МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15. 03. 2009г.

IV клас

Зад.1 **а)** Пресметнете сбора $a+b+c$, където a е неизвестното число в равенството $750:3+a=920:2+2\cdot 95$, числото $b=(1015:5)\cdot 7+(15121-7945):8-2008$ и c е най-малкото петцифрено число, записано с различни цифри.

б) Трима рибари улавят за 3 часа 6 риби. Колко риби ще уловят петима рибари за 6 часа?

(7 точки)

Зад.2 Данчо и Иво купили букети, всеки от които се състои от по *5* рози, по 2 лв всяка. Ако общият брой на цветята е *230* и Иво е купил *27* букета, колко букета е купил Данчо? Ще стигнат ли парите на Данчо от рестото да си купи нови маратонки и чанта, ако е имал *234* лв, а цените на маратонките и чантата са съответно - *27* лв и *11* лв?

(7 точки)

Зад.3 **а)**Обиколката на правоъгълник е 22 см. Ако широчината на правоъгълника се увеличи два пъти, а дължината остане непроменена, ще се получи правоъгълник с обиколка 30 см. Колко см е дължината на правоъгълника?

б)Площадка с дължина 80 м има форма на правоъгълник и е заобиколена от пътека с ширина 4 м. Обиколката на пътеката от външната й страна е 292м. Намерете обиколката и лицето на площадката?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IV клас

Зад.1 а) 750:3 + $\square$ = 920:2 + 2.95
250 + $\square$ = 460 + 190
250 + $\square$ = 650
a = 650 – 250
$\boxed{a = 400}$ **(1,5точки)**

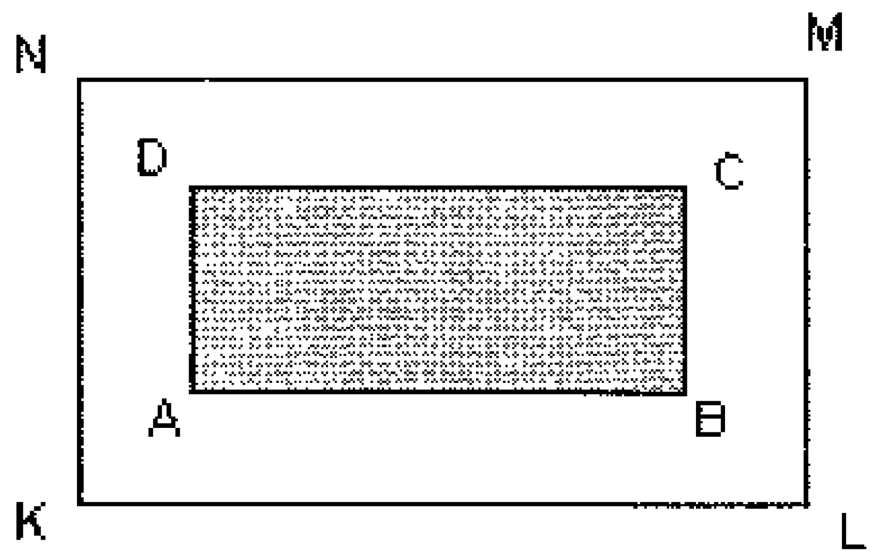
(1015:5).7 + (15121 – 7945):8 – 2008 =
= 203.7 + 7176:8 – 2008 =
= 1421 +897 – 2008 =
= 310 **(1,5точки)**
$\boxed{b = 310}$

$\boxed{c=10\ 234}$ **(1 точка)**
⇒400 +310+10 234=10944. **(1 точка)**

б) 3 рибари за 3 часа улавят 6 риби⇒1 рибар за 3 часа улавя 2 риби⇒ 1рибар за 6 часа ще улови 4 риби⇒ 5 рибари за 6 часа ще уловят 20 риби. **(2 точки)**

Зад.2 Иво е купил 27 букета по 5 рози - общо 27.5 = 135 рози **(1 точка)**
Следователно Данчо е купил 230 – 135 = 95 рози **(1 точка)**
Т.к. букетите са от по 5 рози Данчо е купил 95:5 =19 букета **(1 точка)**
След като Данчо е купил 95 рози по 2 лв, той е платил общо 95.2=190 лв. **(1 точка)**
Следователно са му останали 234 – 190 = 44 лв. **(1 точка)**
Общо маратонки и чанта струват 27+11=38 лв **(1 точка)**
44>38 следователно парите ще му стигнат **(1 точка)**

Зад.3 а) 30-22=8см повече. Широчината е 8:2=4см⇒дължината е (22-2.4):2=7см. **(2,5 точки)**
б)80+2.4=88м-дължина на външния правоъгълник. **(1 точка)**
88.2=176м-сбор от двете дължини на външния правоъгълник.
292-176=116м-сбор от двете ширини на външния правоъгълник.
116:2=58м-широчина на на външния правоъгълник. **(1,5 точки)**
58-2.4=50м-широчина на площадката. **(1 точка)**
80.50=4000кв.м-лице на площадката. **(0,5 точки)**
292-4.(4+4)=260м или 2.80 +2.50=160+100=260м-обиколка на площадката. **(0,5 точки)**



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

V клас

Зад.1 Между кои две естествени числа се намира числената стойност на израза A–B, където
$A = (2-1,5).100:((3,05-2,65).4+0,4)$ и $B = (3-1,5).\ 0,15:((1,88+2,12).0,0125)$.

(7 точки)

Зад.2 Обиколката на квадрат ABCD е 16см. Върху страната BC е взета точка M така, че AM=5см. Върху отсечката AM е взета точка N така, че лицето на ΔABN е 2,5 пъти по-малко от лицето на ΔABM. Да се намери лицето на трапеца AMCD и разстоянията от точка N до страните AB, BC, CD и AD, ако обиколката на квадрата е с 4см по-голяма от обиколката на ΔABM.

