **(0,5 точки)**

Определяне дискриминантата на II-то уравнение $D_1=p_1^2-q_1$ **(0,5 точки)** Понеже $q+q_1=2pp_1$, то $D+D_1=p^2-q+p_1^2-q_1=$
$=p^2+p_1^2-(q+q_1)=p^2+p_1^2-2pp_1=(p-p_1)^2\geq 0$, т.е. $D+D_1\geq 0$ **(2 точки)**

Тъй като корените на едното уравнение не са реални, то неговата дискриминанта е отрицателна и понеже $D+D_1\geq 0$, то следователно дискриминантата на другото уравнение е положителна, т.е. корените му са реални. **(1 точка)**

Зад.2 През точка N построяваме NP II CO (PzDB)$\Rightarrow$ NP е средна отсечка в ΔCOB $\Rightarrow NP=\frac{1}{2}OC$ **(1 точка)**. Доказване на равенството MO=NP**(1 точка)**. Доказване на равенството AO=MP **(1 точка)**. Доказване на еднаквостта на ΔAMO и ΔMNP **(0,5 точки)**. Извод за равенствата AM=MN, $\angle MAO=\angle NMP$ и $\angle AMO=\angle MNP$ **(0,5 точки)**. Доказване на равенството $\angle AMN=90^0$ **(0,5 точки)**. Следователно ΔAMN е равнобедрен правоъгълен триъгълник**(0,5 точки)**.

Зад.3 Всеки два отбора са играли помежду си по веднъж, следователно всеки отбор е играл по 8 мача. Тъй като i-тия отбор е имал $а_i$ победи и $в_i$ загуби, то той е играл общо $а_i+в_i=8$ срещи **(1 точка)**

Тогава $а_1^2-в_1^2+а_2^2-в_2^2+...+а_9^2-в_9^2=$
$=(а_1-в_1)(а_1+в_1)+(а_2-в_2)(а_2+в_2)+...+(а_9-в_9)(а_9+в_9)=$
$=8(а_1-в_1)+8(а_2-в_2)+...+8(а_9-в_9)=8(а_1+а_2+...+а_9-(в_1+в_2+...+в_9))$.

(3 точки).

Понеже във волейбола няма равен резултат, то победата на един отбор е загуба за другия и обратно и следователно броят на всички победи в турнира е равен на броя на всички загуби, т.е. $а_1+а_2+...+а_9-(в_1+в_2+...+в_9)=0$, откъдето получаваме $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_9^2=в_1^2+в_2^2+в_3^2+...+в_9^2$.

(1 точка).

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
IX клас

<u>Зад. 1.</u> а) Опростете дробта $\frac{x^2-2\sqrt{3}x+2}{x^2+4x-2\sqrt{3}}$

(5 точки)

б) За кои стойности на параметъра a за корените x_1 и x_2 на уравнението $ax^2-(a+1)x+1=0$ е изпълнено $4x_1-x_2=1$?

(5 точки)

<u>Зад. 2.</u> От пристанище A към пристанище B по течението на река тръгнали едновременно катер и сал. След като престоял във B 75 min катерът тръгнал обратно и срещнал сала на 12 km от A, а след 45 min пристигнал в A. Да се намерят скоростите на катера(в спокойна вода) и на сала, ако разстоянието между двете пристанища е 24 km.

(5 точки)

<u>Зад. 3.</u> В ΔKLM са прекарани ъглополовящите KN и LP, пресичащи се в точка Q. Ако върхът M лежи на окръжността, която минава през точките N, P и Q, да се намерят ъглите на ΔPNQ и лицето на ΔPNQ, ако $PN=2\sqrt{3}$ cm и QN=2cm.

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ВРАЦА

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

25.02.06г.

Указание за проверка

IX клас

Зад.1. **а)**Пресмятане на D, x_1, x_2 и разлагане на $x^2-2\sqrt{3}x+2$ **(2 точки)**

Пресмятане на D, x_1, x_2 и разлагане на $x^2+4x-2\sqrt{3}$ **(2,5 точки)**

Определяне на $\dfrac{x^2-2\sqrt{3}x+2}{x^2+4x-2\sqrt{3}}=\dfrac{x-\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}+3}$ **(0,5 точки)**

б) a≠0 **(1 точка)**

От равенството $4x_1-x_2=1$ и формулите на Виет определяме търсените стойности на параметъра: a=2 **(2 точки)**; a=$\dfrac{1}{3}$ **(2 точки).**

