МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

IV клас

<u>Зад.1</u> **а)** Намерете числата A, B и C, където A=(812:4).8+(5334—4352):2—107, B=(1321.7—7.1319):(1263-1256) и C=A–B:2. Колко пъти числото A е по-голямо от числото B?

б) Намислих едно число. От него извадих 6 и полученото разделих на 3. От частното извадих 1 и полученото число умножих с 2. Получих двуцифрено число, на което цифрата на единиците е три пъти по-малка от цифрата на десетиците. Кое число съм намислил?

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Разликата на две съседни страни на един правоъгълник е 60 *мм*, а дължината на една от страните му е 9 *см*. Намерете обиколката и лицето на този правоъгълник.

(7 точки)

<u>Зад.3</u> В девет часа сутринта от Габрово за Варна тръгнал камион, който за половин час изминава 35 *км*. След един час от Варна за Габрово тръгнала лека кола, която се движи с 10*км/ч* по-бързо от камиона. В колко часа са се срещнали двете превозни средства, ако те не са спирали по време на пътуването, а разстоянието между двата града е 370 *км*?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

IV клас

<u>Зад.1</u> а) Пресмятане на 812:4=203. **(0,25 точки)**
Пресмятане на 203.8=1624. **(0,25 точки)**
Пресмятане на 5334–4352=982. **(0,25 точки)**
Пресмятане на 982:2=491. **(0,25 точки)**
Пресмятане на 1624+491=2115. **(0,25 точки)**
Пресмятане на А=2115-107=**2008**. **(0,25 точки)**
В=(1321.7–7.1319):(1263-1256)=7.(1321-1319):7=**2** **(1 точка)**
С=А–В:2=2008–2:2=**2007** **(0,25 точки).**
Числото А е 1004 пъти по-голямо от числото В, защото 2008:2 =1004(**0,25 точки).**

б) Ако намисленото число е х, то съгласно условието на задачата резултатът ((х–6):3–1).2 е 93, 62 или 31(**1,5 точки)** и тъй като при умножение с 2 се получава четно число, то крайният резултат е 62(**0,5точки)**. Следователно намисленото число х=(62:2+1).3+6=102(**2 точки)**.

$$\boxed{x} \xrightarrow[+6]{-6} \boxed{\quad} \xrightarrow[.3]{:3} \boxed{\quad} \xrightarrow[+1]{-1} \boxed{\quad} \xrightarrow[:2]{.2} \boxed{62}$$

<u>Зад.2</u> Нека означим с a и b дължините съответно на неизвестната и известната страна на правоъгълника. По условие $b = 9\,см$.

60 мм=6 см(**1 точка)**

I сл.) $a > 9$, тогава $a - 9 = 6$

$\Rightarrow a = 15$ $см$(**1 точка),** $P = 48\,см$ (**1 точка)** и $S = 135\,кв.см$ (**1 точка).**

II сл. $a < 9$, тогава $9 - a = 6$

$\Rightarrow$ $a = 3$ $см$ (**1 точка),** $P = 24\,см$ (**1 точка)** и $S = 27\,кв.см$ (**1 точка).**

<u>Зад.3</u> Намиране скоростта на камиона 35.2 = 70 *км/ч*. **(1точка)**
Скоростта на леката кола е 70 *км/ч* +10 *км/ч* =80 *км/ч*. **(1точка)**
Камионът и леката кола изминават общо за един час 70 *км/ч*+80*км/ч*=150 *км/ч*. **(1точка)**
Камионът се е движил един час по-вече и за това време е изминал 70 *км* **(1точка)**, следователно останалият път е 370 *км*–70 *км* = 300 *км* **(1точка)**.Този път е изминат от камиона и колата за 300:150 = 2 часа(**1точка)**.Следователно срещата се е състояла в 9+1+2 = 12 часа(**1точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03.2008г.

V клас

Зад.1 Да се намери:

а) стойността на израза А=3,42.2,44+15,32.5,7—5,7.5,32+6,58.2,44

б) неизвестното число x, ако (21.x+112,12).0,2—17,12.0,2=1,6:0,04

в) обикновената дроб с числител и знаменател съответно равни на цифрата на десетиците и цифрата на стотните на частното А:x

(7 точки)

Зад.2 Градовете Русе и Видин са разположени на брега на река Дунав, съответно на 495 км и 855 км от устието на реката (мястото, където реката се влива в морето). Едновременно от двете пристанища тръгват един срещу друг два парахода, които имат една и съща скорост в спокойна вода - 49 км /ч, а скоростта на течението е 4 км /ч.

а) Какво ще бъде разстоянието между тях след 1, 5 часа от тръгването им?

б) Когато параходът от Русе бъде на средата на пътя между Русе и Видин, какво ще бъде разстоянието между парахода от Видин и устието на реката?

(7 точки)

Зад.3 За провеждането на томбола в едно училище били закупени 30 химикалки на стойност 35,78 лв.. Част от химикалките стрували по 1,34 лв., а останалите по 1 лв. По колко химикалки от всеки вид са закупени?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

V клас

Зад.1а) A=3,42.2,44+15,32.5,7—5,7.5,32+6,58.2,44= 2,44.(3, 42+6, 58) +5,7.(15,32—5,32)=
2, 44.10+5, 7.10= 24, 4+57= **81, 4** **(2точки)**

б) (21.x+112,12).0,2—17,12.0,2=1,6:0,04
(21.x+112, 12).0, 2=40+3,424
21.x+112, 12=43,424:0, 2
21.x=217, 12—112, 12
x=105:21
x=5 **(3точки)**