(7 точки)

Зад.3 В стар ръкопис бил записан броят на участващите в сражение войници – петцифрено число, което започвало със 123, но последните две цифри били изтрити. За щастие по-нататък било упоменато, че войниците можело да се строят в колони по двама, както и в блокове по седем или девет човека в редица. Колко войника са участвали в сражението?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

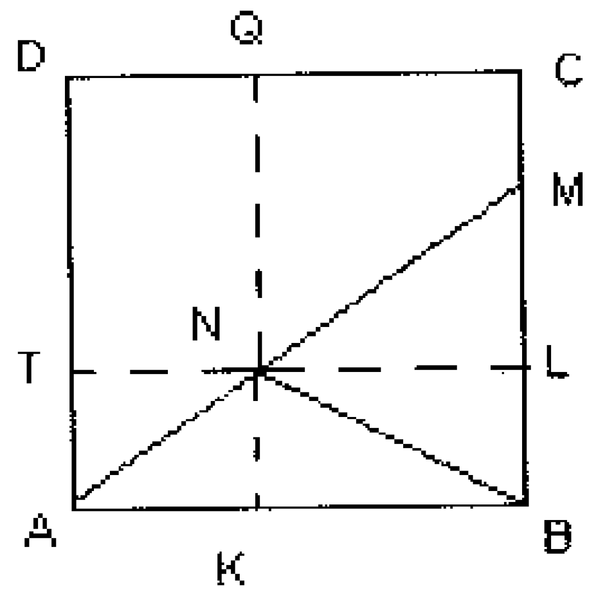
15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 **A = 25(3 точки),** B = 4,5**(2,5 точки), A—**B = 20,5**(0,5 точки)** и 20<20,5<21**(1 точка).**

Зад.2 Страната на квадрата е 16:4=4см**(0,5точки).** Обиколката на ΔABM е 16—4=12см**(0,5точки)** и следователно BM=12—(5+4)=3см**(0,5точки).**



Тогава CM=4—3=1см**(0,5точки).** $S_{AMCD}=\dfrac{(4+1).4}{2}=10$ см^2 **(0,5точки).**

$S_{ABM}=\dfrac{4.3}{2}=6$ см^2 **(0,5точки)**$\Rightarrow S_{ABN}=6:2,5=2,4$ см^2 **(0,5точки)**$\Rightarrow$

$S_{BMN}=S_{ABM}-S_{ABN}=3,6$ см^2 **(0,5точки).**

$S_{ABN}=2,4=\dfrac{4.NK}{2}\Rightarrow NK=1,2$ см**(1 точка)** ⇒NQ=4—1,2=2,8 см**(0,5точки).**

$S_{BMN}=3,6=\dfrac{3.NL}{2}\Rightarrow NL=2,4$ см**(1 точка)** ⇒NT=4—2,4=1,6см**(0,5точки).**

Зад.3 Нека търсеният брой е X= $\overline{123ab}$, където *a, в* са цифри и a,b$\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Щом войниците се строявали в колони по двама, то $2/\overline{123ab}$ ⇒ в=0,2,4,6 или 8. **(1 точка)**
Войниците се строявали в блокове по 7 или 9 човека⇒7/X и 9/X. **(1 точка)**
Нека *в=0* и тъй като 9/X⇒*a*=3, тогава X=12330 не се дели на 7 и не е решение. **(1 точка)**
Нека *в*=2 и тъй като 9/X⇒*a*=1, тогава X=12312 не се дели на 7 и не е решение. **(1 точка)**
Нека *в*=4 и тъй като 9/X⇒*a*=8, тогава X=12384 не се дели на 7 и не е решение. **(1 точка)**
Нека *в*=6 и тъй като 9/X⇒*a*=6, тогава X=12366 не се дели на 7 и не е решение. **(1 точка)**
Нека *в=8*, но 9/X⇒*a*=4 и X=12348 се дели на 7 ⇒ X=12348. **(1 точка)**

Максималният брой точки се дава за логически обоснован отговор.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

VI клас

<u>Зад.1</u> Да се пресметне стойността на израза

$$A=3.\left(\frac{1}{\left((3)^2\right)^2}+\frac{1}{3^3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3-(-3{,}3+1{,}3).\left(\frac{1}{\left(2.(2)^3\right)^2}+\frac{1}{\left((2)^3\right)^3}\right):\left(-\frac{2}{2^3}\right)^4.$$

(7 точки)

<u>Зад.2</u> В резервоар с форма на правоъгълен паралелепипед има вода до височина 3м. Дъното на резервоара е правоъгълник с дължина 8м и ширина 5м. Във водата е потопена метална шестоъгълна пирамида с основен ръб 2 м, височина 250 см и апотема на основата 16дм. С колко сантиметра ще се повиши нивото на водата в резервоара? Колко процента е увеличението на нивото на водата в резервоара спрямо първоначалната височина на водата?

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Докажете, че $\dfrac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=192$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VI клас

Зад.1 A = –1 **(по 0,5 точки за всяко вярно извършено действие, общо 7 точки)**.

Зад.2 8.5.3=120куб.м-обем на водата в резервоара **(1 точка)**

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2.1,6}{2}.6\right).2,5=8$ куб.м-обем на металната пирамида **(2 точки)**

120 +8=128 куб.м-металната пирамида е по-тежка от водата и потъва на дъното, а обемът на изместената от нея вода е равен на обема на пирамидата **(1 точка)**

128=8.5.(3+x), където x е увеличението на нивото на водата в метри⇒128:40=3,2м-височина на водата след потапяне на пирамидата⇒x=3,2–3=0,2м=20см –увеличението на нивото на водата в резервоара **(2 точки)**

(20:300).100=$6\frac{2}{3}$ % е увеличението **(1 точка)**

Зад.3

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{(2^{3n+3}+2^{3n})^2}{(2^{2n}-2^{2n-2})^3}(1,5\ точки)=\frac{(2^{3n}.(2^3+1))^2}{(2^{2n-2}.(2^2-1))^3}(2\ точки)=\frac{2^{6n}.9^2}{2^{6n-6}.3^3}(2\ точки)=$$
$$=2^6.3(1,5\ точки)=192.$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

VII клас

<u>Зад.1</u> Дадени са многочлените А $=(2+x)(x-2)(x^2+4)-(x^2-2)^2$ и В$=(x^2+2)^2-9x^2$.
Намерете нормалния вид на многочлена А.
Разложете на множители многочлена В.

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Дадено е уравнението $\frac{4x+5a}{10}+1=\frac{a+x}{2}+\frac{ax}{5}$, където a е параметър.

а) Решете уравнението, ако $a=2$;
б) Определете стойността на параметъра a, за която уравнението има корен $x=-4$;
в) За коя стойност на параметъра a даденото уравнението е равносилно на уравнението $x+\frac{1}{11}=1$?

