**Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца**
**ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643**

# ОБЩИНСКИ КРЪГ НА НАЦИОНАЛНАТА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

**18.03.2007 г.**

## IV клас

**1 зад.**

а) Поставете по подходящ начин скоби в израза **5.12 + 42 : 6 – 3** така, че да се получи 14.

**(2 точки)**

б) Ако *a* е неизвестното число от равенството $(80 - a) : 9 = 1023.0 + 8$,

да се пресметне числото $14.a + 6000 : (a - 5) + (93.a - 700)$.

**(7 точки)**

**2 зад.** Намислих число. Увеличих го с 33. Полученият сбор увеличих 3 пъти. Полученото произведение намалих 7 пъти и полученото частно намалих с 11. Получих 7.

Кое число съм намислил?

**(2 точки)**

**3 зад.** Обиколката на правоъгълно помещение е 56 м. Дължината е с 10 м е по-голяма от ширината. Помещението било разделено на две части – едната с формата на квадрат, а другата с формата на правоъгълник. Подът на квадратната част е покрит с бели теракотни плочки, а на правоъгълната – с черни. По колко пакета от всеки вид плочки са използвани, ако за покриването на 3 кв.м са необходими два пакета плочки?

**(9 точки)**

## V клас

**Зад.1** **а)**Пресметнете рационално стойността ***a*** на израза

45,12.9 −45,12.8 + 45,12.7 − 45,12.6 + 45,12.5 − 45,12.4 + 45,12.3 −45,12.2 +45,12.

**(2 точки)**

**б)**Намерете неизвестните числа $x$ и $y$ и частното на числата $a$ и $x + y$, ако

$$(3{,}91 + 4{,}65) : y = 0{,}8 \text{ и } (102 - 2.0{,}5) - x = 74{,}1.$$

**(4 точки)**

**Зад.2** Обиколката на квадратен земен участък е 1120 метра. Десетинката на този участък е зеленчукова градина с форма на правоъгълник, на който едната страна съвпада със страната на квадрата. Зеленчуковата градина е заградена с дъски, а останалите три страни на земния участък – с мрежа.

Колко дъски са употребени за ограждането, ако за един линеен метър са необходими 7 броя дъски? С колко метра дължината на мрежата е по-голяма от половин километър? Ако четвъртинката на зеленчуковата градина е засадена със краставици, то с колко квадратни метра тази площ е по-голяма от 1 декар?

**( 8 точки)**

**Зад.3** Вървях по горска пътека със скорост *1,5 м/сек*. Когато до полянката останаха *200* метра, от там изскочи заек и се понесе право срещу мен. След *0,2* минути, когато заекът се намираше на *80* метра от мен, той тръгна по странична пътека. С каква скорост се е движил заекът?

**(6 точки)**

---

## VI клас

**Зад.1** **а)** Покажете, че стойността на израза

$$C=\left(\left(-\frac{7}{9}+\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0{,}106-0{,}356)\right).(-1{,}6)-\frac{19}{25}$$ е естествено число.

**(4 точки)**

**б)** Дробта $\frac{a}{b}$ е правилна и $\frac{a}{b}>0$. Дробите $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ са изобразени върху числовата ос с точките А и В. Коя от тези точки е по-близо да точката М, която е образ на числото 1?

**(4 точки)**

**Зад.2** Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1 м е разрязан на два правоъгълни паралелепипеда по такъв начин, че лицето на повърхнината на единия от тези паралелепипеди е два пъти по-малко от лицето на повърхнината на куба. Намерете колко пъти обемът на този паралелепипед е по-малък от обема на куба и лицето на повърхнината на другия паралелепипед. Точка М от ръба $CC_1$ на куба преди разрязването е такава, че отсечката CM е с 20 см по-къса от отсечката $MC_1$. Намерете отношението на обемите на пирамидите ABCDM и $B_1C_1D_1M$.

**(6точки)**

**Зад. 3** Пешеходец се движи по тесен мост. Когато е изминал $\frac{3}{8}$ от дължината на моста, той чува в гръб клаксон на автомобил. Ако пешеходецът се затича обратно, ще срещне автомобила в началото на моста, а ако се затича напред – автомобилът ще го настигне на края на моста. С каква скорост тича пешеходецът, ако автомобилът се движи с постоянна скорост 60 км/ч ?

**(6точки)**

## VII клас

**Зад.1** **а)** Разложете на множители многочлена

$$\frac{1}{3}ay^2-\frac{1}{2}by^2+\frac{4}{3}ay-\frac{5}{3}a-2by+\frac{5}{2}b.$$

**(4 точки)**

**б)** Дадени са изразите $A=x^2-4x-5$ и $B=\dfrac{810^{502}}{(-100)^{251}.3^{2006}}$.

Да се докаже, че $A\geq B$ за всяко x.

**(4 точки)**

**Зад. 2** Даден е четириъгълникът ABCD. Диагоналите AC и BD се пресичат в точката T, а продълженията на страните AB и CD – в точката S.

Да се докаже, че ако $\angle BAD=\angle CDA=60^0$ и $\angle DAC=\angle BDC$, то AC=BD, AB + CD = AD и $\angle ATB=\angle ASD$.

**(6 точки)**

**Зад.3** В тото"5 от 35" били изтеглени последователно пет числа. Първото било 1,5 пъти по-голямо от второто и $23\frac{1}{13}\%$ от сбора на третото и четвъртото, които се отнасяли както 7:6. Петото било с 10% по-малко от второто, а сборът на всички числа се оказал 99. С кои числа е печелившият фиш?