в) A:x=81,4:5=16,28

Търсената дроб е $\frac{1}{8}$. **(2точки)**

Зад.2 а) Намираме пътя между Видин и Русе: 855—495=360 км. **(1 точка)**
Скоростта на парахода от Видин е 49+4=53км/ч, а на парахода от Русе е 49—4=45 км/ч. **(1 точка)**
Разстоянието между параходите след 1,5 ч е 360—(45+53).1,5=360—147=213 км. **(1 точка)**

б) Намираме половината от пътя между Видин и Русе: 360:2=180 км. **(1 точка)**
Параходът от Русе ще измине това разстояние за 180:45= 4 ч **(1 точка)**
За това време параходът от Видин изминава 53.4=212 км. **(1 точка)**
Разстоянието до устието на реката е 855—212=643 км. **(1 точка)**

Зад.3 Ако всички химикалки са от 1 лв., то необходимата сума е 30 лв.**(2точки)**, което е по-малко от 35,78 лв. с 5,78 лв.**(1точка)**. Разликата се дължи на по-скъпите с 0,34 лв.**(1точка)** химикалки и техният брой е 5, 78 **:** 0,34 = 17**(2точки)**. Броят на химикалките от 1 лв. е 30—17=13**(1 точка)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VI клас

Зад.1 Годишната лихва в банка е 4% и лихвата се капитализира в края на всяка година. Каква най-малка сума (с точност до 1 лв.) трябва да се внесе в банката, за да разполагаме след две години с 5000 лв.?

(7 точки)

Зад.2 Дадена е координатна система XOY с единична отсечка 1 см.

а) Изобразете в координатната система точките K(1;1), L(–3,5;1), M(1;0), N(–3;–2), P(0;–4), R(3;-3), S(–3;0), T(0;3). Намерете лицата на четириъгълниците TSPM и KLNR.

б) Намерете координатите на всички точки, които образуват успоредник с точките A(-4;2), B(2;2) и C(2;8) и лицата на тези успоредници.

(7 точки)

Зад.3 Дадени са изразите $A=\frac{8^3.4^{12}}{2^5.32^5}$ и $B=\frac{2.7^{n+1}+5.7^{n+1}}{50.7^{n-1}-7^{n-1}}$, където n е естествено число. Сравнете стойностите на A^{32} и B^{36}.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

VI клас

Зад.1 Ако са внесени х лв, то след две години сумата ще е $x.(1+0{,}04)^2 = x.1{,}04^2$ **(3 точки)**.
Трябва да намерим неизвестното х от равенството $x.1{,}04^2 = 5000$.**(2 точки)**.
Получаваме $x = 5000:1{,}04^2 = 4622{,}78 \approx 4623$ лв **(2 точки)**.

Зад.2 **а)** Изобразяване в координатната система на точките
K(1;1), L(–3,5;1), M(1;0), N(–3;–2), P(0;–4), R(3;-3), S(–3;0), T(0;3) **(2 точки)**.
Намерено $S_{KLNR} = 17{,}75$ см^2 **(2 точки)**.
Намерено $S_{TSPM} = 14$ см^2 **(1 точка)**.
б) Намиране на точките D(–4;8), E(8;8), F(–4;–4) **(0,75 точки)**.
Намиране на $S_{ABCD} = 36$ cm^2 **(0,25 точки)** и $S_{ABEC} = S_{ACBE} = 36$ cm^2 **(1 точка)**.

Зад.3 Намерени стойностите на изразите А и В, както следва: А= 8 **(2,5точки)**, В = 7 **(2,5точки)**.
$A^{32} = \left((2)^3\right)^{32} = 2^{96} = (2^8)^{12}$ **(0,5 точки)**, $B^{36} = 7^{36} = (7^3)^{12}$ **(0,5 точки)**.
Извод от сравняването на A^{32} и B^{36}: $2^8 < 7^3 \Rightarrow \left(2^8\right)^{12} < \left(7^3\right)^{12}$, т.е. $A^{32} < B^{36}$ **(1 точка)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VII клас

Зад.1 Галерия продала две малки пластики, едната с 1000 лв. по-скъпа от другата и картина, която е 5 пъти по-скъпа от втората пластика. От тази продажба галерията получила 2000 лв. комисионна. Каква е цената на продадените предмети на изкуството, ако комисионната е 10% от цената им?

(7 точки)

Зад.2 Даден е триъгълник ABC. Със страни страните AC и BC вън от триъгълника са построени равнобедрени правоъгълни триъгълници ACB_1 и CBA_1 с прави ъгли при върха C. Докажете, че отсечките AA_1 и BB_1 са равни и перпендикулярни.

(7 точки)

Зад.3 Да се намерят стойностите на a,b,c удовлетворяващи равенството

$$a^2-2a+1+|b-c-5|+|c|=0.$$

При така намерените стойности на a, b и c да се да се разложи на множители многочлена

$$M=2ax^4+(b-c)x^3+(a+b)x^2+bx+3c^2+2.$$

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. “Св.С.Врачански” №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