(7 точки)

<u>Зад.3</u> CL(L$\in$AB) е ъглополовяща на $\angle$ACB в ΔABC. Права през точка L, успоредна на страната AC, пресича страната BC в точка D. Намерете $\angle$ACB, ако $\angle$DLC е 0,1 от сбора на другите два ъгъла на ΔABC. Намерете ъгъла, който сключват ъглополовящите на два от външните ъгли на дадения триъгълник при върховете A и B.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. “Св.С.Врачански” №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VII клас

Зад.1 A= $4x^2-20$ **(3 точки).**
B=$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ **(4 точки).**

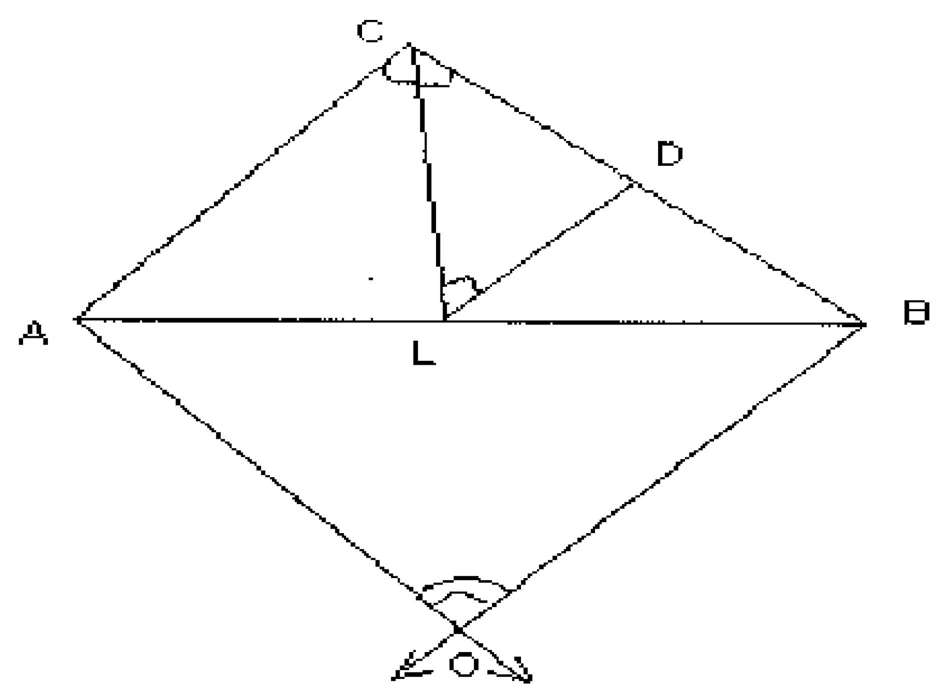
Зад.2 а) $\frac{4x+10}{10}+1=\frac{2+x}{2}+\frac{2x}{5} \Rightarrow$ x=2**(2 точки).**

б) $\frac{4.(-4)+5a}{10}+1=\frac{a+(-4)}{2}+\frac{a(-4)}{5} \Rightarrow a=-\frac{7}{4}$ **(2 точки).**

в) $\frac{4x+5a}{10}+1=\frac{a+x}{2}+\frac{ax}{5} \Rightarrow$ ако $a \neq -\frac{1}{2}$, то x=$\frac{10}{1+2a}$; при $a=-\frac{1}{2}$ уравнението няма решение.

$x+\frac{1}{11}=1 \Rightarrow$ x=$\frac{10}{11}$. Уравненията са еквивалентни при $\frac{10}{1+2a}=\frac{10}{11} \Rightarrow a=5$**(3 точки).**

Зад.3 Нека ∠A=α и ∠B=β.



∠ACL=∠CLD=0,1(α+β) –кръстни ъгли **(1 точка).**
CL-ъглополовяща ⇒∠ACB=2∠ACL=2. 0,1(α+β)**(1 точка).**
∠CAB+∠ABC+∠ACB =180^0⇒ α+β+2. 0,1(α+β)=180^0
⇒1,2(α+β)=180^0⇒α+β=150^0 **(1 точка).**
⇒∠ACB=30^0 **(1 точка).**
AO-ъглополовяща на съседния ъгъл на α⇒∠BAO=$90^0-\frac{\alpha}{2}$ **(1точка).**

BO-ъглополовяща на съседния ъгъл на β⇒∠ABO=$90^0-\frac{\beta}{2}$ **(1 точка).**

От ΔABO намираме ∠AOB=$180^0-(90^0-\frac{\alpha}{2})-(90^0-\frac{\beta}{2})=75^0$, тъй като α+β=$150^0$ **(1 точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

VIII клас

Зад.1 Решете уравнението $8y^2 - 19y + 11 = 0$.

Намерете стойностите на параметъра k, за които уравнението $x^2 - 2(k+2)x + 12k + 6k^2 = 0$ има един двоен реален корен, както и самия корен.

(7 точки)

Зад.2 Даден е квадрат ABCD с център O. Точките E и F са среди съответно на отсечките BC и OD. Да се докаже, че EF=FC=FA.

(7 точки)

Зад.3 Да се пресметне $A = \frac{a^3}{b^3} - 4.\frac{a^2}{b^2} + 4.\frac{a}{b}$, ако $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1 $8y^2-19y+11=0 \Rightarrow y_1=1, y_1=\frac{11}{8}$ **(2 точки)**

$D=-5k^2-8k+4$ **(1 точка)**

$-5k^2-8k+4=0 \Rightarrow k_1=-2, k_2=0,4$ **(2 точки)**

За $k_1=-2$ уравнението $x^2-2(k+2)x+12k+6k^2=0 \Leftrightarrow x^2=0$ -непълно квадратно уравнение с корен $x_{1,2}=0$ **(1 точка)**

За $k_2=0,4$ уравнението $x^2-2(k+2)x+12k+6k^2=0 \Leftrightarrow x^2-4,8x+5,76=0$ -квадратно уравнение с корен $x_{3,4}=2,4$ **(1 точка)**

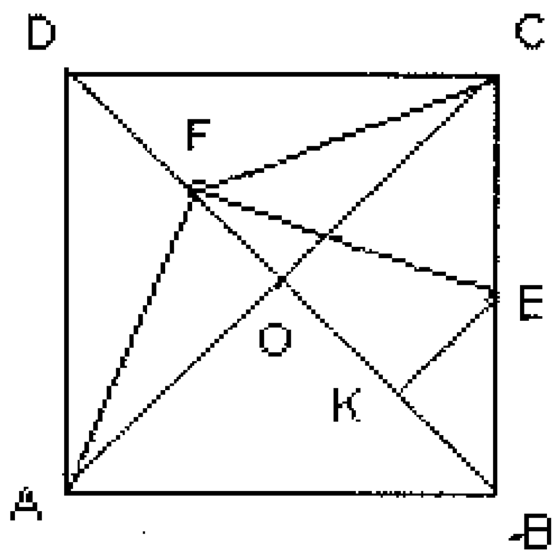
Зад.2 $\Delta AFD \cong \Delta CFD$(I признак)$\Rightarrow AF=FC$ **(1,5 точки)**

