МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

IV клас

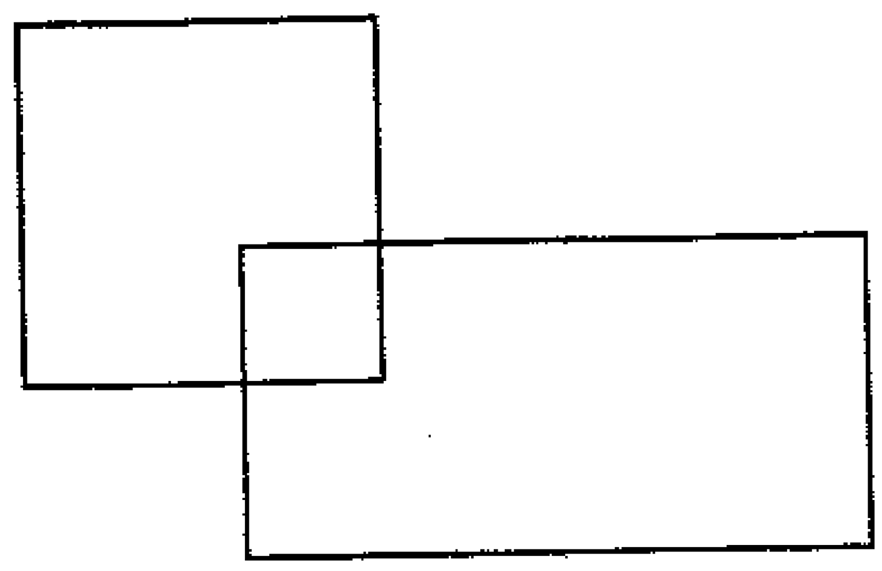
Зад.1 Намерете $(A : 7 + 4 . B + C) - 23.8$, ако:
$A + 1853 = 1567 + 250.4$;
$B = 4867 - 2345 - 20.(3 + 9 : 3) - 2400$;
C е обиколката на правоъгълник (пресметната в метри) със страна 60 дм и лице 486 кв.м.
(7 точки)

Зад.2 В магазин получили 36 кутии с 50 шоколада във всяка от тях и 78 кутии с 80 пасти във всяка. За една седмица продали 632 шоколада и пет пъти повече пасти. Колко шоколада и колко пасти са останали в магазина? С колко продадените пасти са повече от останалите в магазина? Сравнете печалбата от продадените пасти и печалбата от продадените шоколади, ако е известно, че цената на един шоколад е пет пъти по-голяма от цената на една паста.

(7 точки)

Зад.3 Обиколката на квадрат е 108 см. Същата обиколка има и правоъгълник, на който дължината е с 6 см по-голяма от широчината. Намерете лицата на двете фигури.

Намерете лицето и обиколката на фигурата, изобразена на чертежа, получена от квадрата и правоъгълника по показания начин, ако общата им част е квадрат със страна 3 см.



(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IV клас

Зад.1 Намиране на $A = 714$**(1,5точки).**
Намиране на $B = 2$**(1,5точки).**
Превръщане 60 дм = 6 м
Намиране на втората страна на правоъгълника 486 : 6 = 81 м
Намиране на обиколката на правоъгълника $C=2\,.\,(81+6)=174$ м **(1,5точки).**
Пресмятане стойността на израза $(714:7+4\,.2+174)-184=100$**(2,5точки).**

Зад.2 Намиране броя на шоколадите: 36.50 = 1800**(1 точка).**
Намиране броя на пастите: 78.80 = 6240**(1 точка).**
Намиране броя на продадените пасти: 632.5 = 3160**(1 точка).**
Намиране броя на останалите в магазина шоколади: 1800 – 632 = 1168**(1 точка).**
Намиране броя на останалите в магазина пасти: 6240 – 3160 = 3080**(1 точка).**
Намиране с колко продадените пасти са повече от останалите в магазина:
3160 – 3080 = 80**(1 точка).**
Обосновка равенството на печалбата от продадените пасти и печалбата от продадените шоколади**(1 точка).**

Зад.3 Намиране на страната на квадрата: 27см **(1 точка).**
Намиране на дължината и широчината на правоъгълника: 30см и 24см**(2 точки).**
Намиране на лицето на квадрата: 729 кв.см**(1 точка).**
Намиране на лицето на правоъгълника: 720 кв.см**(1 точка).**
Намиране на лицето на фигурата: 729+720–3.3=1440 кв.см**(1 точка).**
Намиране на обиколката на фигурата: 2.108–4.3=204 см**(1 точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

V клас

Зад.1 а) Пресметнете числените стойности на изразите A и B, ако

$A=3{,}02-0{,}02.(4.1{,}5.15-0{,}6:1{,}2)+0{,}5.1{,}2-0{,}5.0{,}2$ и

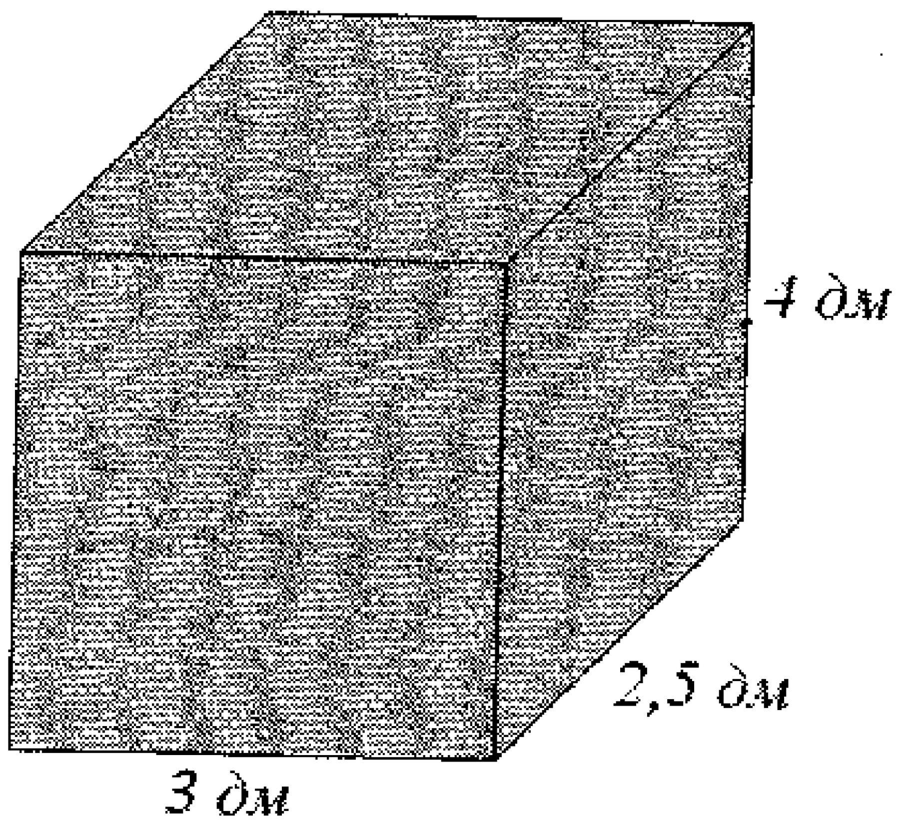
$B=2:(1{,}1+1{,}01+1{,}001+1{,}0001+0{,}9+0{,}99+0{,}999+0{,}9999)$.