Зад.2. Нека скоростта на катера в спокойна вода е x km/h (x>0)и скоростта на течението е y km/h(y>0)⇒x+y≠0. Тогава скоростта на сала е y km/h, скоростта на катера по течението е x +y km/h и скоростта на катера срещу течението е x-y km/h(x>y). **(1 точка)**

Съставяне на математически модел -системата
$$\begin{cases} x-y=\dfrac{12}{\frac{3}{4}} \\ \left(\dfrac{24}{x+y}+2\right).y=12 \end{cases}$$
(3 точки)

Определяне на y=4 km/h **(0,5 точки)** и x= 20 km/h **(0,5 точки)**

Зад.3. Нека ∠ LMK=γ ⇒∠KQL=$90^0+\dfrac{\gamma}{2}$ **(0,5 точки)**

За равенството ∠PQN=$180^0-\gamma$ (свойство на вписания четириъгълник PQNM) **(0,5 точки)**

Съставяне и решаване на уравнението$180^0-\gamma=90^0+\dfrac{\gamma}{2}\Leftrightarrow\gamma=60^0$ **(0,5 точки)**

⇒∠PQN=120^0 **(0,5 точки)**

MQ-ъглополовяща⇒∠ PMQ=∠ NMQ=30^0 **(0,5 точки)**

⇒∠ PMQ=∠ QNP=$\dfrac{\overset{\frown}{PQ}}{2}$=$30^0$ **(0,5 точки)** и ∠NMQ=∠QPN=$\dfrac{\overset{\frown}{QN}}{2}$=$30^0$ **(0,5 точки)**

⇒ ΔPNQ е равнобедрен и QN=QP=2 cm **(0,5 точки)**

Намиране на $h_{PN}=\dfrac{1}{2}PQ=1cm$ **(0,5 точки)**⇒ $S_{PNQ}=\dfrac{PN.h_{PN}}{2}=\sqrt{3}cm^2$ **(0,5 точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

25.02.06г.

X клас

Зад. 1. Да се реши неравенството $\dfrac{x^2+5x+4}{-x^4+15x^2+16} \le 0$.

Определете най-голямото и най-малкото цяло решение за всяко от неравенствата $\dfrac{x^2+5x+4}{-x^4+15x^2+16} \ge 0$ и $\dfrac{x^2+5x+4}{-x^4+15x^2+16} > 0$.

(5 точки)

Зад. 2. а) Намерете корените на уравнението $\left|x^2-2x-3\right| = a$, където а е по-голямата от стойностите на изразите A=$\sqrt[5]{\sqrt{57}-5}.\sqrt[5]{\sqrt{57}+5}.\sqrt[3]{8}$ и

B=$\left(1+5^{\frac{3}{4}}\right)\left(1-5^{\frac{3}{4}}\right)+\left(5^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$.

(6 точки)

б) Намерете за кои стойности на x функцията f(x)= $\left|x^2-2x-3\right|$ расте и за кои намалява. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията f(x) в интервала $[-1;2]$. Изследвайте броя на корените на уравнението f(x)=a в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

(6 точки)

Зад. 3. Периметърът на трапеца ABCD е равен на 22 cm, отсечката, свързваща средите на основите AB и CD(AB>CD) има дължина 5 cm, а правите AD и BC са взаимноперпендикулярни. Ако S е лицето на трапеца ABCD, да се докаже, че S=$\dfrac{1}{5}\left(x^3-22x^2+96x\right)$ и 5<x<6, където x е дължината на средната му отсечка.

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка

X клас

Зад.1. Получено решение $(-\infty;-4)\cup(-4;-1]\cup(4;\infty)$ на първото неравенство **(3 точки)**

Определяне на най-голямо цяло решение x=3 и най-малко цяло решение x= -1 на второто неравенство **(1 точка)**

Определяне на най-голямо цяло решение x=3 и най-малко цяло решение x=0 на третото неравенство **(1 точка)**

Зад.2. а) A=4**(1 точка)**, B=1**(1 точка)** $\Rightarrow a=4 \Rightarrow x_{1,2}=1\pm 2\sqrt{2}$, $x_3=1$**(2 точки)**

б) Върхът на параболата x^2-2x-3 е точката с координати $(1;-4)$. **(0,5 точки)**

f(x) намалява за $x\in(-\infty;-1)\cup(1;3)$, расте за $x\in(-1;1)\cup(3;\infty)$ **(2 точки)**

$f_{НГС}$ (x=1) =4, $f_{НМС}$ (x= -1) =0 **(1 точка)**

За a<0 - уравнението няма решения **(0,5 точки)**
За a=0 -уравнението има две решения:-1 и 3 **(0,5 точки)**
За 0<a<4 - уравнението има четири решения **(0,5 точки)**
За a=4 - уравнението има три решения **(0,5 точки)**
За a >4 - уравнението има две решения **(0,5 точки)**

Зад.3. Нека M и N са средите съответно на AB и CD, NKIIAD(KzAB),NLIIBC(LzAB).