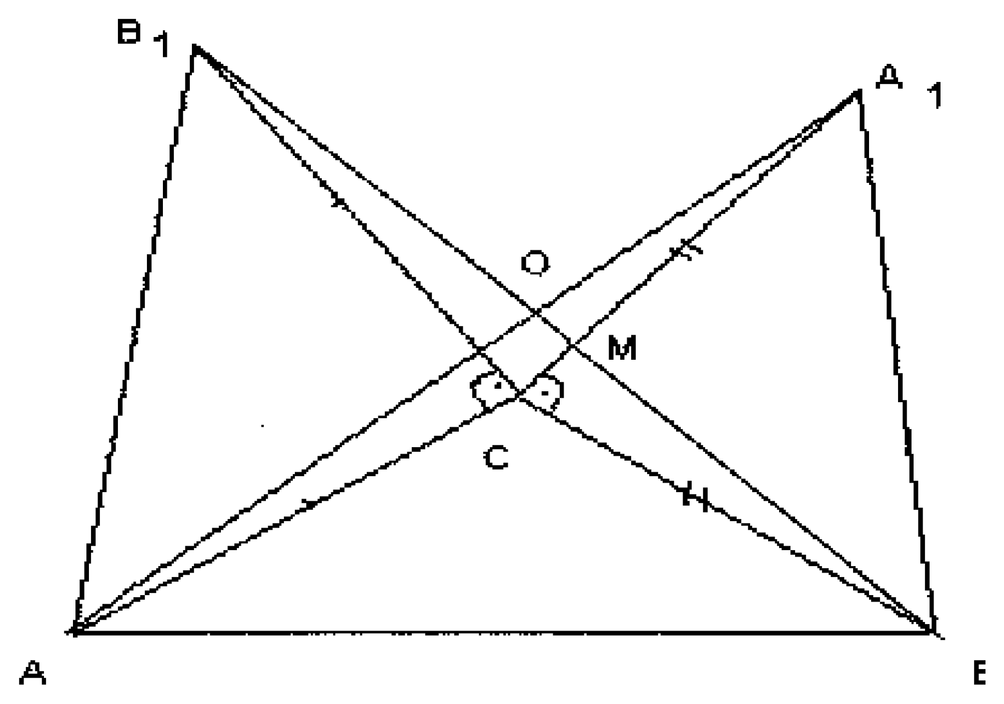
VII клас

Зад.1 Ако първата пластика е продадена за x лв.(x>0), то втората пластика и картината са продадени съответно за x +1000 лв. и 5.(x +1000) лв.**(2 точки).**

Съгласно условието на задачата $\frac{10}{100}.(x+(x+1000)+5(x+1000))=2000$ **(2 точки).**

Намиране цените на пластиките съответно 2000 лв. и 3000 лв. **(2 точки).**
Намиране цената на картината-15000лв.**(1 точка).**

Зад.2 Доказване еднаквостта на ΔA_1AC и ΔBB_1C**(2 точки).**



$AA_1=BB_1$ и (1) $\angle CBB_1=\angle CA_1A$ (съответни елементи в еднакви триъгълници) **(2точки).**

Нека BB_1 пресича страната CA_1 в точка M /Ако B_1B не пресича страната CA_1, използвайте пресечната точка на B_1B с AC/.

(2) $\angle OMA_1=\angle BMC$(противоположни ъгли в ΔOMA_1 и ΔCMB) **(1точка).**

От (1)и(2) $\Rightarrow \angle A_1OM=\angle MCB=90^0$ **(1точка)**

$\Rightarrow B_1B\perp AA_1$**(1точка).**

Зад.3 $a^2-2a+1+|b-c-5|+|c|=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+|b-c-5|+|c|=0 \Rightarrow$ a=1, c=0, b=5**(2 точки).**

За намиране на многочлена $M=2x^4+5x^3+6x^2+5x+2$**(1 точка).**

За разлагането $M=2x^4+2x^3+3x^3+3x^2+3x^2+3x+2x+2=(x+1).(2x^3+3x^2+3x+2)$**(2 точки).**

За разлагането $M=2x^3+2x^2+x^2+x+2x+2=(x+1)^2(2x^2+x+2)$**(2 точки).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

VIII клас

Зад.1 Пресметнете стойността на израза $P(x)=x^3+2x^2-5x-a$ при $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $a=(2-\sqrt{6})^2$. Намерете за кои стойности на параметъра a числото $2\sqrt{5}$ е решение на уравнението $P(x)=0$.

(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $x^2-9x+q=0$, където q е реален параметър.

а) Решете уравнението при $q=7$ и ако корените на уравнението x_1 и x_2 са реални, различни и $x_1<x_2$, то намерете целите числа n, за които е в сила неравенството $x_1<n<x_2$.

б) Намерете целите положителни стойности на параметъра q, за които корените на даденото уравнение са цели числа.

(7 точки)

Зад.3 Даден е ΔABC. Върху страните му AC и BC са избрани съответно точки M и N, такива, че $AM=BN$. Точките P и Q са среди съответно на AN и BM. Да се докаже, че ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ е перпендикулярна на правата PQ.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.
Указание за проверка
VIII клас

Зад.1 Пресмятане на $a=(2-\sqrt{6})^2$ **(1точка)**. Прилагане на формулите $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$ **(1точка)** и $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ **(1точка)**. Намиране на стойността на израза $P(x)=x^3+2x^2-5x-a=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ /при $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $a=(2-\sqrt{6})^2$ /**(1точка)**. Пресмятане на $(2\sqrt{5})^3$ **(1точка)** и $(2\sqrt{5})^2$ **(1точка)**. Извършване на тъждествени преобразувания и намиране на параметъра $a=30\sqrt{5}+40$ **(1точка)**.

Зад.2 **а)** При $q=7$ получаваме квадратното уравнение $x^2-9x+7=0$.

Дискриминантата $D=(-9)^2-4.1.7=53\geq 0$**(0,5 точки)**$\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{53}}{2}$ **(1 точка).**

Тъй като $7<\sqrt{53}<8$, то $\dfrac{9-8}{2}<\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}<\dfrac{9-7}{2}<\dfrac{9+7}{2}<\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}<\dfrac{9+8}{2}$, то

$0<x_1=\dfrac{9-\sqrt{53}}{2}<1<8<\dfrac{9+\sqrt{53}}{2}=x_2<9$ **(1 точка)**

Следователно търсените цели числа са: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 **(1 точка)**.

б) Определяне $D=(-9)^2-4.1.q=81-4q$ на $x^2-9x+q=0$ **(0,5 точки)**.

$D\geq 0$ и q е цяло положително число $\Leftrightarrow q\in\{1,2,3,\ldots,19,20\}$ **(1 точка)**.