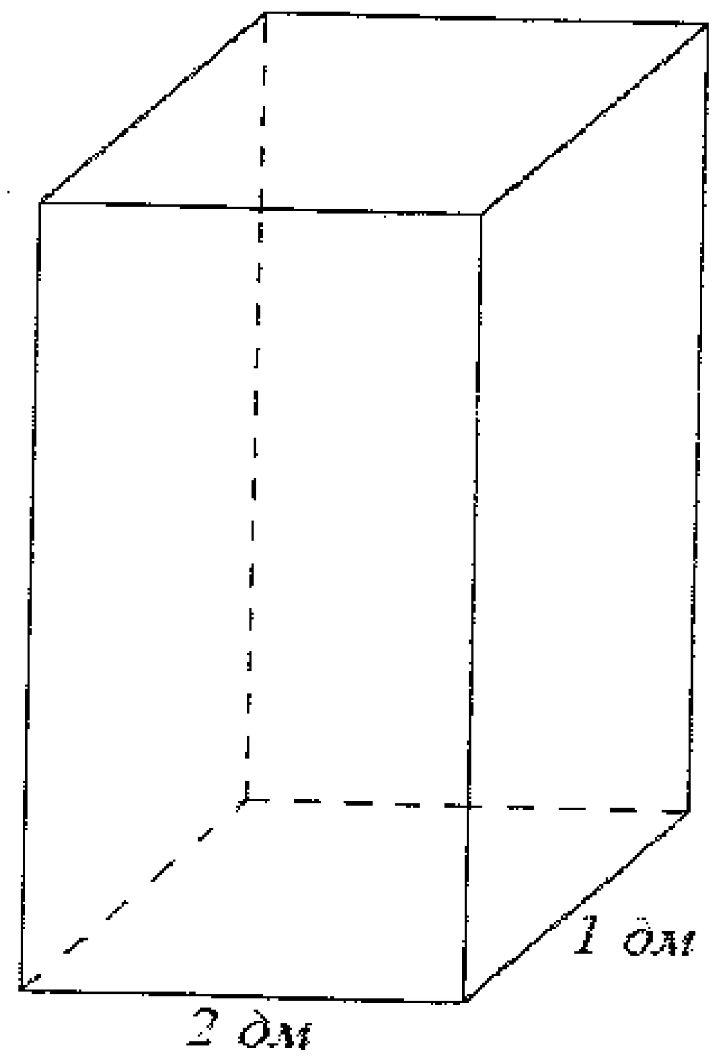
б) Колко трябва да прибавим към A, така че полученият сбор, разделен на B да дава частно 7?

в) Закръглете стойността на израза $A+B$ с точност до 0,1.

(7 точки)

Зад.2 На чертежа са означени размерите на два стъклени съда с форма на правоъгълен паралелепипед, от които първият е пълен с вода. Ако прелеем 0,4 от водата на първия съд във втория, то намерете до колко дециметра ще достигнат височините на водата в първия и втория съд. Колко сантиметра трябва да е най-малко височината на втория съд, за да не прелее водата от него?





(7 точки)

Зад.3 В равнобедрен трапец ABCD(AB||CD) точката M от бедрото BC е на равни разстояния 2см от правите AB и CD. Ако AB=14см и CD=8см, то намерете и сравнете лицата на трапеца $ABCD$ и ΔAMD. Намерете периметъра на $ABCD$, ако разстоянието от точка M до AD е 8,8см.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

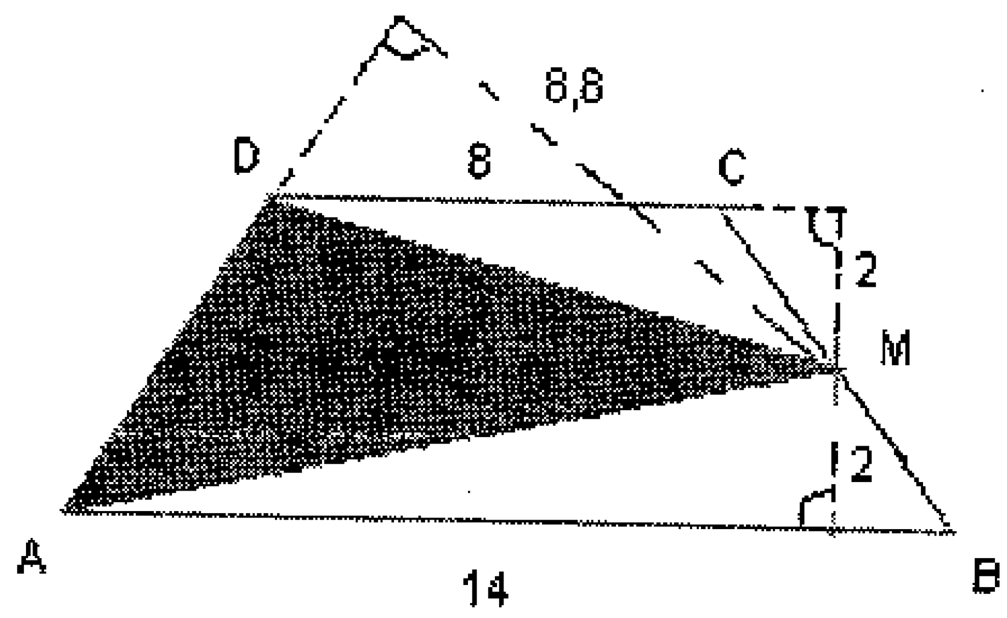
Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 а) $A=3{,}02-0{,}02.(4.1{,}5.15-0{,}6:1{,}2)+0{,}5.1{,}2-0{,}5.0{,}2=1{,}73$ **(2,5 точки).**
$B=2:(1{,}1+1{,}01+1{,}001+1{,}0001+0{,}9+0{,}99+0{,}999+0{,}9999)=0{,}25$ **(1,5точки).**
б) $(A+x):B=7\Rightarrow x=0{,}02$ **(2 точки).**
в) $A+B=1{,}98\Rightarrow A+B\approx 2{,}0=2$ **(1 точка).**