Определяне $\angle$ KNL=90 **(0,5 точки)**
Доказване, че KM=ML **(0,5 точки)**
Доказване, че AD+BC=22-2x **(0,5 точки)**
Доказване, че KL=2MN=2.5=10 cm(свойство на медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник) **(0,5 точки)**

Съставяне на системата

$$\left|\begin{array}{l} KN^2+NL^2=KL^2 \\ \mathrm{KN}+\mathrm{NL}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (KN+NL)^2-2KN.NL=10^2 \\ \mathrm{KN}+\mathrm{NL}=22-2x\end{array}\right.$$ **(0,5 точки)**

Определяне на $KN.NL=2x^2-44x+192$ **(0,5 точки)**

$$S_{KNL}=\frac{KN.NL}{2}=\frac{KL.h}{2}\Rightarrow h=\frac{x^2-22x+96}{5}$$ **(0,5 точки)**

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.h=\frac{1}{5}\left(x^3-22x^2+96x\right)$$ **(0,5 точки)**

От AB+CD>AB-CD=KL $\Rightarrow$ x>5 **(0,5 точки)**
От KN+NL>KL $\Rightarrow$ x<6 **(0,5 точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

25.02.06г.

XI клас

Зад. 1. **а)** Страните на триъгълник образуват геометрична прогресия с частно q=1,5. Намерете страните, ако:

а) периметърът на триъгълника е стойността на израза

$$P=\frac{57}{\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\dots\right)}$$

(5 точки)

б) лицето на триъгълника е $\sqrt{1463}\ cm^2$.

(5 точки)

Зад. 2. Да се намерят страните на ΔABC, ако BB_1 и CC_1 са височини в триъгълника и $B_1C_1=\frac{13}{2}$, $S_{AB_1C_1}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$ и $S_{ABC}=30\sqrt{3}$.

(5 точки)

Зад. 3. За кои стойности на реалния параметър а уравнението $a.2^x+2^{-x}=5$ има единствен корен?

(5 точки)

Време за работа-4 часа

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
Указание за проверка
XI клас

Зад.1. а) Пресмятане на периметъра P=19 **(2 точки)**

Съставяне и решаване на уравнението $a+\frac{3}{2}a+\frac{9}{4}a=19$, където а е една от страните на триъгълника. **(2 точки)**

Намиране на страните на триъгълника: 4 cm, 6 cm, 9 cm. **(1 точка)**

б) Пресмятане стойността на полупериметъра $p=\frac{1}{2}.(a+\frac{3}{2}a+\frac{9}{4}a)=\frac{19}{8}a$ **(2 точки)**

Съставяне и решаване на уравнението $S=\sqrt{p(p-a)(p-1{,}5a)(p-2{,}25a)}=\sqrt{1463}$, където а е една от страните на триъгълника. **(2 точки)**

Намиране на страните на триъгълника: 8 cm, 12 cm, 18 cm. **(1 точка)**

Зад. 2 Доказване подобието на ΔACC_1 и ΔABB_1 и подобието на ΔAC_1B_1 и ΔABC **(0,5точки)**

$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}}=\left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2=k^2 \Rightarrow BC=13cm$ и $k=\frac{1}{2}$ (k-коефициент на подобието) **(0,5точки)**

$\frac{AC_1}{AC}=\cos\alpha=k=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=\angle A=60^0$ **(0,5точки)**

Съгласно косинусовата теорема $13^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^0\,(AB=c, AC=b)$ **(0,5точки)**

$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin 60^0=30\sqrt{3}\Rightarrow bc=120$ **(0,5точки)**

Решаване на системата $\left|\begin{array}{l} bc=120 \\ b^2+c^2-bc=169 \end{array}\right.$ и получаване на b=8 или b=15, c=15 или c=8 **(2 точки)**