ABCD-квадрат$\Rightarrow AO=CO=BO=DO$ и $AC \perp BD$ **(1 точка)**

Нека $EK \perp BD$, $K \in BD \Rightarrow EK \| CO$ **(1 точка)**

EK–средна отсечка в $\Delta OBC \Rightarrow EK=0,5.OC$ и $OK=0,5.BO$ **(1,5 точки)**

$\Delta EKF \cong \Delta FOC$ (I признак)$\Rightarrow EF=FC$ **(2 точки)**



Зад.3 Допустими стойности за a и b: $a, b \neq 0$. **(1 точка)**

Нека $\frac{a}{b}=t \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+1=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **(2точки)**

$\frac{a^3}{b^3}-4.\frac{a^2}{b^2}+4.\frac{a}{b}=t^3-4t^2+4t=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3-4.\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2+4.\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)=1.$ **(4точки)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

IX клас

Зад.1 Решете системата $\begin{vmatrix} 2x^2+x+y-2y^2=-1 \\ 5x^2+x-2y-5y^2=-7 \end{vmatrix}$.

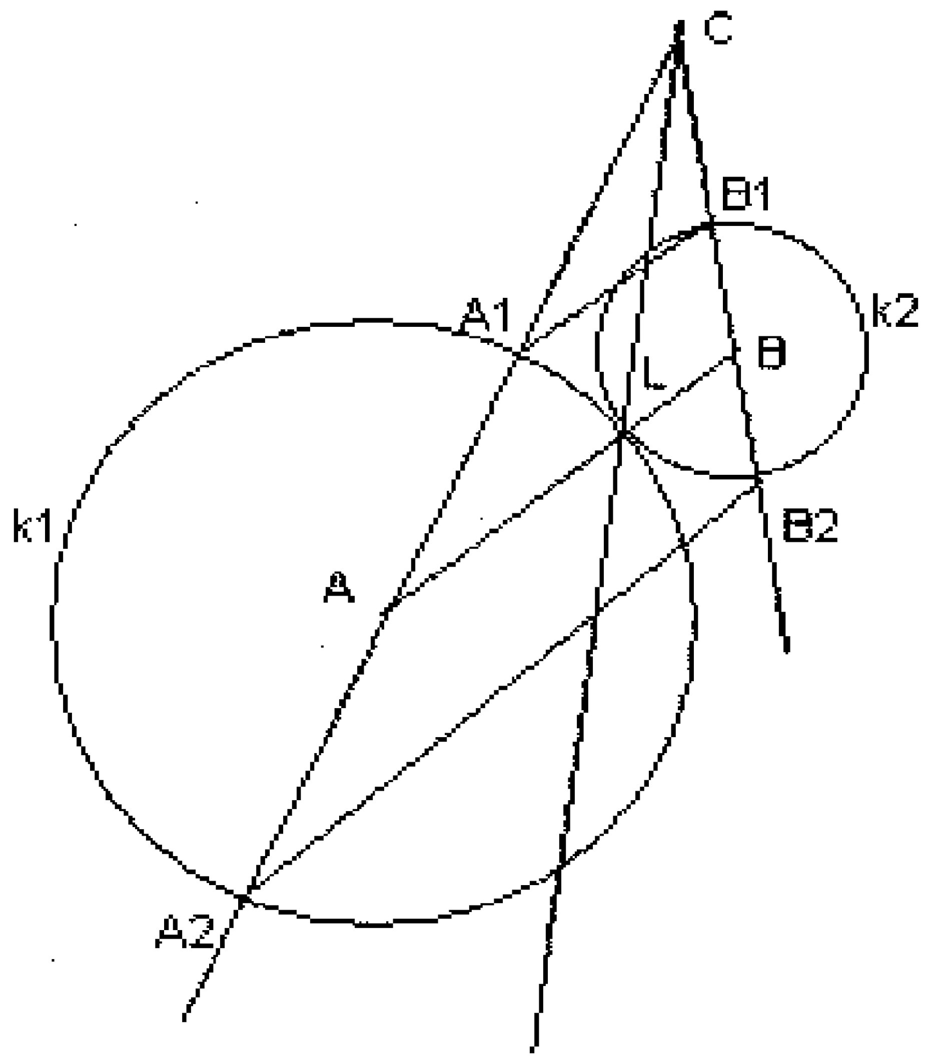
(7 точки)

Зад.2 Да се реши уравнението $\dfrac{2x-m}{x+2}+\dfrac{x+m}{4-x^2}=\dfrac{4x-m}{2x-4}$, където m е реален параметър.

За кои стойности на параметъра m уравнението има корен, който е с 2 по-голям от стойността на m?

(7 точки)

Зад.3 На чертежа правата CL е ъглополовяща на $\angle$C. Окръжностите k_1 и k_2 са съответно с радиуси r_1=AL и r_2=BL. Докажете, че: а)$\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C$; б)$A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$.



(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 $\begin{cases} 2x^2+x+y-2y^2=-1 \\ 5x^2+x-2y-5y^2=-7 \end{cases} \Rightarrow x=3-3y$ **(3 точки)** $\Rightarrow 8y^2-19y+11=0$ **(1,5 точки)**

$\Rightarrow y_1=1,\ y_2=\dfrac{11}{8}$ **(1точка)** $\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{9}{8}$ **(1точка)** $\Rightarrow$ решения са $(0,1);\left(-\dfrac{9}{8};\dfrac{11}{8}\right)$ **(0,5 точки)**

Зад.2 $\dfrac{2x-m}{x+2}+\dfrac{x+m}{4-x^2}=\dfrac{4x-m}{2x-4}$

За определяне на $ДС: x\neq\pm2$ **(0,5 точки)**

За получаване на еквивалентното линейно уравнение $x(m+18)=4m$ **(1 точка)**

За решаване на линейното параметрично уравнение:

при $m=-18$ уравнението няма решение **(0,75 точки)**

при $m\neq-18$ единственият корен на уравнението е $x=\dfrac{4m}{m+18}$ **(0,75 точки)**