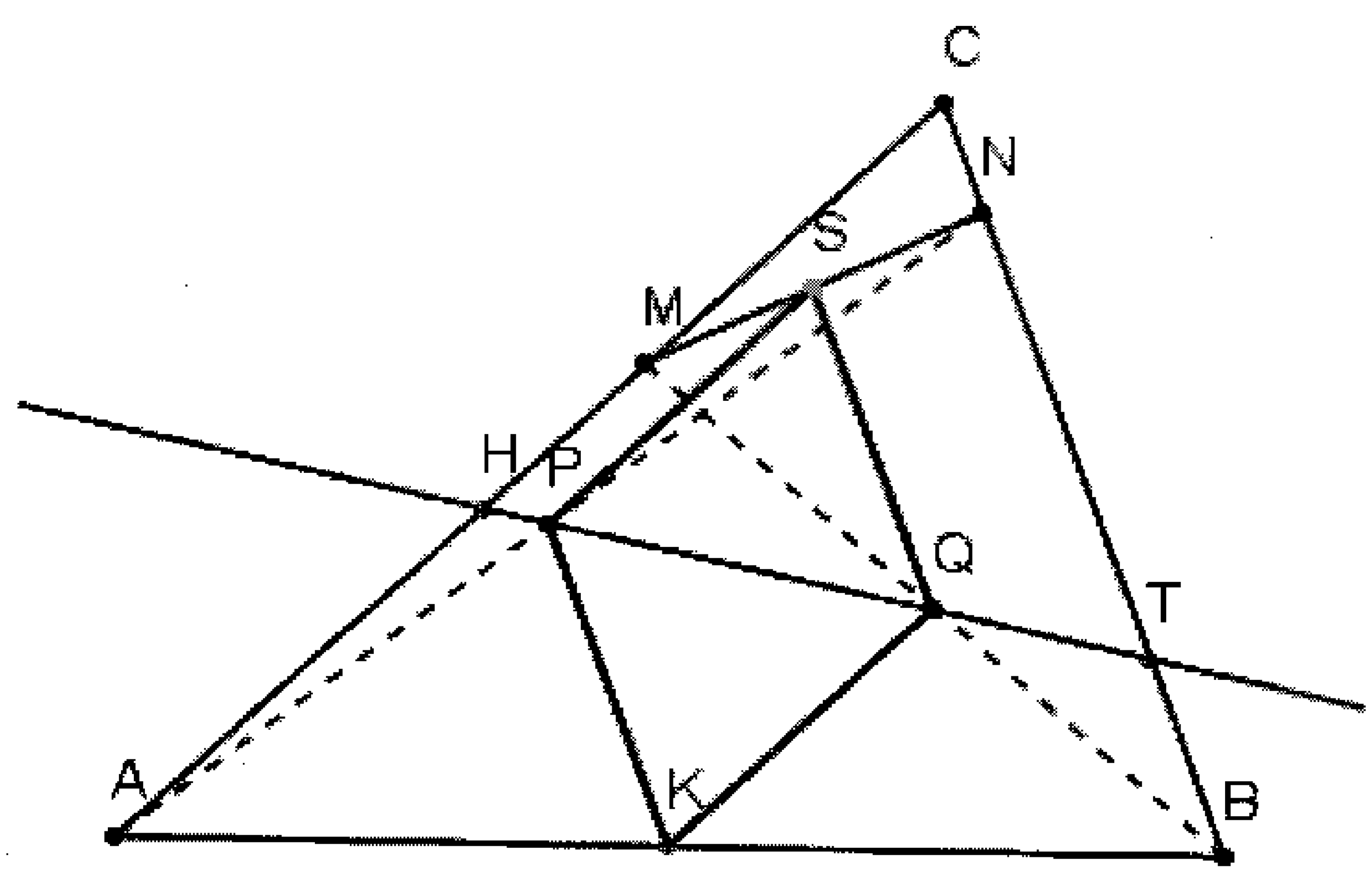
Цели положителни стойности на q, за които корените на даденото уравнение са цели числа:

Цяла положителна стойност на q	*Уравнение* $x^2-9x+q=0$	*Дискриминанта* D	*Цели корени* x_1 *и* x_2	*Точки*
$q=8$	$x^2-9x+8=0$	D$=81-4q=49$	$x_1=1$ и $x_2=8$	**(0,5 точки)**
$q=14$	$x^2-9x+14=0$	D$=81-4q=25$	$x_1=2$ и $x_2=7$	**(0,5 точки)**
$q=18$	$x^2-9x+18=0$	D$=81-4q=9$	$x_1=3$ и $x_2=6$	**(0,5 точка)**
$q=20$	$x^2-9x+20=0$	D$=81-4q=1$	$x_1=4$ и $x_2=5$	**(0,5 точка)**

Зад.3 За да докажем, че $l_{\angle ACB}\perp PQ$ е достатъчно да докажем, че ΔHTC е равнобедрен, където H и T са пресечните точки на PQ с AC и BC **(2 точки)**.

Нека K и S са средите съответно на AB и MN **(1точка)**. Четириъгълникът $KQSP$ е ромб /PS, KQ, QS и KP-средни отсечки съответно в ΔANM, ΔABM, ΔBNM и ΔABN/**(1точка)**.

$\Rightarrow \Delta PQS$ е равнобедрен $\Rightarrow \measuredangle SPQ=\measuredangle SQP$ **(1 точка)**, но $SP//HC$ и $SQ//TC$ **(1точка)** $\Rightarrow \Delta HTC$ е равнобедрен $\Rightarrow l_{\angle ACB}\perp PQ$ **(1 точка)**.