Следователно BC=13, AC=8, AB=15 или BC=13, AC=15, AB=8 **(0,5точки)**

Зад.3. (1)a=0 $\Rightarrow$ x= $-\log_2 5$ **(1 точка)**

$a\neq 0 \Rightarrow a.2^x+2^{-x}=5 \Leftrightarrow ay^2-5y+1=0$, където $y=2^x>0$ **(0,5точки)**

Условието на задачата е изпълнено ако:

(2)D>0, $y_1>0$, $y_2<0$ или (3)D=0, $y_1=y_2>0$ или (4)D>0, $y_1=0$, $y_2>0$

(2)D>0, $y_1>0$, $y_2<0 \Leftrightarrow a\in(-\infty,0)$ **(1 точка)**

(3)D=0, $y_1=y_2>0 \Leftrightarrow a=\frac{25}{4}$ **(1 точка)**

(4)D>0, $y_1=0$, $y_2>0 \Leftrightarrow a\in\varnothing$ **(1 точка)**

От (1),(2),(3) и (4) $\Rightarrow$ $a\in(-\infty,0]\cup\left\{\frac{25}{4}\right\}$ **(0,5точки)**

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.
XII клас

Зад. 1. Решете неравенството $\log_4\left(5-3^x\right).\log_2\dfrac{5-3^x}{8} \geq -1$

(5 точки)

Зад. 2. В правилна триъгълна пирамида SABC с връх S е прекарана височината SD и върху нея е взета точка K, така че SK: KD=1: 2. Разстоянието от точката K до околен ръб е $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Ако двустенните ъгли между равнината на основата и околните стени са равни на $\dfrac{\pi}{6}$, да се намери :

а) околният ръб на пирамидата;

(7 точки)

б) обемът на пирамидата.

(3 точки)

Зад. 3. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $\sin 2x - 2\sqrt{2}\,a(\sin x - \cos x) + 1 - 4a = 0$ има решение в интервала $[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}]$

(5 точки)

Време за работа-4 часа.

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
25.02.06г.

Указание за проверка
XII клас

Зад.1. Определяне на DM : $x \in (-\infty; \log_3 5)$ **(1 точка)**

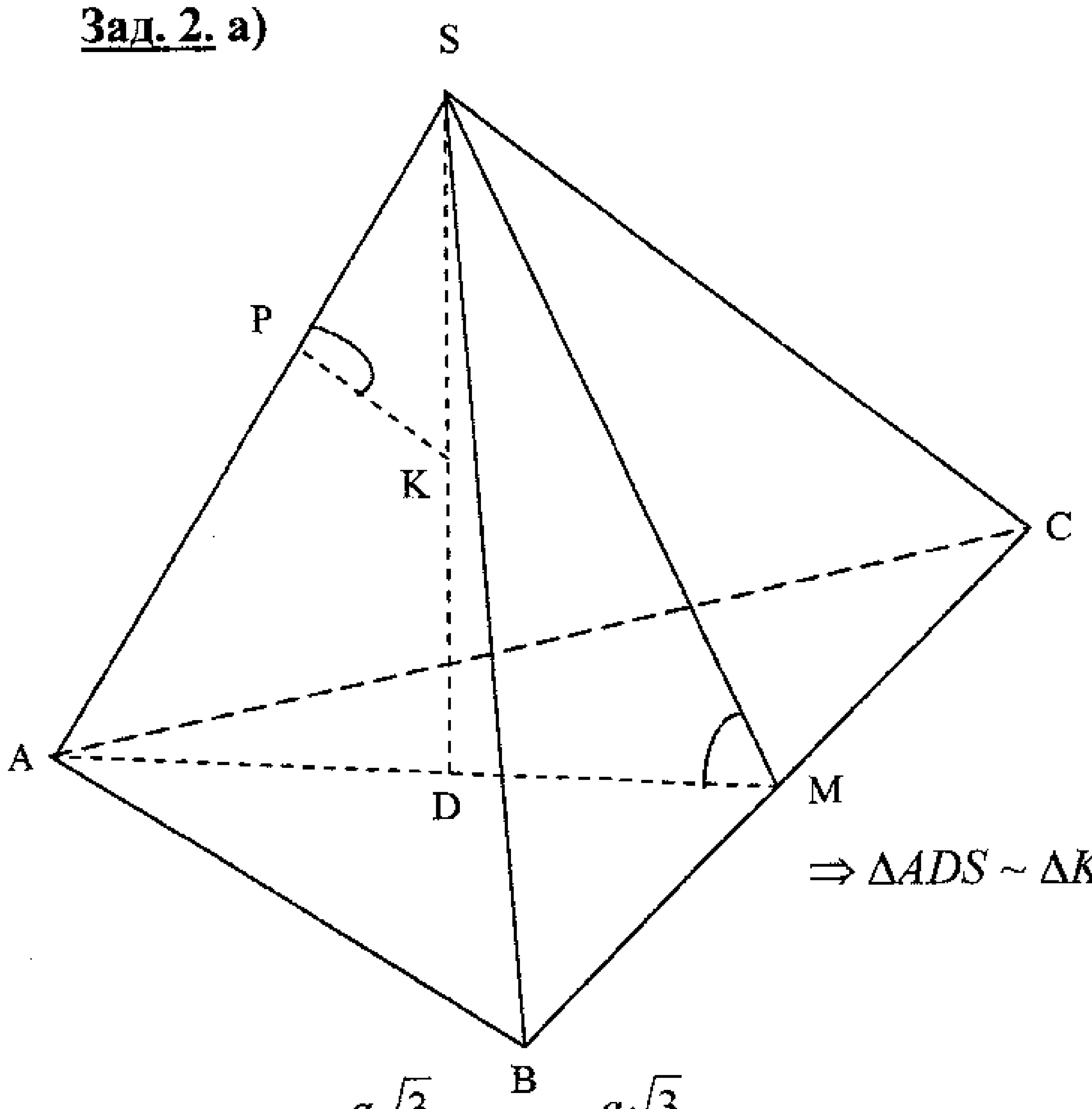
Полагане $\log_2(5-3^x) = y$ и получаване решенията $y \le 1$ или $y \ge 2$ на квадратното неравенство $y^2 - 3y + 2 \ge 0$ **(1точка)**