За съобразяване на корена с $ДС$:

при $m=18,\ x=2\notin ДС$ и при $m=-6,\ x=-2\notin ДС$ **(2 точки)**

$\dfrac{4m}{m+18}=m+2$ по условие **(0,5 точки)**

За получаване на $m^2+16m+36=0$ **(0,5 точки)**

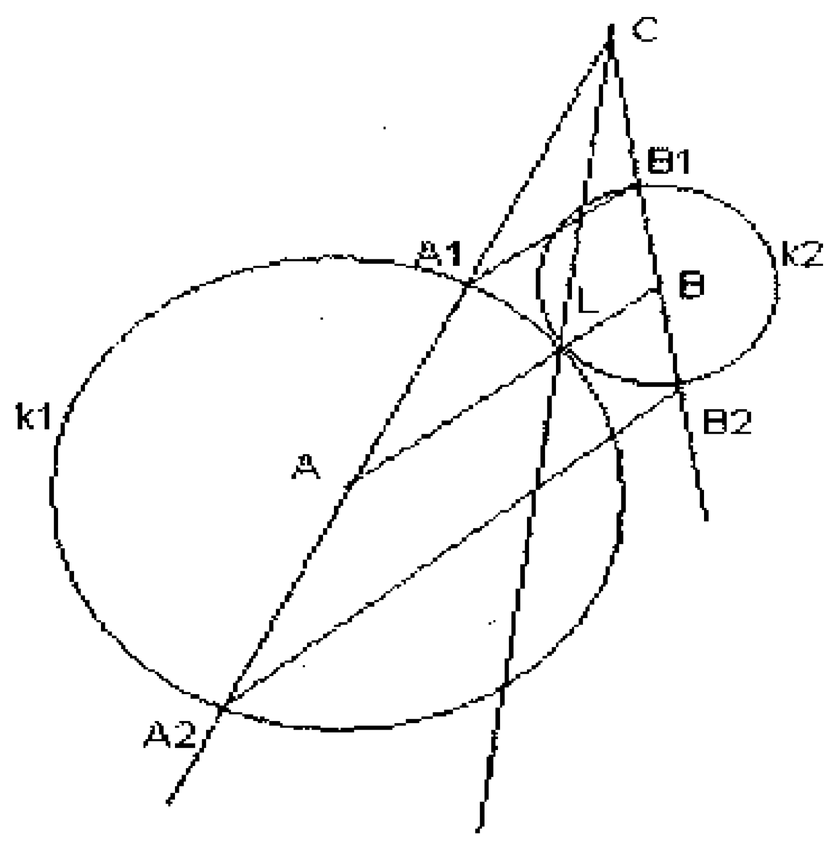
За намиране $m_{1,2}=-8\pm2\sqrt{7}$ **(1 точка)**

Зад.3 $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{AL}{BL}=\dfrac{r_1}{r_2}$ (CL-ъглополовяща в ΔABC)$\Rightarrow CA=\dfrac{r_1}{r_2}.CB$ **(1 точка)**

$\dfrac{CA_1}{CB_1}=\dfrac{CA-AA_1}{CB-BB_1}=\dfrac{\frac{r_1}{r_2}.CB-r_1}{CB-r_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\Rightarrow$

$\dfrac{CA_1}{CB_1}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{r_1}{r_2}\Rightarrow\dfrac{CA_1}{CA}=\dfrac{CB_1}{CB}$ **(1,5 точки)**

$\Rightarrow\Delta A_1B_1C\sim\Delta ABC$ по II признак **(0,5 точки)** и $A_1B_1\|AB$ **(1 точка).**



Аналогично $\dfrac{CA_2}{CB_2}=\dfrac{CA+AA_1}{CB+BB_1}=\dfrac{\frac{r_1}{r_2}.CB+r_1}{CB+r_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\Rightarrow$

$\dfrac{CA_2}{CB_2}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{r_1}{r_2}\Rightarrow\dfrac{CA_2}{CA}=\dfrac{CB_2}{CB}$ **(1,5 точки)**

$\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta A_2B_2C$ по II признак **(0,5 точки)** и $AB\|A_2B_2$ **(1 точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

X клас

Зад.1 Сравнете стойностите на изразите A и B, където

$$A=\frac{(1+x^{\frac{3}{4}})(1-x^{\frac{3}{4}})+\left((x)^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt{2})^{10}}\cdot\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{-3\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad B=\frac{\log_5 11-\log_5 44+\log_5 100}{\log_2 2+2.\log_3 1}.$$

(7 точки)

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=(k+2)x^2+(3k+7)x+3k+5$.

При k=1 да се намерят най-голямата и най-малка стойност на функцията $f(x)$ в интервалите $[1;3]$ и $[-2;-1]$.

При $k=0$ да се реши неравенството $f(x)\leq 0$.

За кои стойности на параметъра k неравенството $f(x)>0$ има за решение всяко x?

(7 точки)

Зад.3 Окръжност, минаваща през върховете A и B на равнобедрен ΔABC, пресича бедрата AC и BC на триъгълника, съответно в точките P и Q. Отсечките AQ и BP се пресичат в точка D, така че $AQ:AD$ = 4:3. Да се намери лицето на ΔDBQ, ако лицето на ΔPQC е равно на 3.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 A=2 (**3 точки**), B=2(**3 точки**) $\Rightarrow$ A=B(**1 точка**).

Зад.2 Намиране върха на параболата $x_o = -\frac{5}{3} \in [-2;-1] \Rightarrow \underset{x\in[-2,-1]}{НМС} f(x) = f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. **(1 точка)**

Определяне на $\underset{x\in[-2,-1]}{НГС} f(x) = f(-1) = 1$ **(1 точка)**

От $f(x)$ - растяща за $x \in [1;3] \Rightarrow \underset{x\in[1,3]}{НМС} f(x) = f(1) = 21$ **(1 точка)**