**(6 точки)**

## VIII клас

**Зад.1** **а)** Докажете тъждеството

$$(2a)^3\left(\frac{a-2}{a^3+8}:\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+4}\right)^2=\left(1+\frac{2}{a-2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{a+2}\right)^2.$$

**(4 точки )**

**б)** Сравнете числата A и B, където

$$A=\left(\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\right).\frac{42}{8-5\sqrt{10}} \quad \text{и} \quad B=5\sqrt{2.\left(\sqrt{2}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)}$$

**(4 точки )**

**Зад.2** В правоъгълен $\Delta ABC$ ($\angle C=90^0$) CD е височина ($D\in AB$). Ъглополовящите на $\angle CAB$ и $\angle BCD$ се пресичат в точка M, а ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle ACD$- в точка N. Да се докаже, че правата MN е успоредна на AB и минава през средите на катетите AC и BC.

**( 6 точки )**

**Зад. 3** Даден е многочленът $A=2x^4-9x^3+9x^2$.

Да се докаже, че A се дели на многочлена $2x-3$ при $x\neq\frac{3}{2}$.

Да се намери най-малката стойност на A, ако $x$ е естествено число.
За кои естествени числа $x$ многочленът приема стойност 11900?

**( 6 точки)**

## IX клас

**Зад. 1.** Да се опрости изразът $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

**(6 точки)**

**Зад.2.** Дадено е квадратното уравнение $(a^2+1)x^2+(2a^2+a+2)x+a^2+a-1=0$, в което $a$ е реален параметър.

**а)** Да се докаже, че уравнението има два различни реални корена за всяка стойност на параметъра $a$, които не могат да бъдат противоположни числа.

**(4 точки)**

**б)** Нека $x_1$ и $x_2$ са корените на даденото уравнение. Да се намерят всички цели стойности, които може да приема изразът $|x_1-x_2|$.

**(4 точки)**

**Зад. 3.** Да се намери лицето на трапеца ABCD с бедро BC=5, ако разстоянието от върховете A и D до правата BC са съответно 7 и 3.

**(6 точки)**

## X клас

**Зад. 1.** **а)** Да се реши неравенството $\dfrac{3(x-1)(x^2+4x+4)}{(x^2+1)(x+1)(x^2-x-2)}\geq 0$.

**(4 точки)**

**б)** Да се провери числото

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$$

решение ли е на даденото неравенство.

**(3 точки)**

**Зад.2.** Докажете, че за допустимите стойности на параметъра $a$ е изпълнено:

$$\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1}+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\frac{a^{-\frac{7}{12}}}{2}=\log_2\frac{0{,}125\sqrt{2}}{8^{-1}}$$

**(7 точки)**

**Зад. 3.** Дадена е окръжност с център точка O и радиус R и точка M(OM>R). Допирателните от точката M към окръжността я допират в точките A и B. Перпендикулярът от A към диаметъра BD го пресича в точка C. Да се докаже, че правата MD минава през средата на отсечката AC

**(6 точки)**

## XI клас

**Зад. 1.** В намаляваща аритметична прогресия разликата между деветия и четвъртия член е равна на третия член, а сумата от квадратите на първия и втория член е равна на 4. Да се намери сумата на първите двадесет члена на тази прогресия. Да се намери n, ако сумата на прогресията $S_n = -150$.

**(4 точки)**

**Зад. 2.** Безкрайно намаляваща геометрична прогресия съдържа член $b_n = \frac{1}{6}$. Отношението на сумата на членовете на прогресията, намиращи се пред $b_n$, към сумата на членовете, намиращи се след $b_n$, е равно на 6. Да се намери $n$, ако сумата на прогресията е $\frac{3}{4}$.

**(6 точки)**

**Зад. 3.** В трапеца ABCD(AB || CD) точките M, N, P и Q са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA. Известно е, че PQ=3, PM=5 и PN=4.

**а)** Да се намери лицето на трапеца

**(4 точки)**

**б)** Да се намерят дължините на страните на трапеца, ако CD:AB=9:16.

**(6 точки)**

---

## XII клас

**Зад. 1.** **а)** Да се докаже, че за всеки две неотрицателни числа $x$ и $y$ е изпълнено неравенството $x^2y^2 + x + y - 3xy \geq 0$

**(4 точки)**

**б)** Дадена е функцията $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1).x - 1$. Намерете за кои стойности на реалния параметър a е изпълнено $y_{\min} + y_{\max} = 2a^3 + a^2 + 3$, където с $y_{\min}$ и $y_{\max}$ са означени локалните екстремуми на функцията $y=f(x)$.

**(4 точки)**

**Зад. 2.** Ъглите $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ на $\Delta ABC$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $\cos\alpha + tg\beta + \sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$.

**(6 точки)**

**Зад. 3.** Ръбът MA на тетраедъра ABCM е перпендикулярен на основата ABC, $\Delta ABC$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха B и MA=AB=BC=$a$. Ако точките N и P са среди съответно на CM и AB, да се докаже, че NP⊥AB, NP⊥CM и да се намери дължината на NP.