Зад.2 Намиране на обема на първия съд $V_1 = 30$ куб. дм **(1 точка).**
Намиране на 0,4 от обема на първия съд – 12 куб. дм **(1 точка).**
Намиране на обема на водата в първия съд – 18 куб. дм **(1 точка).**
Намиране на височината на водата в първия съд – 2,4 дм **(2 точки).**
Намиране на височината на водата във втория съд – 6 дм **(1,5 точки).**
Вторият съд трябва да е висок най-малко 60 см **(0,5точки).**

Зад.3 $S_{ABCD}=\dfrac{(14+8)}{2}.4=44\ кв.см$ **(1 точка)**



$S_{ABM}=\dfrac{14.2}{2}=14\ кв.см$ **(1 точка)**

$S_{CDM}=\dfrac{8.2}{2}=8\ кв.см$ **(1 точка)**

$S_{AMD}=S_{ABCD}-(S_{ABM}+S_{CDM})=44-22=22\ кв.см$ **(1 точка)**

$S_{AMD}=0{,}5S_{ABCD}\ или\ S_{ABCD}=2S_{AMD}$ **(1 точка)**

$S_{CDM}=\dfrac{AD.h_{AD}}{2}\Rightarrow 22=\dfrac{AD.8{,}8}{2}\Rightarrow AD=5\ см$ **(1 точка)**

$\Rightarrow BC=5см\Rightarrow P_{ABCD}=14+8+2.5=32\ см$ **(1 точка)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

VI клас

Зад.1 Да се намери числената стойност на израза $\dfrac{2|x+y|-(x+|y|)}{x^3-y^2}+p$, ако:

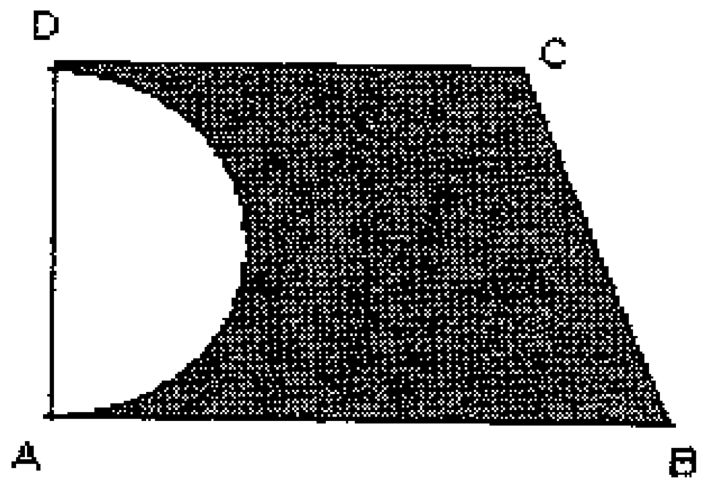
$$x=\frac{\left(19\frac{1}{6}-24\frac{2}{3}\right):\frac{11}{4}}{(11{,}5-13{,}3):(-1{,}8)}-\left(\frac{1}{2{,}5-1}-\frac{1}{3{,}5-1}\right):\left(-\frac{4}{15}\right);$$

$$y=\frac{(-16)^3.27}{24^3.(-2)^2}-20-10:\left(-\frac{1}{2}\right);$$

p е средноаритметичното на числата $-6x$ и $3y$.

(7 точки)

Зад.2 Правоъгълен трапец $ABCD(AB\parallel CD, AD\perp AB)$ има лице S=136 cm^2 и периметър P=52cm. Голямата основа на трапеца е a=20cm, а височината му е h=8cm. С диаметър малкото бедро е построена полуокръжност, вътрешна за трапеца. Намерете лицето S_1 и обиколката P_1 на оцветената фигура.



(7 точки)

Зад.3 Дадена е правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 см. Точката A има абсциса, равна на стойността на израза $\dfrac{1}{2}.\left(7\dfrac{1}{3}+\dfrac{5^n.5^{n+9}-5^{n+1}.5^{n+7}}{\left(5^{n+4}\right)^2+5^{n+3}.5^{n+6}}\right)$(n- цяло число), а ордината й е с 25% по-голяма от абсцисата.

Изобразете в координатната система точката A и точките A_1, A_2 и A_3, съответно симетрични на A спрямо точката O и координатните оси Ox и Oy.

Намерете лицето на четириъгълника $AA_3A_1A_2$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

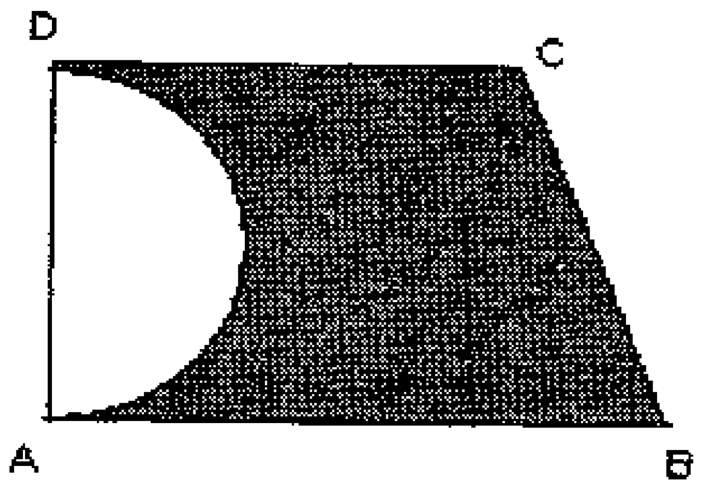
VI клас

Зад.1 Намиране на $x=-1$ **(2 точки)**
Намиране на $y=-2$ **(2 точки)**

Намиране на $p=\dfrac{-6.(-1)+3.(-2)}{2}=0$ **(1 точка)**

Намиране на $\dfrac{2|x+y|-(x+|y|)}{x^3-y^2}+p=-1$ **(2 точки)**

Зад.2 $AD=h=8$ cm**(1 точка)**.



От S=136 cm^2 $\Rightarrow 136=\dfrac{20+CD}{2}.8 \Rightarrow CD=14\ cm$ **(1 точка)**.

От P=52 cm $\Rightarrow 52=20+14+8+CB \Rightarrow CB=10\ cm$ **(1 точка)**.