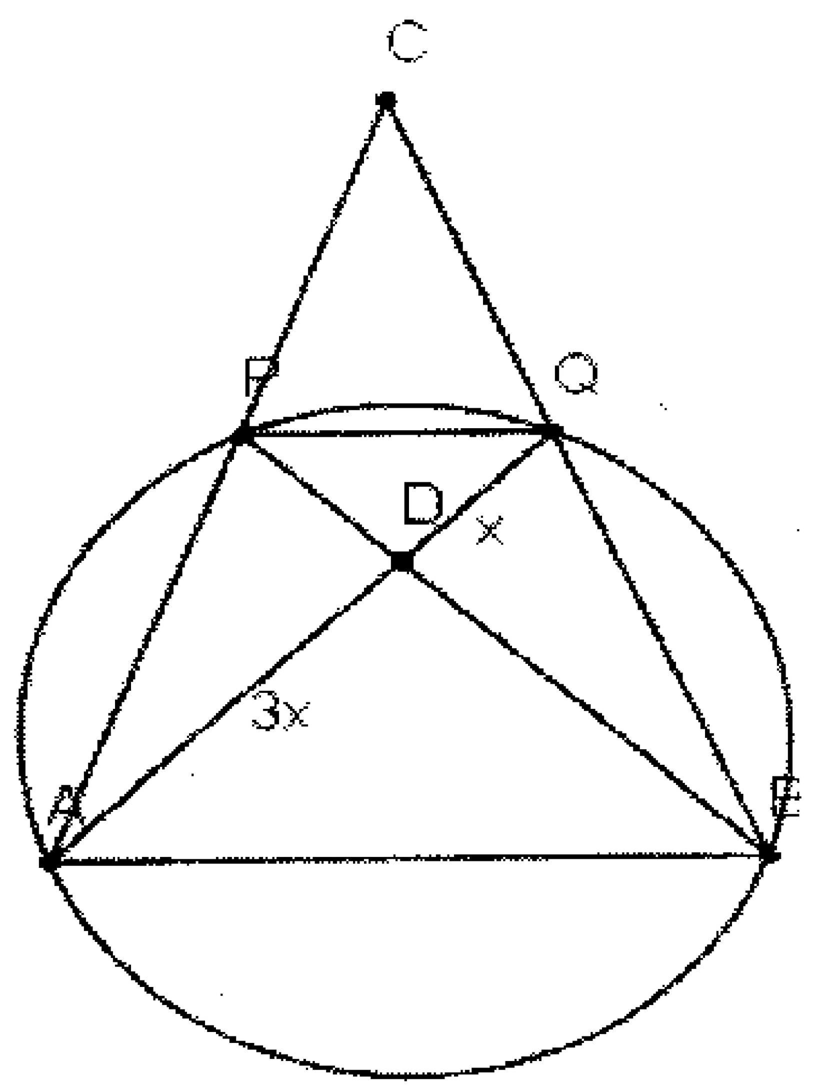
Определяне на $\underset{x\in[1;3]}{НГС} f(x) = f(3) = 65$ **(1 точка)**

При k=0 неравенството $2x^2 + 7x + 5 \le 0$ има решения $x \in \left[-\frac{5}{2};-1\right]$ **(1 точка)**

Съставяне на системата $\left|\begin{array}{l} k+2>0 \\ D=-3k^2-2k+9<0 \end{array}\right.$ **(1 точка)**

Намиране на решенията $k \in \left(\frac{-1+\sqrt{28}}{3};+\infty\right)$ **(1 точка)**

Зад.3 Доказателство, че $ABQP$ е равнобедрен трапец **(1 точка)**



$\frac{S_{DBQ}}{S_{PBQ}} = \frac{3}{4}$ (ΔDBQ и ΔPBQ са с общ връх) $\Rightarrow S_{PBQ} = \frac{4}{3} S_{DBQ}$ (1) **(2 точки)**

$\Delta PQD \sim \Delta BAD$ и $\Delta PQC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{DQ}{AD} = \frac{1}{3}$ **(1 точка)**

$\Rightarrow \frac{CQ}{QB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CQ}{QB} = \frac{S_{PQC}}{S_{PBQ}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{PQC} = \frac{1}{2} S_{PBQ}$ (2) **(1точка)**

От (1) и (2) $\Rightarrow S_{PQC} = \frac{1}{2} S_{PBQ} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3} S_{DBQ} \Rightarrow S_{DBQ} = \frac{3}{2} S_{PQC} = \frac{9}{2}$ **(2 точки)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

XI клас

__Зад.1__ За аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, ...$ са дадени $a_8 = 11{,}2$ и $a_{15} = 19{,}6$. Да се намери прогресията и да се пресметне сумата на членовете, които са по-малки от 30.

(7 точки)

__Зад.2__ В правоъгълния ΔABC с прав ъгъл при върха C и хипотенуза c, CH е височина към хипотенузата, а K, L и M са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците AHC, BHC и ABC. Да се намери радиусът на окръжността, описана около ΔKLM, ако $HB=3AH$.

(7 точки)

__Зад.3__ Да се докаже, че ако $M \neq 1$ и $M>0$, то равенството $\dfrac{\log_a M}{\log_c M} = \dfrac{\log_a M - \log_b M}{\log_b M - \log_c M}$ е изпълнено тогава и само тогава, когато a, b и c са последователни членове на геометрична прогресия.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 За получаване на системата $\begin{vmatrix} a_1+7d=11{,}2 \\ a_1+14d=19{,}6 \end{vmatrix}$ **(1 точка)**

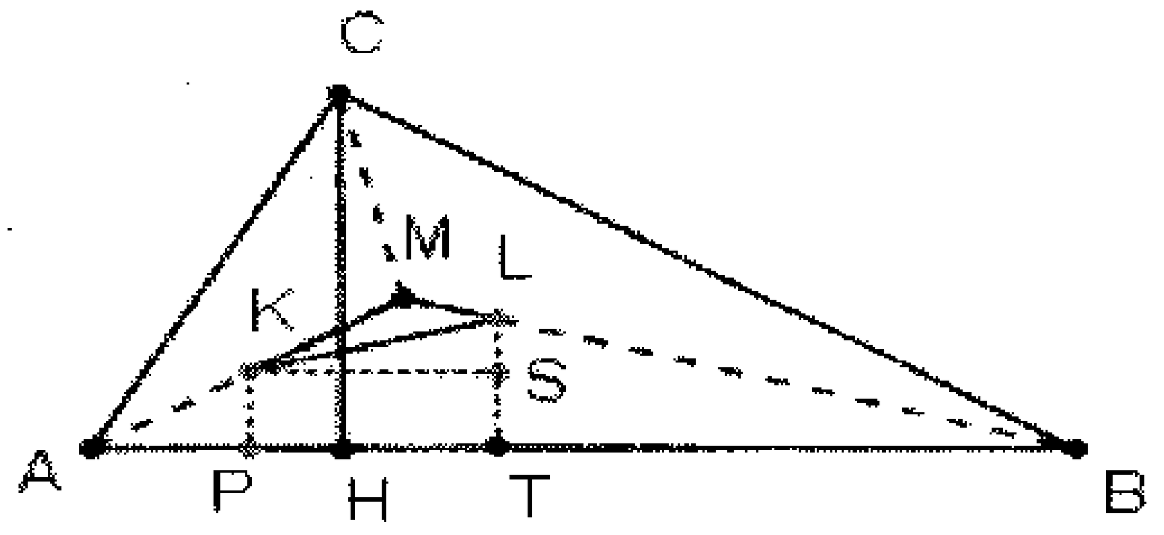
За намиране на решението (2,8; 1,2) **(2 точки)**