**(6 точки)**

## Указание за проверка

## IV клас

**1 зад.**

а) (5.12 + 42) : 6 – 3 = 14 **(2 точки)**

б) а = 8 **(2,5 точки)**

14. 8 +6000 : (8 – 5) + (93.8 – 700) = 2156 **(4,5 точки)**

**2 зад.** **(2 точки)**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 33 | | .3 | | :7 | | -11 | |
| X=?<br>X=9 | →<br>← | | →<br>← | | →<br>← | | →<br>← | 7 |
| | - 33 | | :3 | | .7 | | +11 | |

**3 зад.**

$a$ = (56 – 2.10): 4 = 9 см **(2 точки)**

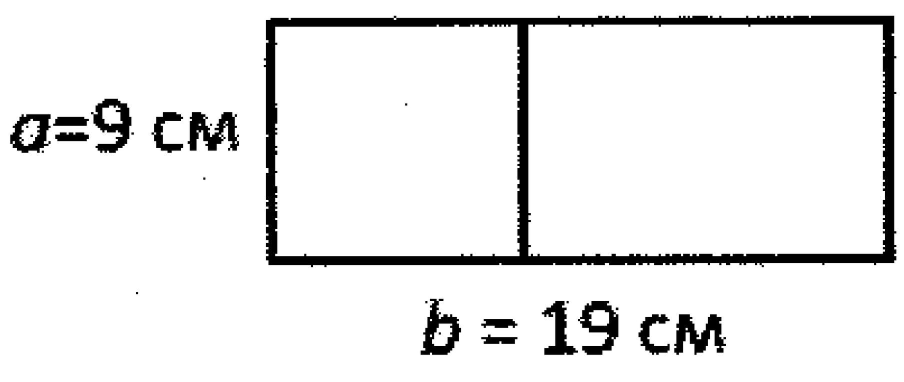
$b$ = 9 + 10 = 19 см **(1 точка)**

$S_{кв..}$ = 9.9 = 81 кв.см **(1 точка)**

$S_{прав..}$ = 10.9 = 90 кв.см **(1 точка)**

(81:3).2 = 54 пакета бели плочки **(2 точки)**

(90:3).2 = 60 пакета черни плочки **(2 точки)**



## Указание за проверка

### V клас

**<u>Зад.1</u>** **а)**Намерена стойност $a = 225{,}6$ по рационален начин**(2точки)**

**б)**Намерени стойности на $x = 26{,}9$ **(1 точка)**, $y = 10{,}7$ **(1 точка)**, $x+y = 37{,}6$**(1 точка)** и $a: (x+y) = 6$ **(1 точка).**

**<u>Зад.2</u>** Намерена страна а=280 м на квадрата **(1 точка)**

Намерена къса страна 28 м на зеленчуковата градина **(0,5 точки)** и разликата а-28=280-28=252 м **(0,5 точки)**.

Намерени обиколка 616 м на участъка за ограждане с дъски**(1 точка)** и брой на дъските 4312**(1 точка)**.

Намерени обиколка 784 м на участъка за ограждане с мрежа**(1 точка)** и разликата 784-500=284 м повече**(0,5 точки)**.

Намерени площта на засадената с краставици част 1960 кв. м **(2 точки)** и разликата 1960-1000=960 кв. м повече**(0,5 точки)**.

**<u>Зад.3</u>** Намерен пътя, изминат от човека за *12 сек. - 18 м***(2 точки)**.

Намерен пътя, изминат от заека за *12 сек - 102 м* **(2 точки)**.

Намерена скоростта на заека - *8,5 м/сек.* **(2 точки)**.

**Указание за проверка**

**VI клас**

**Зад.1 а)** Намерена стойността $C = 1 \in N$/по 0,5 точки за всяко вярно пресметнато действие в израза/ **(4 точки)**

**б)** Разглеждаме дължините на отсечките AM и BM.

$$|AM| = |OM| - |OA| = 1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} (1)$$ **(1 точка)**

$$|BM| = |OB| - |OM| = \frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a} (2)$$ **(1 точка)**

Числителите на дробите (1) и (2) са равни, но $a<b$ /по условие $\frac{a}{b}$ е правилна дроб/**(1 точка)**, откъдето следва, че $\frac{b-a}{a} > \frac{b-a}{b}$, т.е. $|BM| > |AM|$ или точката A е по-близо до точката M**(1 точка)**.

**Зад.2** Намиране $S_k = 6$ кв.м и $V_k = 1$ куб.м **(1 точка)**.

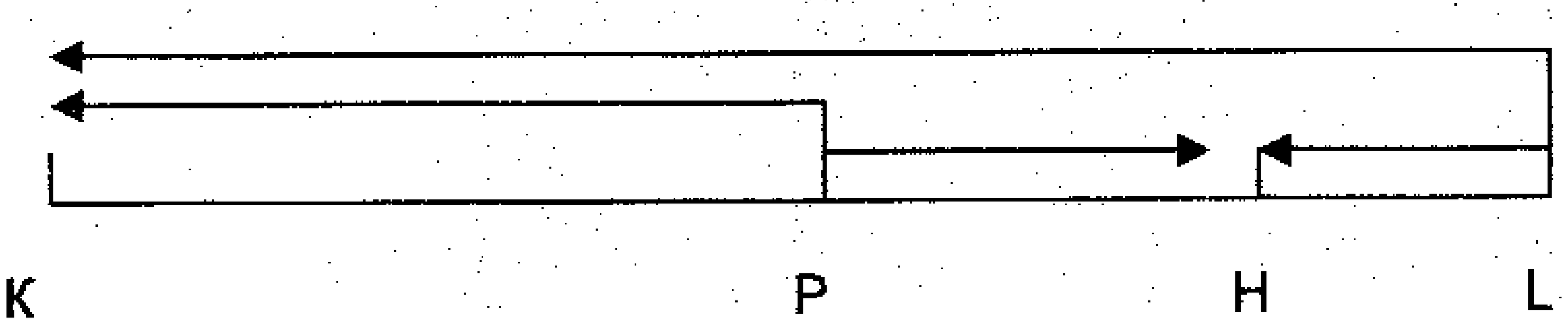
Намиране на $S_n = 4x + 2$ кв.м /x е неизвестният ръб на паралелепипеда след разрязването, останалите две измерения са по 1 м/**(0,5 точки)**.