Решаване на неравенството $\log_2(5-3^x) \le 1$ **(1точка)**

Решаване на неравенството $\log_2(5-3^x) \ge 2$ **(1 точка)**

Получаване на отговора $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \log_3 5)$ **(1 точка)**

Зад. 2. а)



SABC – правилна пирамида
D – ортогонална проекция на S върху ABC.
$D \in AM \perp BC \Rightarrow DM \perp BC$
SM се проектира ортогонално в DM

$\Rightarrow SM \perp BC \Rightarrow \angle DMS = \angle((ABC);(BCS)) = \frac{\pi}{6}$

(1точка)

$\frac{SK}{KD} = \frac{1}{2}$ и $KP \perp AS$

$\Rightarrow \Delta ADS \sim \Delta KPS \Rightarrow \frac{SK}{AS} = \frac{PK}{AD} = \frac{PS}{SD}$ **(1точка)**

$SK = \frac{1}{3}h$ **(0,5точки)**

AB=a; $AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $DM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ **(1точка)** $\Rightarrow h = DM.tg\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{6}$ **(1точка)**

От правоъгълния ΔADS получаваме $l = \frac{a\sqrt{13}}{6}$ (Питагорова теорема) **(0,5точки)**

$\frac{\frac{1}{3}h}{AS} = \frac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}.\frac{a}{6}}{l} = \frac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$ и $l = \frac{a\sqrt{13}}{6} \Rightarrow a = 12\sqrt{3}$ **(1точка)** $\Rightarrow l = \sqrt{39}$ **(1точка)**

б) Определяне на лицето на основата $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}$ **(2точки)**

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Bh = 216$ **(1точка)**

Зад. 3. Полагаме sinx-cosx=t $\Rightarrow$ sin2x=1-t^2 $\Rightarrow$ sin2x-2$\sqrt{2}$ a(sinx–cosx)+1-4a= 0 $\Leftrightarrow$ $t^2 + 2\sqrt{2}at + 4a - 2 = 0$. **(1точка)**

От sinx-cosx=t $\Rightarrow$ $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **(1точка)**

$x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow t \in [0;1]$. **(1точка)**

Пресмятане на D=2(a-1)^2 за уравнението $t^2 + 2\sqrt{2}at + 4a - 2 = 0$ **(0,5 точки)**

a=1 $\Rightarrow$ D=0 и $t_1 = t_2 = -\sqrt{2} \notin [0,1]$ **(0,5 точки)**

a≠1 $\Rightarrow$ $t_1 = -\sqrt{2} \notin [0,1]$ или $t_2 = \sqrt{2}(1-2a) \in [0,1] \Leftrightarrow a \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{2}\right]$ **(1точка)**