За съставяне на неравенството $2{,}8+(n-1).1{,}2<30$ **(1точка)**

Решаване на неравенството и получаване на $n=23$ **(1,5точки)**

За пресмятане на $S_{23}=368$ **(1,5точки)**

Зад.2



т. $M=\ell_{\angle CAB}\cap\ell_{\angle ABC}\Rightarrow\measuredangle AMB=135^\circ$

$K\in AM$, $L\in BM$ **(1точка)**

Нека $AH=m\Rightarrow BH=3m\Rightarrow AB=4m$

и $CH^2=AH.BH=3m^2\Rightarrow CH=m\sqrt{3}$ **(1точка)**

$\Rightarrow$ от $\Delta AHC\Rightarrow tg\alpha=\dfrac{m\sqrt{3}}{m}=\sqrt{3}\Rightarrow\measuredangle CAH=60^\circ$ **(1точка)**

Оттук намираме $AC=2m$, $BC=2\sqrt{3}m$ **(1точка)**

От правоъгълен $\Delta AHC\Rightarrow r_1=HP=KP=p_{AHC}-AC=\dfrac{m\sqrt{3}-m}{2}$,

а от $\Delta BHC\Rightarrow r_2=LT=HT=p_{BHC}-BC=\dfrac{3m-\sqrt{3}m}{2}$ **(1точка)**

От правоъгълен ΔKLS по теорема на Питагор следва, че $KL^2=(r_1+r_2)^2+(r_2-r_1)^2$

$\Rightarrow KL=m\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ **(1точка)**

От синусова теорема за $\Delta KLM\Rightarrow\dfrac{KL}{\sin 135^\circ}=2R\Rightarrow R=m(\sqrt{3}-1)\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}c$ **(1точка).**

Зад.3 $a>0,\ b>0,\ c>0;\ a,\ b,\ c\neq 1\Rightarrow\log_M a,\ \log_M b,\ \log_M c\neq 0$ **(2точки)**

$$\frac{\log_a M}{\log_c M}=\frac{\log_a M-\log_b M}{\log_b M-\log_c M}\Leftrightarrow\frac{\dfrac{1}{\log_M a}}{\dfrac{1}{\log_M c}}=\frac{\dfrac{1}{\log_M a}-\dfrac{1}{\log_M b}}{\dfrac{1}{\log_M b}-\dfrac{1}{\log_M c}}$$ **(2 точки)**

$\Leftrightarrow\log_M b-\log_M a=\log_M c-\log_M b\Leftrightarrow 2\log_M b=\log_M a+\log_M c\Leftrightarrow b^2=ac$ **(2точки)**

$\Leftrightarrow$ a, b и c са последователни членове на геометрична прогресия **(1точка)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

XII клас

Зад.1 Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за която е известно, че $a_3 + a_7 = 24$, $a_2^2 + a_4^2 = a_6^2$ и $S_n = n^2$. Намерете първия член a_1, разликата d и броя n на членовете на прогресията.

Намерете най-малката стойност на функцията $f(x) = ax^2 + bx + c$, където a, b и c са съответно равни на намерените стойности за a_1, d и n.

(7 точки)

Зад.2 Трапец ABCD с периметър 90см и малка основа CD=18см е вписан в окръжност, а диагоналът му BD разполовява $\angle ADC$. Намерете радиуса на описаната окръжност и лицето на трапеца.

(7 точки)

Зад.3 В тетраедъра $ABCD$ стената BCD е перпендикулярна на стената ABC, а ръбът AD сключва с ръбовете AB и AC ъгли с големина 60^o. Ако дължините на ръбовете AB, BC и AC са равни съответно на 2, 4 и 3, да се определят обемът на тетраедъра $ABCD$ и ъгълът между стените ABC и ABD.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

15.03.2009г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XII клас

<u>Зад.1</u> От условията $a_3+a_7=2$ и $a_2^2+a_4^2=a_6^2$ получаваме следните възможни отговори за разликата d на прогресията: $d_1=12, d_2=\frac{4}{3}$, откъдето възможните отговори за първия член на прогресията са: $a_1^I=-36, a_1^{II}=\frac{20}{3}$ **(3 точки).**