Съгласно условието $S_n = \frac{S_k}{2} \Rightarrow$ 4x+2=3$\Rightarrow$ x=$\frac{1}{4}$ м=25см$\Rightarrow$ $V_n = \frac{1}{4}$ куб.м **(1 точка)** $\Rightarrow \frac{V_k}{V_n} = 4$ /обемът на паралелепипеда е 4 пъти по-малък от обема на куба/ **(0,5 точки)**.

Намиране неизвестния ръб y= $\frac{3}{4}$ м=75 см и повърхнината на другия паралелепипед $S_n' = 5$кв.м **(1 точка)**.

Намиране на CM=40 см и $MC_1$=60см **(0,5 точки)**.Пресмятане на $V_{MABCD} = \frac{2}{15}$куб.м **(0,5 точки)**. Пресмятане на $V_{MB_1C_1D_1} = \frac{1}{10}$ куб.м **(0,5 точки)**$\Rightarrow \frac{V_{MABCD}}{V_{MB_1C_1D_1}} = \frac{4}{3}$ **(0,5 точки)**.

**Зад.3**




Нека целият мост е 1 и скоростта на пешеходеца е x km/h.

В I сл. $t_{PH} = t_{HL} \Rightarrow \frac{\frac{3}{8}}{x} = \frac{HL}{60} \Rightarrow HL = \frac{180}{8x}$ **(2 точки)**

Във II сл. $t_{PK} = t_{LK} \Rightarrow \frac{\frac{5}{8}}{x} = \frac{KL}{60} \Rightarrow KL = \frac{300}{8x}$ **(2 точки)**

Но $KL - HL = KH = 1 \Leftrightarrow \frac{120}{8x} = 1 = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 15km/h$ **(2 точки)**

**Указание за проверка**
**VII клас**

**Зад .1** **а)** $\frac{1}{3}ay^2-\frac{1}{2}by^2+\frac{4}{3}ay-\frac{5}{3}a-2ab+\frac{5}{2}b=\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right).\left(y^2+4y-5\right)$ **(2точки)=**

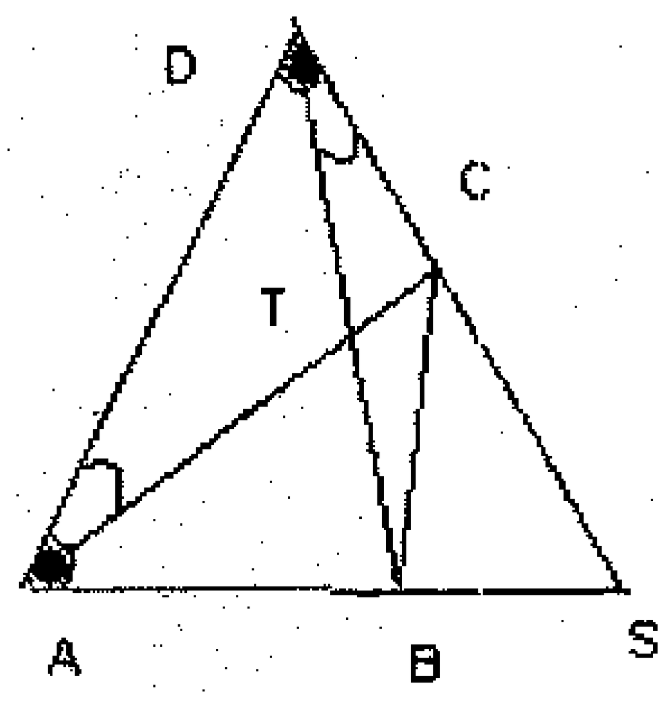
$=\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right).(y+5).(y-1)$ **(2 точки)**

**б)**. Пресмятане стойността на B= $-9$ **(2 точки)**

A≥B за всяко x⇔A-B≥0 за всяко x **(1 точка)**

A-B= $x^2-4x+4=(x-2)^2\Rightarrow$ A-B≥0 за всяко x **(1 точка)**

**Зад. 2**




Правилен чертеж **(0,5 точки)**.

Доказване, че ΔASD-равностранен**(0,5 точки)**.

Пресмятане на $\angle$ATB= $\angle$TAD+ $\angle$ADT=α+(60$^0$−α)==60$^0$ **(0,5 точки)**.

Доказване на равенството $\angle$ ATB = $\angle$ ASD **(0,5 точки)**.

Доказване еднаквостта на ΔACD и ΔDBS по II признак за еднаквост на триъгълници**(2 точки)**.

Извод за равенствата AC=BD и BS=CD**(1 точка)**.

За доказателство на равенството AD=AS=AB+BS=AB+CD **(1 точка)**.

**Зад.3** Означаваме второто число с x ($1\leq x\leq 35$) и изразяваме първото, петото число и сбора на третото и четвъртото число чрез x **(0,5 точки)**.