$\Rightarrow S_1=136-\dfrac{\pi.4^2}{2}=136-8\pi$ cm^2 **(2 точки)** и

$P_1=20+14+10+\dfrac{2.\pi.4}{2}=44+4\pi\ cm$ **(2 точки).**

Зад.3 Намиране на $x=\dfrac{1}{2}.\left(7\dfrac{1}{3}+\dfrac{5^n.5^{n+9}-5^{n+1}.5^{n+7}}{\left(5^{n+4}\right)^2+5^{n+3}.5^{n+6}}\right)=4$**(3,5 точки).**

Намиране на $y=5$**(1 точка).**
Намиране координатите на $A=(4;5)$ и означаването й в Oxy**(0,5 точки).**
Намиране координатите на $A_1=(-4;-5)$ и означаването й в Oxy **(0,5 точки).**
Намиране координатите на $A_2=(4;-5)$ и означаването й в Oxy **(0,5 точки).**
Намиране координатите на $A_3=(-4;5)$ и означаването й в Oxy **(0,5 точки).**
Намиране лицето S на $AA_3A_1A_2$ - правоъгълник с размери 8cm и 10cm: $S=80$ cm^2 **(0,5 точки).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

VII клас

Зад.1 Даден е изразът $A=\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-3\left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)$.

а) Намерете стойността на променливата x, за която $A=\frac{1}{4}$;

б) Намерете решенията на уравнението $|A-0{,}25|=2$;

в) Решете уравнението $4a.A=1$, където a е параметър.

(7 точки)

Зад.2 Даден е $\Delta ABC(AC>BC)$. Ъглополовящите на вътрешния и външния ъгъл при върха С пресичат страната АВ и нейното продължение съответно в точките D и E.

а) Да се докаже, че $\angle ADC > \angle BEC$ и да се определи видът на ΔADC според ъглите му;

б) Ако P и Q са пресечните точки на ъглополовящата на $\angle BEC$ съответно с ъглополовящите на $\angle EDC$ и $\angle ADC$, то намерете ъглите на ΔPQD.

(7 точки)

Зад.3 Ученик трябвало да реши определен брой задачи за 4 седмици. През първата седмица той решил $\frac{1}{6}$ от общия брой задачи и още 5 задачи. През втората – 20% от останалите и още 8 задачи. През третата седмица – 25% от новия остатък и още 9 задачи. За последната седмица му останало да реши $\frac{1}{3}$ от останалите задачи и още 12 задачи. Намерете колко общо задачи е решил ученикът и през коя седмица броят на решените задачи е най голям.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

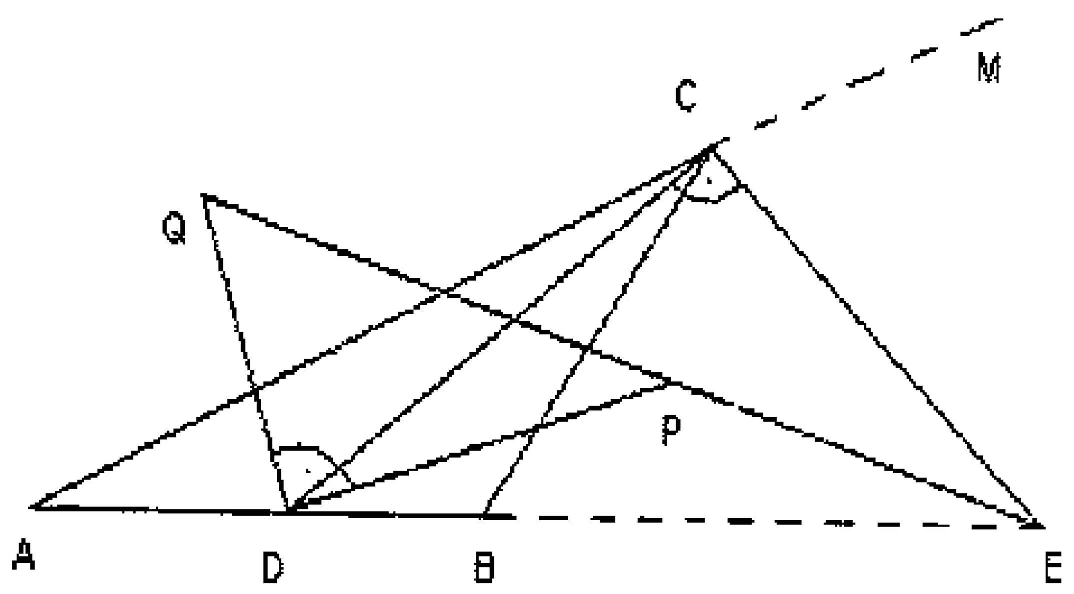
VII клас

Зад.1 а) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-3\left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}-1+x-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x^2+3=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x=-1$ **(3 точки)**; б) $|2x+2|=2\Rightarrow x=0$ *или* $x=-2$ **(2точки)**;

в) $4a\left(2x+\frac{9}{4}\right)=1\Rightarrow 8ax=1-9a\Rightarrow x=\frac{1-9a}{8a}$ *при* $a\neq 0$ *и уравн. няма решение при* $a=0$ **(2точки)**

Зад.2 а) Нека $\angle ACB=\gamma\Rightarrow\angle BCM=180^0-\gamma$(съседен ъгъл на $\angle ACB$) **(0,5точки)**
CD и CE-ъглополовящи по условие
$\Rightarrow\angle DCE=0,5.\gamma+0,5.(180^0-\gamma)=90^0$ **(1 точка)**
$\angle ADC$ е външен ъгъл за ΔDEC
$\Rightarrow\angle ADC>\angle DCE=90^0$ **(0,5точки)** и $\angle ADC>\angle BEC$**(0,5точки)**
$\Rightarrow\Delta ADC$ е тъпоъгълен**(0,5точки)**.



б) Аналогично се доказва, че $\angle QDP=90^0$ **(1,5 точки)**.
Нека $\angle BEC=2x\Rightarrow\angle BEP=\angle CEP=x$**(0,5точки)** и $\angle CDE=90^0-2x$**(0,5точки)**
$\Rightarrow\angle PDE=45^0-x$**(0,5точки)**$\Rightarrow\angle DPQ=45^0-x+x=45^0$(свойство на външния ъгъл $\angle DPQ$ за ΔDEP) **(0,5точки)**$\Rightarrow\angle DQP=45^0$ **(0,5точки)**.