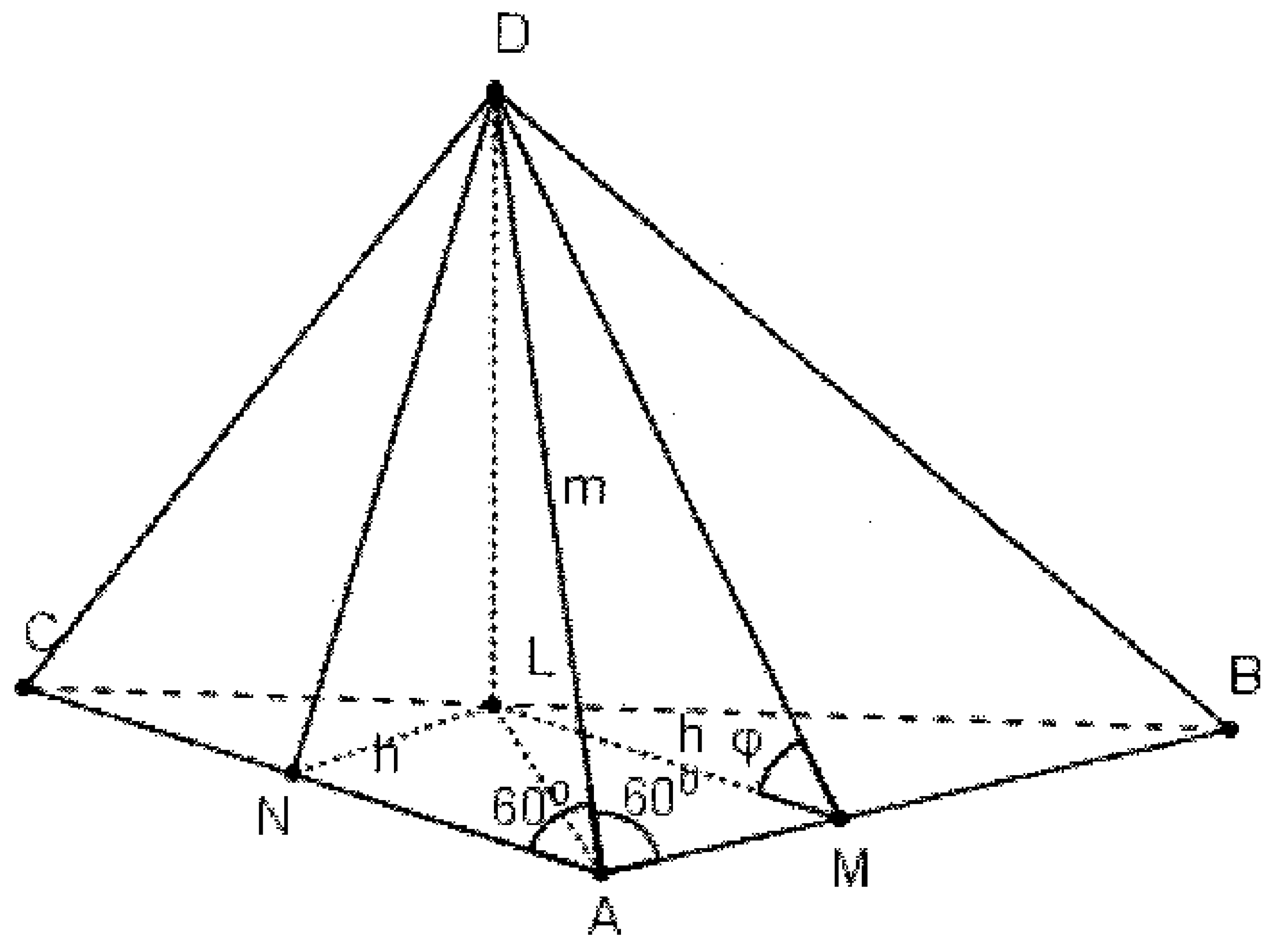
Равенството $S_n=n^2$ води до уравнение, чиито корени не са естествени числа при $d_1=12$ и $a_1^I=-36$ **(1точка).**

Равенството $S_n=n^2$ води до уравнение с корени 0 и 18 при $d_2=\frac{4}{3}$ и $a_1^{II}=\frac{20}{3}$ **(1точка).**

Следователно има единствена аритметична прогресия, удовлетворяваща условието на задачата: $a_1=\frac{20}{3}$, $d=\frac{4}{3}$, $n=18 \Rightarrow f(x)=\frac{20}{3}x^2+\frac{4}{3}x+18$ **(1точка)** и $f_{най}=f\left(-\frac{1}{10}\right)=17\frac{14}{15}$ **(1точка).**

<u>Зад.2</u> ABCD-трапец, вписан в окръжност⇒ ABCD е равнобедрен трапец**(1точка).**
По условие диагоналът BD разполовява $\angle ADC \Rightarrow \Delta DAB$ е равнобедрен**(1точка).**
От P_{ABCD}=90см, CD=18см и AD=AB=BC⇒ AD=AB=BC=24см **(1точка).**
Намиране по Питагорова теорема височината на трапеца $h=\sqrt{24^2-3^2}=\sqrt{567}$ см$=9\sqrt{7}$ см**(1точка).**
$S_{ABCD}=\frac{(18+24)}{2}.9\sqrt{7}=189\sqrt{7}$ см^2 **(1точка).**
Радиусът R =16 см намираме чрез синусова или Питагорова теорема**(2точки).**

<u>Зад.3</u> а) Нека проекцията на т.D в равнината (ABC) е т. L. От условието, че $(ABC)\perp(BCD) \Rightarrow DL\subset(BCD)$ и $DL \perp$ на всяка права от равнината (ABC) **(1 точка).**



Нека $DM\perp AB$ $(M\in AB)$ в равнината (ABD), а $DN\perp AC$ $(N\in AC)$ в равнината (ACD) $\Rightarrow \Delta ADN\cong\Delta ADM$ и нека означим $LN=LM=h$**(1 точка).**
Пресмятане лицето на ΔABC по Херонова формула: $B=\frac{3}{4}\sqrt{15}$ **(1 точка).**

От това, че $S_{ABC}=S_{ACL}+S_{ABL}=$
$=\frac{1}{2}CA.h+\frac{1}{2}BA.h=\frac{1}{2}.5.h \Rightarrow h=\frac{3\sqrt{15}}{10}$ **(1 точка).**

Да означим околния ръб $AD=m$. От правоъгълния $\Delta ADM \Rightarrow AM=\frac{1}{2}m$, а $DM=\frac{\sqrt{3}}{2}m$ **(1 точка).**

От правоъгълен ΔDLM по теорема на Питагор ⇒

$DL^2 = \dfrac{15m^2 - 27}{20}$ (1) **(1 точка).** AL е ъглополовяща в $\Delta ABC \Rightarrow AL^2 = AB.AC - CL.BL$, а от основно свойство на ъглополовящата $\Rightarrow CL = \dfrac{12}{5}$ и $BL = \dfrac{8}{5}$ **(1 точка)**$\Rightarrow AL = \dfrac{3\sqrt{6}}{5}$ **(1 точка).**

От друга страна от правоъгълен ΔADL по теорема на Питагор $\Rightarrow AL^2 = \dfrac{5m^2 + 27}{20}$ **(1 точка)**

$\Rightarrow \dfrac{9.6}{25} = \dfrac{5m^2 + 27}{20} \Rightarrow m = \dfrac{9}{5}$ **(1 точка).** Намираме височината на пирамидата, замествайки в (1) $\Rightarrow DL = \dfrac{3}{5}\sqrt{3}$ **(1 точка)** и за обема получаваме: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}\sqrt{15}.\dfrac{3}{5}\sqrt{3} = \dfrac{9}{20}\sqrt{5}$ **(1 точка).**

$\measuredangle((ABC);(ABD)) = \measuredangle LMD$ **(1 точка).**

От правоъгълен $\Delta LMD \Rightarrow tg\varphi = \dfrac{DL}{ML} \Rightarrow tg\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **(1 точка).**