Изразяване на първото число: 1,5x **(0,5 точки)**.

Изразяване на петото число: 0,9x **(0,5 точки)**.

Изразяване на сбора на третото и четвъртото число: $1{,}5x:\frac{3}{13}=6{,}5x$ **(0,5 точки)**.

Съставен математически модел: 1,5x +x +6,5x+0,9x=99**(1 точка)**.

⇒x=10⇒второто число е 10**(0,5 точки)**, първото число е 15**(0,5 точки)**, а петото число е 9**(0,5 точки)**.

От условието, че третото и четвъртото число се отнасят както 7:6, намираме 7k+6k=65⇒ k=5**(0,5 точки)** ⇒ третото число е 35**(0,5 точки)**, а четвъртото-30**(0,5 точки)**.

**Указание за проверка**
**VIII клас**

**Зад.1** **а)**Определяне на допустимите стойности на а: $a \neq \pm 2$.

Знаменателят $a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 > 0$ за всяко а**(1 точка)**

Доказване на тъждеството

$$(2a)^3\left(\frac{a-2}{a^3+8}:\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+4}\right)^2 = \left(1+\frac{2}{a-2}\right)^2 - \left(1-\frac{2}{a+2}\right)^2$$ **(3 точки).**

**б)** Пресмятане стойността А=7 **(1 точка).**

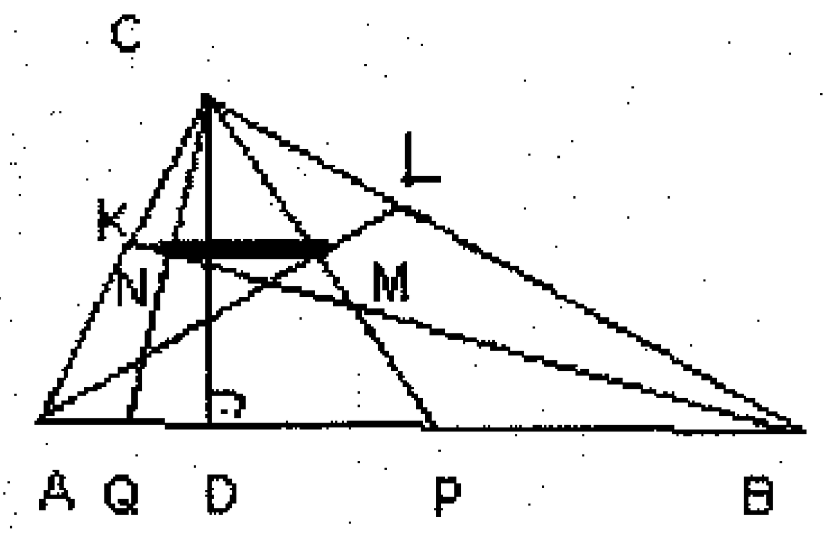
За равенството $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$ **(1 точка).**

Пресмятане $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$ **(1 точка).**

Пресмятане стойността $B=5\sqrt{2}$ **(0,5 точки).**

За извода $B= 5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7 = A$ **(0,5 точки).**

**Зад.2**




Доказване на равенството AP=AC, т.е $\Delta APC$-равнобедрен**(1 точка).**

Доказване на равенството PM=CM, т.е. M-среда на CP**(1 точка).**

Доказване на равенството QB=CB, т.е $\Delta QBC$-равнобедрен**(1 точка).**

Доказване на равенството NQ=NC, т.е. N-среда на CQ**(1 точка).**

MN-средна отсечка в $\Delta QPC \Rightarrow MN \| QP \Rightarrow MN \| AB$**(1 точка)**

$\Rightarrow$MN минава през средите на катетите AC и BC**(1 точка).**

**Зад.3** Намиране на корените на уравнението А=0: $x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 3$ **(1 точка).**

$$A = x^2.(2x^2 - 3x - 6x + 9) = x^2.2.(x - \frac{3}{2})(x-3) = x^2(2x-3)(x-3)$$

$\Rightarrow$2x-3 дели А при $x \neq \frac{3}{2}$ **(1точка)**

$\Rightarrow x^2.(2x^2 - 9x + 9) = 100.119 \Rightarrow x = 10$ **(2точки)**

**$x \geq 1$**, но ако x>3 , то A>0**(1 точка).**

Ако x=1, то А= 2

Ако x=2, то А= -4

Ако x=3, то А= 0 $\Rightarrow A_{min} = -4$**(1 точка).**

**Указание за проверка**
**IX клас**

**Зад.1.** $x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x-1)^2 \Rightarrow x\neq 3, x\neq 1$. **(1 точка)**

Ако $x>3 \Rightarrow |x-3|=x-3 \Rightarrow$

M=$\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}.|x-3|=\dfrac{(x-1)^2.(x^2+x+1)}{(x-3).(x-1)^2}.(x-3)=x^2+x+1$ **(2 точки)**

Ако x<3 $\Rightarrow |x-3|=-(x-3)\Rightarrow$

M=$\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}.|x-3|=\dfrac{(x-1)^2.(x^2+x+1)}{(x-3).(x-1)^2}.(-(x-3))=-(x^2+x+1)$ **(2 точки)**

$\Rightarrow$ M=$-(x^2+x+1)$ при $x\in(-\infty,1)\cup(1,3)$ и M=$(x^2+x+1)$ при $x\in(3,+\infty)$.