Зад.3 Нека след третата седмица на ученика са му останали x задачи за решаване. Следователно $\frac{1}{3}$x+12=x или x=18 задачи. Нека след втората седмица са му останали y задачи. Тогава 25%y+9+18=y или y=36 задачи. Ако след първата седмица са му останали z задачи, то 20%z+8+36=z или z=55 задачи. Ако броят на всички задачи е p, то $\frac{1}{6}$p+5+55=p или p=72 задачи. Следователно ученикът е решил 72 задачи**(5 точки)**, а през всяка от седмиците е решавал съответно 17, 19, 18 и 18 задачи или най-много задачи е решил през втората седмица **(2точки)**.
/при моделиране с уравнение- за съставен и вярно решен математически модел**(5 точки)**/

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

VIII клас

<u>Зад.1</u> Намерете стойностите на a и b, ако графиката на функцията $f(x)=3ax+b$ пресича абсцисната ос в точка с абсциса $x=\left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}}-\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\right).\frac{1}{\sqrt{12}}$ и ординатната ос в точка с ордината $y=\left(\sqrt{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{3\frac{1}{3}}.\sqrt{1,2}+\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$.

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Точките M, N, P и Q са средите на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника ABCD. Правите AN и CM се пресичат в точка R, а правите AP и CQ се пресичат в точка S. Известно е, че четириъгълникът ARCS е успоредник. Докажете, че:

а) $\Delta MRN \cong \Delta PSQ$;

б) четириъгълникът ABCD също е успоредник.

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Дадено е квадратно уравнение $bx^2-(3b+1)x+2(b+1)=0$, където $b\neq 0$ е реален параметър:

а) За кои стойности на параметъра b уравнението има един двоен корен?

б) Да се реши уравнението при $b=\frac{4^{n+1}-2^{2n}}{2^{2n+1}}$ (n- цяло число);

в) Намерете стойността на параметъра b, за която уравнението има корен $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

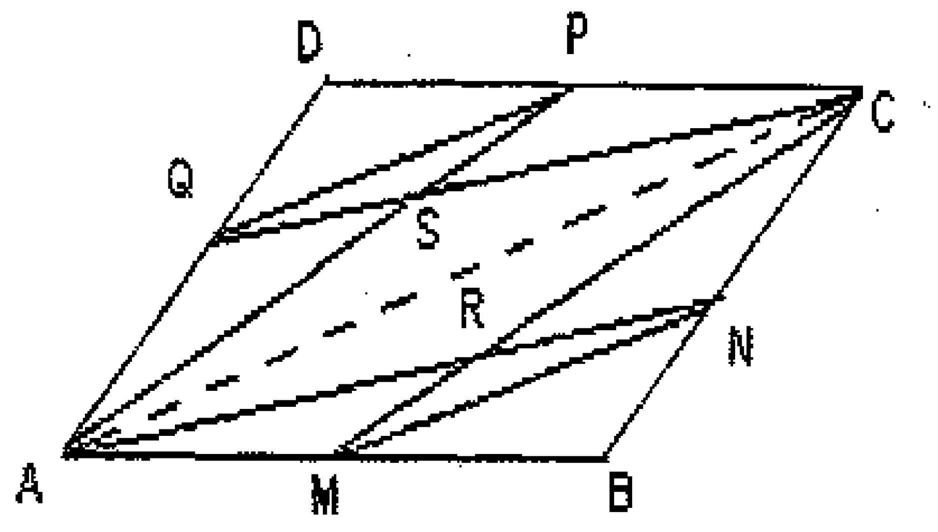
VIII клас

Зад.1. Намиране на $x=\left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}}-\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\right).\frac{1}{\sqrt{12}}=-4$ **(2 точки)** и точката $(-4;0)$- пресечна точка на графиката с абсцисната ос**(0,5 точки)**.

Намиране на $y=\left(\sqrt{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{3\frac{1}{3}}.\sqrt{1,2}+\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=3$ **(2 точки)** и точката $(0;3)$-пресечна точка на графиката с ординатната ос **(0,5 точки)**$\Rightarrow b=3$**(1точка)**

$\Rightarrow a=\frac{1}{4}$ **(1 точка)**, т.е. $f(x)=\frac{3}{4}x+3$.

Зад.2



а) $MN \parallel AC$ *и* $MN=\frac{1}{2}AC(MN-$*средна отс. в* $\Delta ABC)$ **(0,5 точки)**

$QP \parallel AC$ *и* $QP=\frac{1}{2}AC(MN-$*средна отс. в* $\Delta ADC)$ **(0,5 точки)**

$\Rightarrow QP \parallel MN$ *и* $QP=MN$ **(0,5 точки)**

$\angle RMN=\angle RCA=\angle CAS=\angle SPQ$*(кръстни ъгли)* **(0,5 точки)**

$\angle RNM=\angle RAC=\angle ACS=\angle SQP$*(кръстни ъгли)* **(0,5 точки)**

$\Rightarrow \Delta MRN\cong\Delta PSQ$ *(II признак)* **(0,5 точки)**

б) $\Delta MRN\cong\Delta PSQ \Rightarrow SP=MR$ и $QS=RN$ **(0,5 точки)**

ARCS –успоредник по условие $\Rightarrow AS=RC$ и $AS\parallel RC$**(0,5 точки)**

$\Rightarrow AP=AS+SP=CR+MR=MC$**(0,5 точки)** и $AP\parallel MC$**(0,5 точки)**

$\Rightarrow$ AMCP-успоредник **(0,5 точки)**

$\Rightarrow CP=AM$ и $CP\parallel AM$ **(0,5 точки)**$\Rightarrow DC=AB$ и $DC\parallel AB$**(0,5 точки)**

$\Rightarrow$ ABCD също е успоредник**(0,5 точки)**.

Зад.3 а) $D=9b^2+6b+1-8b^2-8b=b^2-2b+1=(b-1)^2$ **(1 точка).**

Уравнението има един двоен корен при D=0$\Rightarrow b=1$ **(1 точка).**

б) $b=\frac{2^{2n+2}-2^{2n}}{2^{2n+1}}=\frac{2^{2n}(4-1)}{2^{2n}.2}=\frac{3}{2}$**(1 точка)**$\Rightarrow\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x+\frac{10}{2}=0\Leftrightarrow 3x^2-11x+10=0$

$D=121-120=1,\quad x_1=2$ или $x_2=\frac{5}{3}$**(1 точка).**

в) $x=\sqrt{\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}=\left|1-\sqrt{2}\right|-\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{2}=-1$ **(2 точки).**

Заместваме в уравнението с $x=-1$ и намираме $b=-\frac{1}{2}$ **(1 точка)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

IX клас

<u>Зад.1</u> Решете уравнението $\dfrac{1}{x^2+2x}-\dfrac{1}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{12}$.