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

IX клас

<u>Зад.1</u> Дадени са уравненията:

$\frac{x}{27x^3+1}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0$, $\frac{13y^2+4}{4-y^2}+\frac{7y}{y-2}=0$ и $9z^4-37z^2+4=0$. Кои от тях са еквивалентни?

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Дадено е уравнението $(2k+1)x^2-(k+2)x+k-1=0$. Да се намерят стойностите на параметъра k, за които е изпълнено равенството $x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$.

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Даден е ΔABC с височина $CH\ (H\in AB)$. Окръжност с диаметър CH пресича страните AC и BC съответно в точки P и Q така, че $PQ=CH$.

а) Да се докаже, че ΔABC е правоъгълен;

б) Ако радиусът на вписаната окръжност в ΔABC е $4\sqrt{3}+6$ пъти по-малък от периметъра му, да се намери стойността на израза $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, където a, b и c са страните на триъгълника.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.
Указание за проверка
IX клас

Зад.1 Дефиниционното множество на първото уравнение е $D: x \neq -\frac{1}{3}$.

$$(1)\ \frac{x}{27x^3+1}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{(3x+1)(9x^2-3x+1)}+\frac{x}{3x+1}-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow (3x-1)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\in D$$

(2 точки)

Дефиниционното множество на второто уравнение е $D: y \neq \pm 2$.

$$(2)\ \frac{13y^2+4}{4-y^2}+\frac{7y}{y-2}=0 \Leftrightarrow \frac{13y^2+4}{(2-y)(2+y)}-\frac{7y}{2-y}=0 \Rightarrow 3y^2-7y+2=0 \Rightarrow y_1=\frac{1}{3}\in D, y_2=2\notin D$$

(2 точки)

Решенията на уравнението (3) $9z^4-37z^2+4=0$ са $z_1=\pm\frac{1}{3}, z_2=\pm 2$ **(2 точки)**

$\Rightarrow$ еквивалентни са уравненията (1) и (2) **(1 точка)**

Зад.2 Допустимите стойности на параметъра *к* са всички реални числа, различни от $-\frac{1}{2}$.

(1 точка)

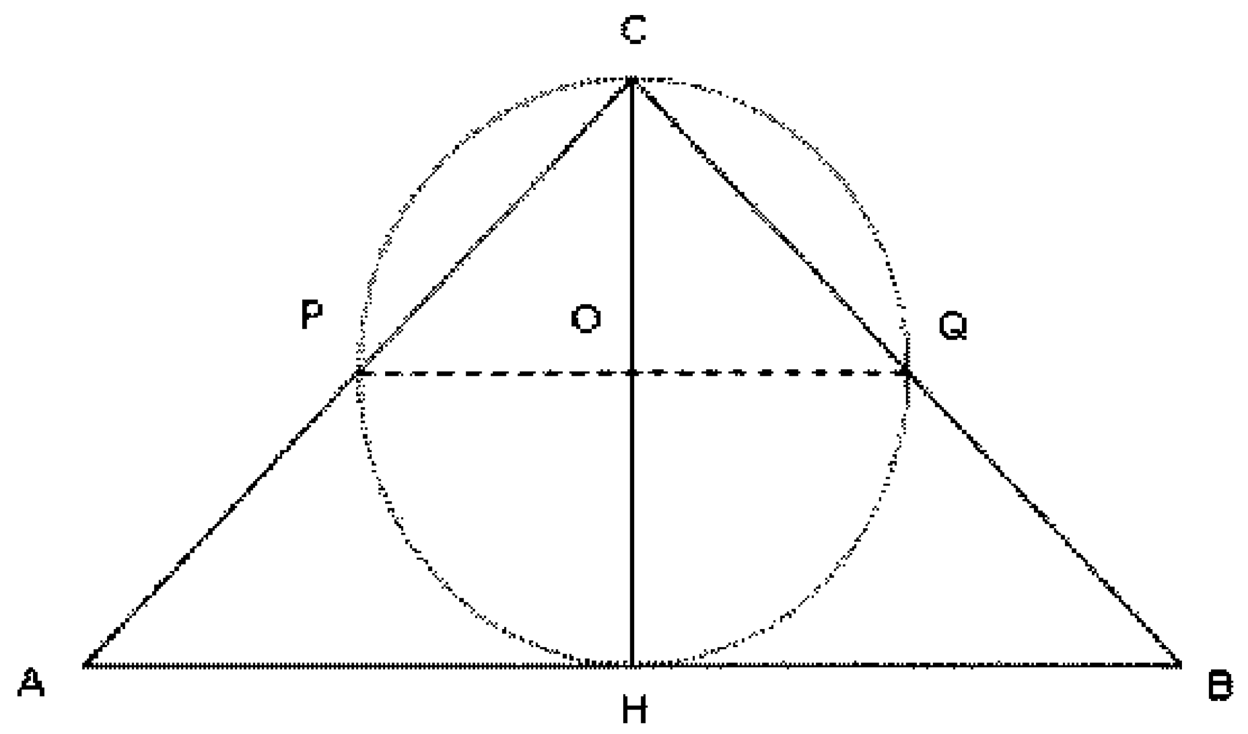
От формулите на Виет следва, че $x_1x_2=\frac{k-1}{2k+1}$ и $x_1+x_2=\frac{k+2}{2k+1}$. **(2 точки)**

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$x_1x_2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3} \Leftrightarrow \frac{k-1}{2k+1}\left(\left(\frac{k+2}{2k+1}\right)^2-\frac{2(k-1)}{2k+1}\right)=\frac{3k(1-k^2)-6}{(2k+1)^3}$$

$\Rightarrow 9k^2-3k=0 \Rightarrow k=0, k=\frac{1}{3}$ -допустими стойности. **(4 точки)**

Зад.3 **а)**По условие $CH=2R$ и $PQ=CH$ $\Rightarrow PQ=2R \Rightarrow \angle ACB=\angle PCQ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PQ}=90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ е правоъгълен**(2 точки)**.