**(1 точка)**

**Зад.2.** а) $a^2+1\neq 0$, защото $a^2+1>0$ за всяко $a$ **(1 точка)**

D=$9a^2+8>0$ за всяко $a$, откъдето следва, че уравнението има два различни реални корена за всяка стойност на $a$

**(2 точки)**

Ако корените са противоположни числа, то $2a^2+a+2=0$, но дискриминантата на това уравнение е отрицателна и то няма реални решения, откъдето следва, че няма стойност на параметъра а, за която корените са противоположни числа.

**( 1 точки )**

б) От $x_1\neq x_2 \Rightarrow |x_1-x_2|>0$

Пресмятаме чрез формулите за корени на квадратното уравнение, че

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{9a^2+8}}{a^2+1}$$ **(1 точка)**

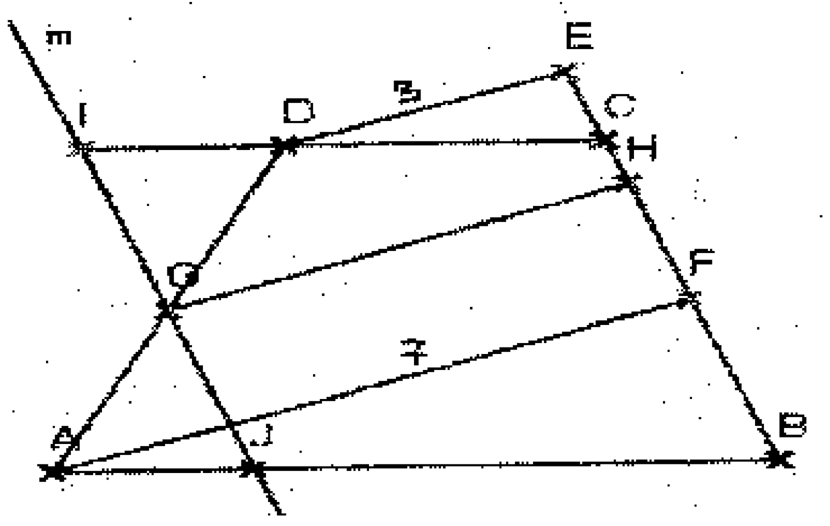
$|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{9a^2+8}}{a^2+1}<\dfrac{\sqrt{9a^2+9}}{a^2+1}=\dfrac{3\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}=\dfrac{3}{\sqrt{a^2+1}}<3$, защото знаменателят на последната дроб е по-голям от 1 $\Rightarrow$ целите стойности, които $|x_1-x_2|$ приема, могат да бъдат само 1 или 2**(2 точки)**. Всяко от уравненията $\dfrac{\sqrt{9a^2+8}}{a^2+1}=2$ и $\dfrac{\sqrt{9a^2+8}}{a^2+1}=1$ има решение относно $a$ и следователно равенствата $|x_1-x_2|=2$ и $|x_1-x_2|=1$ са възможни**(1 точка)**.

**Зад.3.** AF⊥BC(F ∈ BC); DE⊥BC(E ∈ BC);
AG=GD(G ∈ AD);GH⊥BC(H ∈ BC); **(1 точка)**
m||BC,G ∈ m; I=DC ∩ m;J=AB ∩ m**(1точка)**

GH=$\dfrac{AF+DE}{2}=\dfrac{7+3}{2}=5$ (средна основа в трапец) **(1 точка)**

ΔAJG ≅ ΔGDI (II признак) **(1 точка)**

$S_{ABCD}=S_{JBCI}=BC.GH=5.5=25кв.ед.$ **(2 точки)**



**Указание за проверка**

**X клас**

**Зад.1.** а) $\dfrac{3(x-1)(x^2+4x+4)}{(x^2+1)(x+1)(x^2-x-2)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)}\geq 0$ **(1,5 точки)**

Определяне на допустимите стойности $x\neq -1$ и $x\neq 2$ **(1 точка)**

Определяне на решенията на неравенството: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1]\cup(2,+\infty)$

**(1,5 точки)**

**б)** Рационализираме всяка от дробите в знаменателя и получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}=\sqrt{2}-\sqrt{8}=-\sqrt{2}$$

**(2 точки)**

Следователно A е решение на неравенството **(1 точка)**

**Зад.2.** $a-\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a^2}-1\right)=\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a}+1\right)$ **(1 точка).**

$a+\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a}+1\right)$ **(0,5 точки).**

$\left(\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)=\sqrt[3]{a}$ **(1 точка).**

$(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3})\sqrt[4]{a}=\sqrt{a}+a$ **(0,5 точки).**