(7 точки)

<u>Зад.2</u> Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2-2k(x-1)-1=0$ са реални, различни и удовлетворяват условието $x_1+x_2=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$.

(7 точки)

<u>Зад.3</u> Даден е остроъгълен ΔABC, за който точка O е център на описаната около триъгълника окръжност, точка H – ортоцентър на триъгълника, а точка M – среда на AB.

а) Да се докаже, че $CH = 2.OM$;

б) Ако точката S е среда на CH, да се докаже, че точките O и S са симетрични точки относно средата на медианата CM.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 Уравнението има смисъл при $x \neq 0, x \neq -1$ *и* $x \neq -2$ **(1 точка).**

Полагаме $x^2 + 2x = z$ **(1 точка)** и получаваме $\dfrac{1}{x^2+2x} - \dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow$

$\dfrac{z^2+z-12}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 12 = 0, z \neq 0, z \neq -1 \Rightarrow z_1 = -4, z_2 = 3$ **(2 точки)**$\Rightarrow x^2 + 2x = -4$ или

$x^2 + 2x = 3$ **(1 точка).**

Уравнението $x^2 + 2x + 4 = 0$ няма реални корени**(1 точка)**, а корените на $x^2 + 2x - 3 = 0$ са $x_1 = -3 \in D$*(дефин.множ.на уравн.)*, $x_2 = 1 \in D$ $\Rightarrow$корените на даденото уравнение са $x_1 = -3, x_2 = 1$ **(1 точка).**

Зад.2 $x^2 - 2k(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2kx + 2k - 1 = 0$ **(1 точка).**

D=$(k-1)^2 \geq 0$ *за* $\forall k$ **(1 точка).**

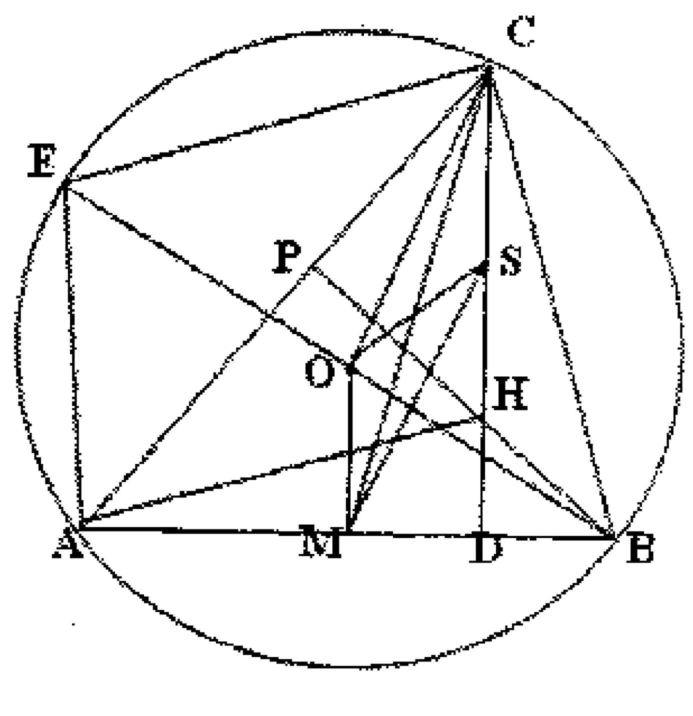
D>0 при k≠1$\Rightarrow x_1$ и x_2 са реални и различни при $\forall$ k≠1 (1) **(1 точка).**

Съгласно формулите на Виет $x_1 + x_2 = 2k$ и $x_1 . x_2 = 2k - 1$ **(1 точка).**

Условието $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow 2k^2 - 3k + 1 = 0$ **(1 точка).**

$\Rightarrow k_1 = 1, k_2 = \dfrac{1}{2}$ (2) **(1 точка).** От (1) и (2) следва, че $k = \dfrac{1}{2}$ **(1 точка).**

Зад.3



а) Точка *M*– среда на хордата *AB*, точка *O*– център на описаната окръжност$\Rightarrow$*OM*$\perp$*AB***(0,5 точки).**

Построяваме диаметъра *BE*$\Rightarrow\angle$*BAE* =$\angle$*BCE*=90°**(0,5 точки).**

OM е средна отсечка в Δ*ABE*$\Rightarrow$AE=2OM**(0,5 точки).**

CH||*AE* (*CH*$\perp$*AB* и *AE*$\perp$*AB*) **(0,5 точки)** и

AH||*CE*(*CE*$\perp$*BC* и *AH*$\perp$*BC*, т.к.*AH* е височина)**(0,5 точки)**

$\Rightarrow$ четириъгълникът *AHCE* е успоредник**(0,5 точки)**$\Rightarrow$*AE* = *CH***(0,5 точки)**

$\Rightarrow$ *CH*=2*OM***(0,5 точки).**

б) Ако точка *S* е среда на *CH*, то *CS*=*SH***(0,5 точки)**
и от доказаното в подусл.а) следва, че *CS*=*OM***(0,5 точки).**

CS||*OM*(*CH*$\perp$*AB* и *OM*$\perp$*AB*) **(0,5 точки)**$\Rightarrow$четириъгълникът *MSCO* е успоредник**(0,5 точки)**
$\Rightarrow$диагоналите *CM* и *OS* взаимно се разполовяват, т.е. точка O и точка S са симетрични относно средата на *CM*(*CM*-медиана) **(1 точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

X клас

Зад.1 Да се опрости изразът $A=\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}.\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$ и да се пресметне стойността му при x=12 и y=32.

(7 точки)

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=(a-1)x^2+ax-3$. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които:

а) Уравнението $f(x)=0$ има само един корен;

б) Неравенството $f(x)<0$ е изпълнено за всяко x;

в) Корените x_1 *и* x_2 на уравнението $f(x)=0$ са реални и $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2>0$

(7 точки)

Зад.3 а) Даден е четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност. Точка M е от диагонала BD, такава, че $\angle MCD=\angle BCA$. Докажете, че $\Delta BMC\sim\Delta ADC$ и $AC.BD=AB.CD+BC.AD$.

б) Даден е правоъгълен триъгълник с катети a и b. Върху хипотенузата на триъгълника, вън от него, е построен квадрат. Да се намери разстоянието от върха на правия ъгъл до центъра на квадрата.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 Изразът има смисъл при $x>0,\ y>0\ и\ x\neq y$ **(1 точка)**.