б) От ΔABC -правоъгълен

$\Rightarrow r=p-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$ **(1 точка)**.

По условие $\frac{P_{ABC}}{r}=4\sqrt{3}+6 \Rightarrow \frac{a+b+c}{\frac{a+b-c}{2}}=4\sqrt{3}+6$

$$\Rightarrow 2(a+b)+2c=(4\sqrt{3}+6)(a+b)-(4\sqrt{3}+6)c \Rightarrow (4\sqrt{3}+4)(a+b)=(4\sqrt{3}+8)c$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{4\sqrt{3}+8}{4\sqrt{3}+4} \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **(4 точки)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. “Св.С.Врачански” №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

X клас

Зад.1 Определете допустимите стойности на променливите и опростете израза

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Решете неравенството $x+b+28a\le\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}$, където a и b са съответно най-голямата и най-малката стойност на функцията $y=-2x^2+4x+1$ в интервала [-3;0].

(7 точки)

Зад.3 Права, минаваща през точката A, пресича окръжност в точките B и C точката (B лежи между точките A и C). Друга права, минаваща през точката A, пресича окръжността в точките D и E (точката D лежи между точките A и E). Известно е, че правите BD и CE се пресичат в точката F, освен това FE=1 и AC=2AE.

а) Да се докаже, че ∠EDF=∠BCF.

б) Да се намери дължината на отсечката FD.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

X клас

Зад.1 Допустимите стойности на променливите са $x>0$, $y\geq 0$, $x\neq y$ **(1,5 точки)**.

$$C=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{\left(x^{-1}-yx^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-xy-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-(x^2+y^2)\ \textbf{(2точки)}=\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-y^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\left(x^2-xy\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{x-y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-xy-x^2-y^2\ \textbf{(1,5точки)}$$

$$=\frac{x^3-y^3}{x^{\frac{2}{3}}\left(x-y\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(x-y)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}-xy-x^2-y^2=\frac{x^3-y^3}{\left(x-y\right)}-xy-x^2-y^2=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{\left(x-y\right)}-xy-x^2-y^2$$

$=x^2+xy+y^2-xy-x^2-y^2=0$ **(2точки)**.

Зад.2 Върхът (x_0,y_0) на параболата $y=-2x^2+4x+1$ е с координати $x_0=-\dfrac{b}{2a}=1$ и $y_0=y(1)=3$.

Определяме $y(0)=1$-пресечна точка с ординатната ос, а от $-2x^2+4x+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$-пресечни точки с абсцисната ос. От $a=-2<0\Rightarrow$ най-малката стойност b на функцията y в интервала [-3;0] е $b=y(-3)=-29$ **(1 точка)** и най-голямата стойност a на функцията y в интервала [-3;0] е $a=y(0)=1$ **(1 точка)**.

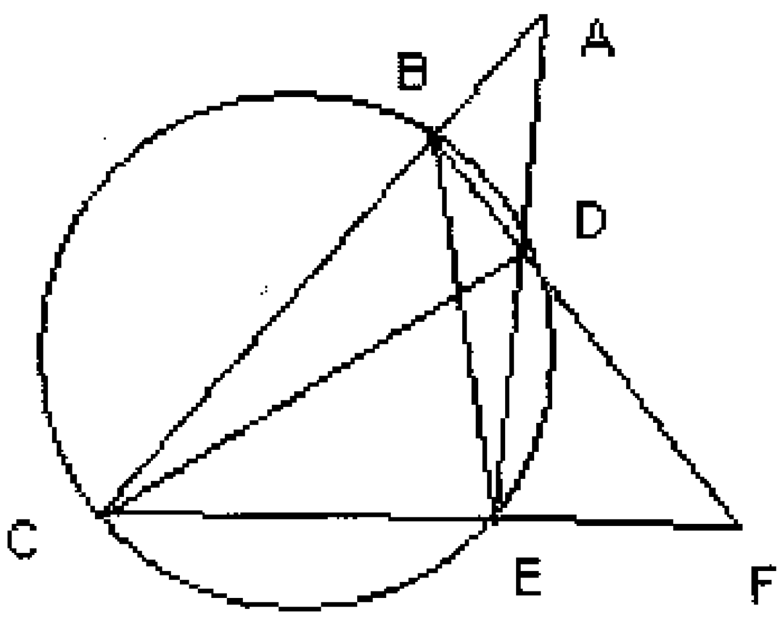
$$x+b+28a\leq\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\Leftrightarrow x-1\leq\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\ \textbf{(0,5 точки)}.$$

Дефиниционната област на неравенството е $x\neq-1, x\neq 2$ **(1 точка)**.

Преобразуваме неравенството и получаваме

$$x-1\leq\frac{2x+7}{x+1}+\frac{x^2-4}{2+x-x^2}\Leftrightarrow x-1\leq\frac{2x+7}{x+1}-\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)}\leq 0\ \textbf{(2 точки)}.$$

Следователно $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,2)\cup(2,3]$ **(1,5 точки)**.



Зад.3 **а)** ∠EDF+∠EDB=180^0/съседни ъгли/**(0,5 точки)** и ∠BCE+∠EDB=180^0/CEDB-вписан/**(1 точка)**, откъдето∠EDF=∠BCF **(0,5 точки)**.

б) Триъгълниците ADC и ABE са подобни, защото имат общ ъгъл, а ъглите ACD и AEB се опират на хордата BD, т.е. ∠ACD=∠AEB **(1,5 точки)**. Тогава $\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{AC}{AE}=2$ **(0,5 точки)**.