$(\sqrt{a}+1)(1-\sqrt{a})=1-a$ **(0,5 точки).**

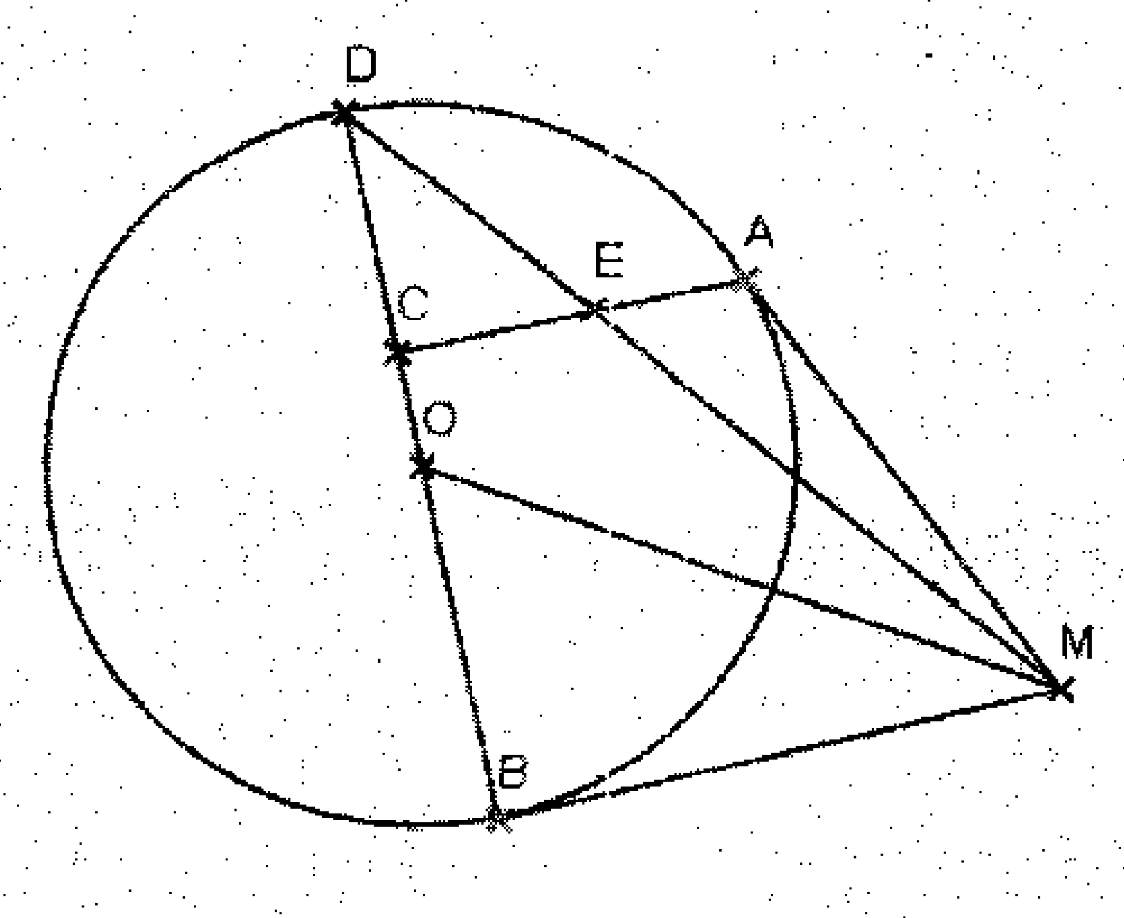
$\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)=\dfrac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}+1)\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(1 точка).**

$\Rightarrow\left(\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right):\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right).\dfrac{a^{-\frac{7}{12}}}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{2\sqrt[12]{a^7}}=\dfrac{1}{2}$ **(1 точка)**, тъй като

$\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^7}$ **(0,5 точки)** и $a^{-\frac{7}{12}}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^7}}$ **(0,5 точки).**

За дясната страна имаме $\log_2\dfrac{0{,}125\sqrt{2}}{8^{-1}}=\dfrac{1}{2}$ **(0,5 точки)**, с което равенството е доказано.

**Зад.3.**




Нека $MD\cap AC=E$.

$\angle CDA=\dfrac{1}{2}\angle BOA=\angle BOM$ **(1точка)**

$\Delta CDE\sim\Delta BDM\Rightarrow\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{BM}{BD}(1)$ **(2 точки).**

$\Delta CDA\sim\Delta BOM\Rightarrow\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{BO}{BM}(2)$ **(2 точки).**

От (1) и (2) следва, че $\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{BO}{BD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AC=2CE\Rightarrow CE=EA$ **(1 точка).**

## Указание за проверка
## XI клас

**Зад.1.** Пресмятане на $a_1 = -\frac{6}{5}, d = -\frac{2}{5}$ за аритметичната прогресия **(2 точки).**

Пресмятане на $S_{20} = -100$ **(1 точка).**

Пресмятане на n=25**(1 точка)**

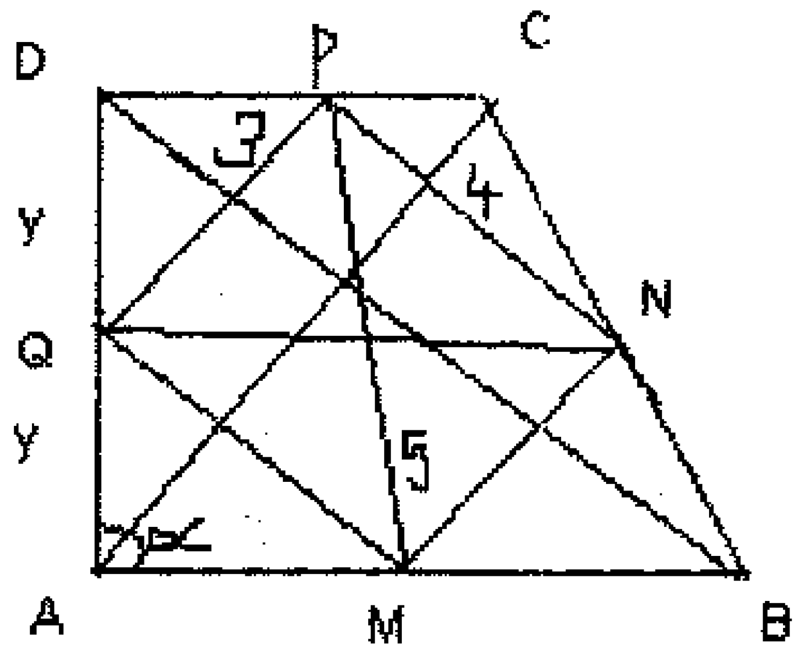
**Зад. 2** Нека $S_1$ и $S_2$ са съответно сумите от членовете на прогресията, намиращи се пред и след $b_n \Rightarrow \left| \begin{array}{l} S_1 + \frac{1}{6} + S_2 = \frac{3}{4} \\ \frac{S_1}{S_2} = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} \\ S_2 = \frac{1}{12} \end{array} \right.$ **(2 точки)**