За получаване на $A=\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}=\dfrac{x+y}{2}$ **(5 точки)**

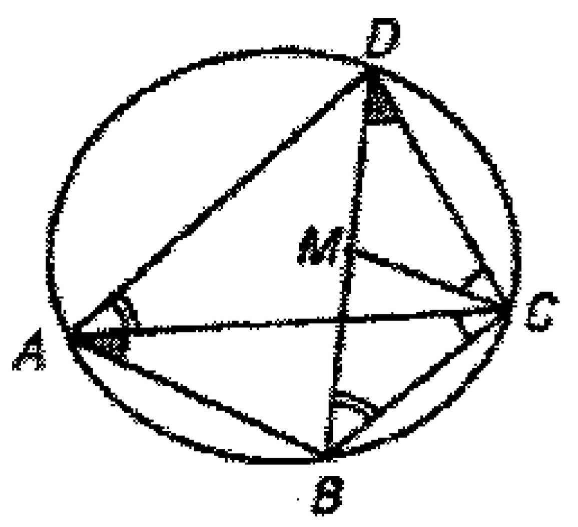
$\Rightarrow A=\dfrac{12+32}{2}=22$ **(1 точка).**

Зад.2 а) За $a=1$ уравнението е линейно и има единствен корен $x=3$ **(0,5точки)**.
При $a\neq 1$ уравнението е квадратното уравнение и има един корен тогава и само тогава, когато $D=a^2+12a-12=0\Rightarrow a_{1,2}=-6\pm 4\sqrt{3}$ **(1точка)**. Следователно даденото уравнение има един корен при $a=1$, $a=-6+4\sqrt{3}$ и $a=-6-4\sqrt{3}$.

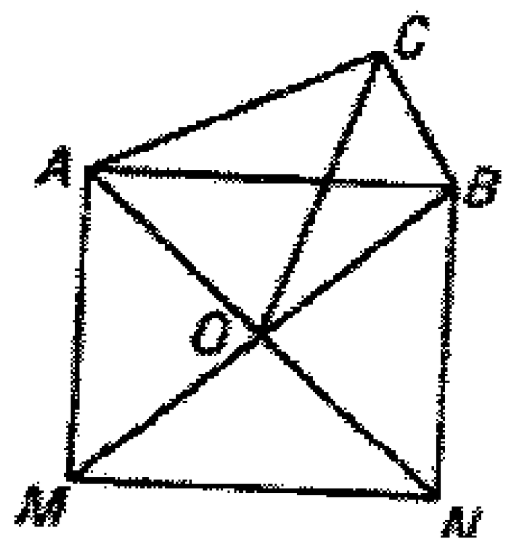
б) $f(x)<0$ за всяко x при $a-1<0$ и $D=a^2+12a-12<0$ **(1 точка)**.
Решението на първото неравенство е $a<1$, а на второто $-6-4\sqrt{3}<a<-6+4\sqrt{3}$.
$-6+4\sqrt{3}<1\Leftrightarrow 4\sqrt{3}<7\Leftrightarrow 48<49\Rightarrow a\in\left(-6-4\sqrt{3};-6+4\sqrt{3}\right)$ **(1,5 точки)**.

в) Корените са реални при $D=a^2+12a-12\geq 0$
$\Rightarrow a\in(-\infty;-6-4\sqrt{3}]\cup[-6+4\sqrt{3};+\infty)$ **(1 точка)**. Съгласно формулите на Виет $x_1+x_2=-\dfrac{a}{a-1}$ и $x_1.x_2=\dfrac{-3}{a-1}$, откъдето $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2>0\Leftrightarrow\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+2>0\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{3(1-a)}>0$
$\Rightarrow a<1$ и $a\neq 0$, т.е. $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ **(1,5 точки)**. Следователно корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x)=0$ са реални и $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2>0$ при $a\in(-\infty;-6-4\sqrt{3}]\cup[-6+4\sqrt{3};1)$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 а) Доказваме, че $\Delta DMC\sim\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{DM}{AB}$
$\Rightarrow AB.DC=AC.DM$ **(1,5 точки)**



Обосноваване на твърдението $\Delta BMC\sim\Delta ADC$
$\Rightarrow\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BM}{AD}\Rightarrow AD.BC=AC.BM$ **(1,5 точки)**
$\Rightarrow AB.DC+AD.BC=AC.DM+AC.BM=AC.(BM+DM)=AC.BD$ **(1точка)**.



б) Нека ΔABC е правоъгълен с катети $BC=a$ и $AC=b$ и AMNB е квадрат с център О, построен върху хипотенузата.

От ΔAOB-равнобедрен правоъгълен триъгълник$\Rightarrow AO=BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$ **(1точка)**.

Тъй като $\angle AOB=\angle ACB=90^0$, то четириъгълникът AOBC е вписан в окръжност и от доказаното в подточка *а)* следва, че $AB.CO=AO.BC+BO.AC=$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB.CB+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB.AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB.(CB+AC)\Rightarrow CO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.(a+b)$ **(2точки)**.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

XI клас

Зад.1 Дадена е редицата с общ член $a_n = n^2 + n - 1$.

а) Да се намерят a_1, a_7 и a_{21}.

б) Да се докаже, че числото 239 е член на редицата и да се намери номерът му.

в) Да се докаже, че редицата е растяща.

(7 точки)

Зад.2 Три положителни числа образуват геометрична прогресия и сумата им е 39. Първото от тях е пети, а второто – осми член на аритметична прогресия, за която сумата на първите девет члена е равна на третото от дадените числа. Да се намерят прогресиите.

(7 точки)

Зад.3 Даден е квадрат *ABCD* с дължина на страната 1. Точка *O* е пресечна точка на диагоналите *AC* и *BD*, а точка *M* е от полуравнината, ограничена от *AB*, в която не лежи *ABCD*. Нека *MA=a*, *MC=c* и разстоянието от точка *M* до *AC* е *d*. Да се докаже, че:

а) $tg\angle AMC = \dfrac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2} = \dfrac{2\sqrt{2}d}{2.MO^2 - 1}$;

б) $tg^2\angle AMC + tg^2\angle BMD = \dfrac{8MO^2}{(2MO^2 - 1)^2}$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 а) $a_1 = 1, a_7 = 55$ *и* $a_{21} = 461$ **(3 точки).**