Аналогично ΔBEF~ΔCDF**(1,5 точки)**, следователно $\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{CF}{BF}=2$ **(0,5 точки)**, откъдето $DF=2EF=2$ **(1точка)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

XI клас

Зад.1 Сумата от първите десет члена на аритметична прогресия е 140, а произведението на втория и деветия член е 147. Намерете прогресията.

(7 точки)

Зад.2 Трапецът ABCD(AB||CD, AB>CD) е вписан в окръжност с радиус R.

а) Докажете, че ако в трапеца може да се впише окръжност, то малката основа, височината и голямата основа са последователни членове на геометрична прогресия.

б) Намерете малката основа, бедрото и лицето на трапеца, ако голямата основа AB служи за диаметър на описаната окръжност и $\measuredangle ACD = \alpha$.

(7 точки)

Зад.3 Геометричната прогресия $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ е с положителни членове и частно q, а аритметичната прогресия $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ е растяща с разлика d. При какво условие уравненията $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ и $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}} + ... = \frac{1}{2}$ ще бъдат еквивалентни?

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

Указание за проверка

XI клас

Зад.1 Съгласно условието на задачата $\begin{cases} 2a_1 + 9d = 28 \\ (a_1+d)(a_1+8d) = 147 \end{cases}$ **(2точки),** откъдето

$\left(\frac{28-7d}{2}\right)\left(\frac{28+7d}{2}\right) = 147$ **(1точка)** $\Rightarrow d = \pm 2$ **(2точки)** $\Rightarrow a_1 = 5$ или a_1=23**(2точки)**. Прогресията е 5,7,9,... или 23,21,19,.... .

Зад.2 а) Щом трапецът е вписан в окръжността, то той е равнобедрен, т.е. BC=AD**(1точка)**. Ако трапецът е описан около окръжност, то AB+CD=BC+AD=2AD**(1точка)**. Ако DH е височината на трапеца, то $DH^2 = AD^2 - AH^2 = \left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = AB.CD$, с което твърдението е доказано**(1точка)**.

б) Тъй като $\measuredangle ACD = \alpha$, то $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 2\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 180^0 - 4\alpha \Rightarrow \measuredangle DAC = 90^0 - 2\alpha$ **(1точка)**.

От синусова теорема намираме $CD = 2R\sin(90^0 - 2\alpha) = 2R\cos 2\alpha$ и $AD = 2R\sin\alpha$ **(1точка)**.

$\Rightarrow DH^2 = AD^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - R^2(1-\cos 2\alpha)^2 = 4R^2\sin^2\alpha - 4R^2\sin^4\alpha = R^2\sin^2 2\alpha$

$\Rightarrow DH = R\sin 2\alpha$ **(1точка)**

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(AB+CD).DH}{2} = 2R^2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$ **(1точка)**.

Зад.3 Уравнението (1) $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1$ има смисъл при y>0, y≠1**(1точка)**. Извършваме преобразувания и получаваме $b_1 + \log_{\sqrt[d]{y}} a_n = b_n + \log_{\sqrt[d]{y}} a_1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt[d]{y}} \frac{a_n}{a_1} = b_n - b_1 \Leftrightarrow$

$(\sqrt[d]{y})^{b_n - b_1} = \frac{a_n}{a_1} \Leftrightarrow y = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_n - b_1}} = \left(\frac{a_1 q^{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{d}{b_1+(n-1)d-b_1}} = q^{\frac{(n-1)d}{(n-1)d}} = q$ **(1точка)**. Тъй като q>0 и q≠1, то $y=q$ е единственото решение на уравнението **(1точка)**.

Лявата страна на уравнението (2) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}} + ... = \frac{1}{2}$ е сума на безкрайната геометрична прогресия $x, -\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{4}, -\frac{x^4}{8}, ..., (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}}, ...$ с първи член x и частно

$\frac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{x}{2}$ **(1точка)**. Ако $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2;2)$, то сумата $S = \frac{x}{1-(-\frac{x}{2})}$ **(1точка)**.

Уравнението $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + ... + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{2^{n-1}} + ... = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-2;2)$ **(1точка)**.

Следователно уравненията (1) и (2) ще бъдат еквивалентни, ако $q = \frac{2}{3}$ **(1точка)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на наклонена триъгълна призма е 4 см. Страните на перпендикулярното на този ръб сечение се отнасят така, както 9:10:17, а лицето му е 144 см^2. Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

(7 точки)

Зад.2 В правоъгълния ΔABC точката M е средата на медианата към хипотенузата AB. От M са спуснати перпендикулярите MX, MY и MZ към BC, AC и AB $(X \in BC, Y \in AC, Z \in AB)$. Ако лицето на ΔABC е S, то да се изрази лицето на ΔXYZ чрез S.

(7 точки)

Зад.3 Даден е изразът $M = \dfrac{\dfrac{\sqrt{4a^2-4a+1}}{a} + a\sqrt{4a^2-4a+1} + 4 - \dfrac{2}{a}}{\sqrt{4a-4+\dfrac{1}{a}}}$.

а) Да се опрости M

б) Да се пресметне числената стойност на M, ако a е най-големият от корените на уравнението $\left(2x^2-x-6\right)^2+\left(2x^2+x-6\right)^2=4x^2$.

(7 точки)

Време за работа-4,5 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
16. 03. 2008г.