Разглеждаме безкрайно намаляващата геометрична прогресия след $b_n = \frac{1}{6}$ с частно q, първи член $a_1 = \frac{1}{6}.q$ и сума $S_2 = \frac{1}{12} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{6}.q}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

**(2 точки)**

$b_{n-1} = b_n : q = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, но $S_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ n-1=1$\Rightarrow$ n=2 **(2 точки)**

**Зад.3.** **а)**




Доказване на твърдението $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$ **(1 точка).**

Доказване на твърдението $S_{MNPQ} = 2.S_{PQM}$ **(1 точка).**

$\Delta$PQM-правоъгълен и $S_{PQM} = \frac{1}{2}.3.4 = 6 кв.ед.$ **(1 точка)**

Следователно $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ} = 4\,S_{PQM}$ =24 кв.ед.**(1 точка).**

**б)**Доказване на твърдението MNPQ-правоъгълник, следователно QN=PM=5 **(1 точка)**

От QN-средна отсечка в ABCD и CD:AB=9:16 намираме AB=6,4 и CD=3,6 **(1 точка)**

Означаваме $\angle$BAD=$\alpha$ и AQ=QD=y$\Rightarrow\angle$ADC=$180^0-\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{y^2 + 3{,}2^2 - 16}{6{,}4y} \,/\, Кос.теорема - \Delta MAQ \,/;$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{y^2 + 1{,}8^2 - 9}{3{,}6y} \,/\, Кос.теорема - \Delta QPD \,/;$$

$$\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha) \Rightarrow$$

$\alpha=90^0$ и y=2,4$\Rightarrow$AD=4,8**(3точки)**

От AD$\perp$AB$\Rightarrow BC^2 = AD^2 + (AB - DC)^2 \Rightarrow BC = \frac{2}{5}\sqrt{193}$ **(1точка)**

**Указание за проверка**
**XII клас**

**Зад.1.а)** $x^2y^2+x+y-3xy \ge x^2y^2-3xy+2\sqrt{xy}$ $(използваме, че \dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy})$ **(2 точки)**

$$x^2y^2-3xy+2\sqrt{xy}+1-1=(xy-1)^2-(\sqrt{xy}-1)^2=(\sqrt{xy}-1)^2(\sqrt{xy}+1)^2-(\sqrt{xy}-1)^2=$$
$$(\sqrt{xy}-1)^2(\sqrt{xy}+1-1)(\sqrt{xy}+1+1)=\sqrt{xy}(\sqrt{xy}+2)(\sqrt{xy}-1)^2 \ge 0 \text{ завсякох} \ge 0, y \ge 0$$

**(2 точки)**

**б)** За правилно намиране на корените на уравнението $f'(x)=0$ **(1 точка).**

Пресмятане на $y_{\min}$ **(1точка)** и $y_{\max}$ **(1точка).** Заместване в условието $y_{\min}+y_{\max}=2a^3+a^2+3$, решаване на полученото уравнение и получаване на стойностите $a=-1$ или $a=-5$. **(1точка).**

**Зад. 2.** $\alpha,\beta,\gamma$ образуват аритметична прогресия $\Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$,

$\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{180^0-\beta}{2} \Rightarrow \beta=60^0$ **(2точки)** $\Rightarrow \alpha=60^0-x, \gamma=60^0+x$

$$\cos(60^0-x)+tg60^0+\sin(60^0+x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+1 \Rightarrow \sin(30^0+x)+\sqrt{3}+\sin(60^0+x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$$

$$\Rightarrow 2\sin(45^0+x)\cos 15^0=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

$$\cos 15^0=\cos(45^0-30^0)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow \sin(45^0+x)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$\cos 15^0=\sin 75^0=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow x=30^0$ **(3точки)** $\Rightarrow \alpha=30^0, \gamma=90^0$ **(1точки)**

**Зад. 3.** От $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp AB$, $MA \perp AC$

От $MA=AB=BC=a$ и $\Delta MAB$, $\Delta MAC$, $\Delta ABC$-правоъгълни $\Rightarrow$

$MB=a\sqrt{2}, AC=a\sqrt{2}, MC=a\sqrt{3}$

AB-ортогонална проекция на MB върху (ABC) и $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC \Rightarrow$

$\Delta BCM \cong \Delta AMC \Rightarrow BN=AN \Rightarrow NP \perp AB$ **(3 точки)**

Аналогично $\Delta APM \cong \Delta BPC \Rightarrow PC=PM \Rightarrow PN \perp CM$ **(2точки)**

От правоъгълния $\Delta PCN$ намираме, че $PN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **(1точка)**