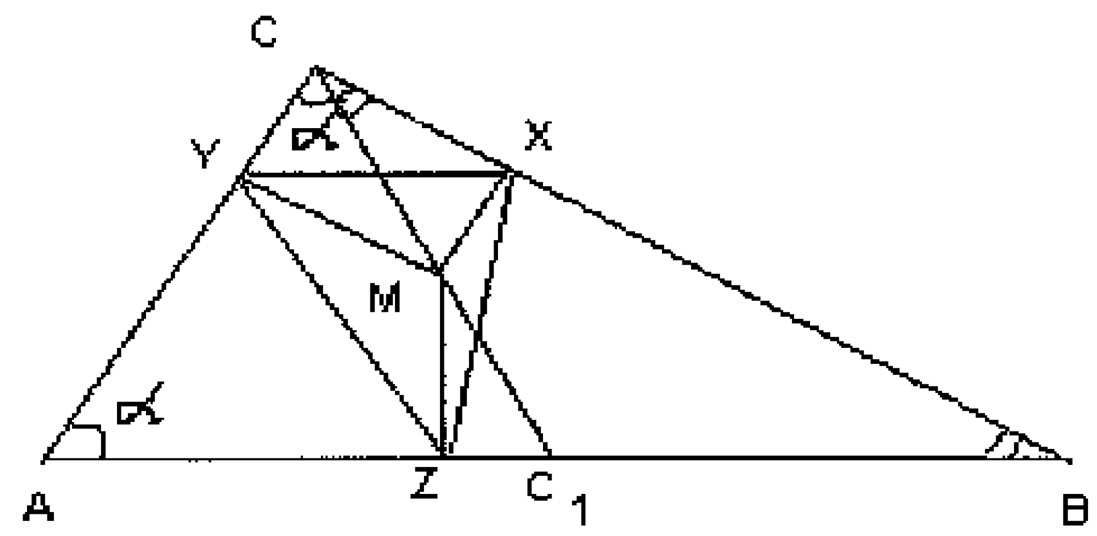
Примерни решения на задачите и указание за оценяване
XII клас

Зад.1 Нека страните на перпендикулярното сечение са *а=9х, в=10х и с=17х* **(0,5точки)**, откъдето полупериметъра $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9x+10x+17x}{2}=18x$ **(1точка)**. Лицето на сечението е $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18x.9x.8x.x}=144 \Rightarrow x=2$ **(1 точка)**.

Намиране страните *а, в* и *с* на перпендикулярното на наклонения ръб *l* сечение-18 см, 20 см и 34см **(1,5 точки)**. От $l\perp(ABC)\Rightarrow l\perp AB, l\perp AC\, u\, l\perp BC$ **(1,5 точки)**.

Лицето на околната повърхнина на призмата е сбор от лицата на три успоредника: $S=l.AB+l.AC+l.BC=l.(a+b+c)=4.72=288$ см^2**(1,5 точки)**.

Зад.2 Нека CC_1-медиана към хипотенузата AB, M-среда на CC_1 и $CM = MC_1 = m$. Знаем, че $AC_1 = BC_1 = CC_1 \Rightarrow AB = 4m$ и ако $\angle CAB = \angle ACC_1 = \alpha$, то $\angle ABC = \angle BCC_1 = 90^0-\alpha$ **(0,5точка)**.



От правоъгълните триъгълници MXC, MYC и MZC_1, следва че $MX=m.\sin(90^0-\alpha)=m.\cos\alpha$, $MY=m.\sin\alpha$ и $MZ=m.\sin(180^0-2\alpha)=m.\sin2\alpha$ **(1,5 точки)**.

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=S_{\Delta MXY}+S_{\Delta MYZ}+S_{\Delta MXZ}=\frac{1}{2}MX.MY\sin90^0+\frac{1}{2}MY.MZ\sin(180^0-\alpha)+\frac{1}{2}MX.MZ\sin(90^0+\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{1}{2}(MX.MY+MY.MZ\sin\alpha+MX.MZ\cos\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(m^2\sin\alpha\cos\alpha+m^2\sin^2\alpha\sin2\alpha+m^2\cos^2\alpha\sin2\alpha)=\frac{1}{2}m^2(\sin\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}m^2(\frac{1}{2}\sin2\alpha+\sin2\alpha)=\frac{3}{4}m^2\sin2\alpha$$ **(2,5точки)**.

$S=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.4m\sin\alpha.4m\cos\alpha=8m^2\sin\alpha\cos\alpha=4m^2\sin2\alpha$ **(2точки)**$\Rightarrow S_{\Delta XYZ}=\frac{3}{16}S$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 а) Допустимите стойности на променливата са $a>0$, $a\neq\frac{1}{2}$ **(0,5 точки)**.

$$M=\frac{\frac{\sqrt{(2a-1)^2}}{a}+a\sqrt{(2a-1)^2}+\frac{2(2a-1)}{a}}{\sqrt{\frac{(2a-1)^2}{a}}}\Leftrightarrow M=\frac{\frac{|2a-1|}{a}+a|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}}\Leftrightarrow$$

$$M=\frac{\frac{1+a^2}{a}|2a-1|+\frac{2(2a-1)}{a}}{\frac{|2a-1|}{\sqrt{a}}}\Leftrightarrow M=\frac{\frac{(1+a^2)|2a-1|+2(2a-1)}{\sqrt{a}}}{|2a-1|}\Leftrightarrow M=\frac{1+a^2}{\sqrt{a}}+\frac{2(2a-1)}{\sqrt{a}|2a-1|}$$ **(2,5точки)**

$\Rightarrow M=\frac{a^2-1}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ и $M=\frac{a^2+3}{\sqrt{a}}$ за $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ **(1 точка)**.

б) $(2x^2-x-6)^2+(2x^2+x-6)^2=4x^2\Leftrightarrow((2x^2-6)-x)^2+((2x^2-6)+x)^2=4x^2$
$\Leftrightarrow 2(2x^2-6)^2+2x^2=4x^2\Leftrightarrow(2x^2-6)^2+x^2=2x^2\Leftrightarrow 4x^4-25x^2+36=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm2$;
$x_{3,4}=\pm\frac{3}{2}$ **(2 точки)**$\Rightarrow a=2$ и от $2\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow M=\frac{a^2+3}{\sqrt{a}}=\frac{4+3}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **(1 точка)**.