б) Намиране на $n=15$, т.е. $239 = a_{15}$ **(2 точки).**

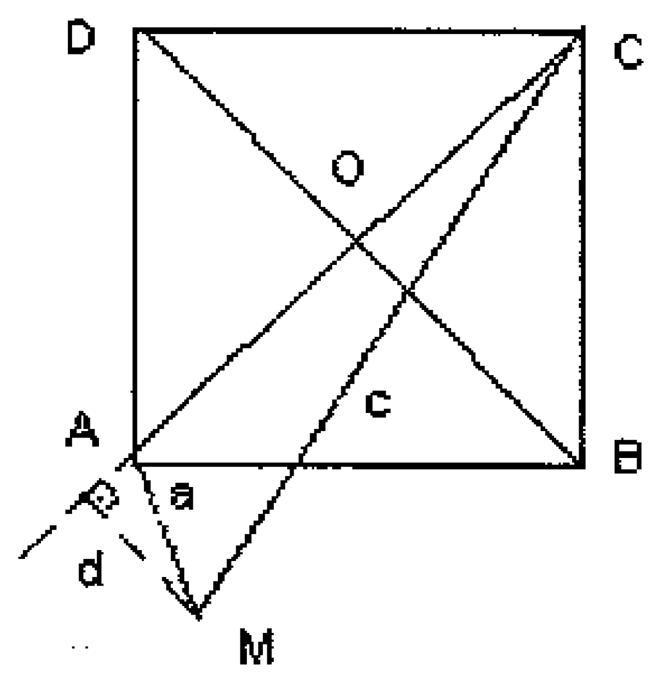
в) $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+1) - 1 - (n^2 + n - 1) = 2n + 2 > 0\ (n \in N) \Rightarrow$ *редицата е растяща* **(2 точки).**

Зад.2 Нека геометричната прогресия е $x, xq, xq^2\ (q > 0)$, а аритметичната прогресия е $b_1, b_1 + d, b_1 + 2d, \ldots\ldots$ **(1точка).** От $S_9 = \frac{2b_1 + 8d}{2} 9 = 9(b_1 + 4d) = 9x$ и $S_9 = xq^2$ намираме $q^2 = 9 \Rightarrow q = 3\ (q > 0)$ **(2 точки).**

От равенствата $x + xq + xq^2 = 39$ и $q = 3$ намираме $x = 3$ **(1точка).**

От $x = b_1 + 4d$ и $xq = b_1 + 7d$ (по условие) получаваме система от две уравнения с две неизвестни**(1точка)**, откъдето $d = \frac{xq - x}{3} = 2$ **(0,5точки)** и $b_1 = \frac{7x - 4xq}{3} = -5$ **(0,5 точки).**

Следователно търсената геометрична прогресия е: 3, 9, 27,… **(0,5 точки);**
Аритметичната прогресия е: -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, ……**(0,5 точки).**



Зад.3 а) $AC = \sqrt{2}$ (Питагорова теорема за ΔABC)**(0,5 точки).**

$\sin\angle AMC = \frac{2S_{AMC}}{ac} = \frac{AC.d}{ac} = \frac{\sqrt{2}d}{ac}$ **(1 точка).**

$\Rightarrow \cos\angle AMC = \frac{a^2 + c^2 - 2}{2ac}$ (Косинусова теорема за ΔAMC) **(1точка).**

$\Rightarrow tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2}$ **(0,5 точки).**

От формулата за медианата MO в ΔAMC получаваме $4MO^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2MO^2 + 1$ **(1 точка)**

$\Rightarrow tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2} = \frac{2\sqrt{2}d}{2MO^2 - 1}$ **(0,5 точки).**

б) $tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{2.MO^2 - 1}$ /доказано в подточка а)/.

Аналогично $tg\angle BMD = \frac{2\sqrt{2}h}{2MO^2 - 1}$, където h е разстоянието от точка M до BD**(1 точка).**

Но $d^2 + h^2 = MO^2$ (Питагорова теорема) **(0,5 точки).**

$\Rightarrow tg^2\angle AMC + tg^2\angle BMD = \frac{8(d^2 + h^2)}{(2MO^2 - 1)^2} = \frac{8MO^2}{(2MO^2 - 1)^2}$ **(1точка).**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28. 02. 2010г.

XII клас

Зад.1 Околният ръб на правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е 5 cm. Лицето на основата му е 360 cm^2 и лицето на сечението DBB_1D_1 е 205 cm^2. Намерете дължините на основните ръбове, обема и лицето на повърхнината на паралелепипеда.

(7 точки)

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{a.x^2+(a+1).x-1}{2a+1}$, където $a\neq 0$ и $a\neq -\dfrac{1}{2}$ (a-реален параметър).

а) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които $5.f(-1)$, $f(0)-a$ и $f(1)$ са последователни членове на аритметична прогресия.

б) За по-голямата стойност на параметъра a, получена в т. а), да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $F(x)=\dfrac{1}{f(\sin x)+2}$ за $x\in[0;2\pi]$, както и стойностите на x, за които те се достигат

(7 точки)

Зад.3 От точка M към равнина α са прекарани перпендикулярът MO и наклонените MA, MB и MC $(O, A, B\ и\ C\in\alpha)$. Ортогоналните проекции на MB и MC са по-малки от проекцията на MA съответно с 33cm и 48cm и $\angle OAM:\angle OBM:\angle OCM=1:2:3$. Намерете дължината на перпендикуляра MO.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2008г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XII клас

__Зад.1__ Намиране на DB=41cm **(1 точка)** и $V=B.h$=360.5=1800 cm^3 **(1 точка)**. Съставяне на системата $\begin{vmatrix} a^2+b^2=41^2 \\ ab=360 \end{vmatrix}$, където с a и b са означени дължините на основните ръбове**(1 точка)**. Получаване на биквадратното уравнение $b^4-1681.b^2+129600=0$ и решенията му $b_1=40, b_2=9$ **(2 точки)**. Определяне на $a_1=9, a_2=40$ **(1 точка)** и S$_1$ = 1210 cm^2 **(1 точка)** /при вярно решаване на системата по друг начин - 3 точки/.

__Зад.2__ а) $f(x)=\dfrac{a.x^2+(a+1).x-1}{2a+1} \Rightarrow f(-1)=\dfrac{a-(a+1)-1}{2a+1}=\dfrac{-2}{2a+1}$ **(0,5 точки)**,

$f(0)=\dfrac{-1}{2a+1}$ **(0,5 точки)**, $f(1)=\dfrac{a+(a+1)-1}{2a+1}=\dfrac{2a}{2a+1}$ **(0,5 точки)**.

Тъй като $5.f(-1)$, $f(0)-a$ и $f(1)$ са последователни членове на аритметична прогресия, то $2(f(0)-a)=5.f(-1)+f(1)$, т.е. $2\left(\dfrac{-1}{2a+1}-a\right)=5.\dfrac{(-2)}{2a+1}+\dfrac{2a}{2a+1} \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow a_1=1$ или $a_2=-2$ **(1 точка)**.

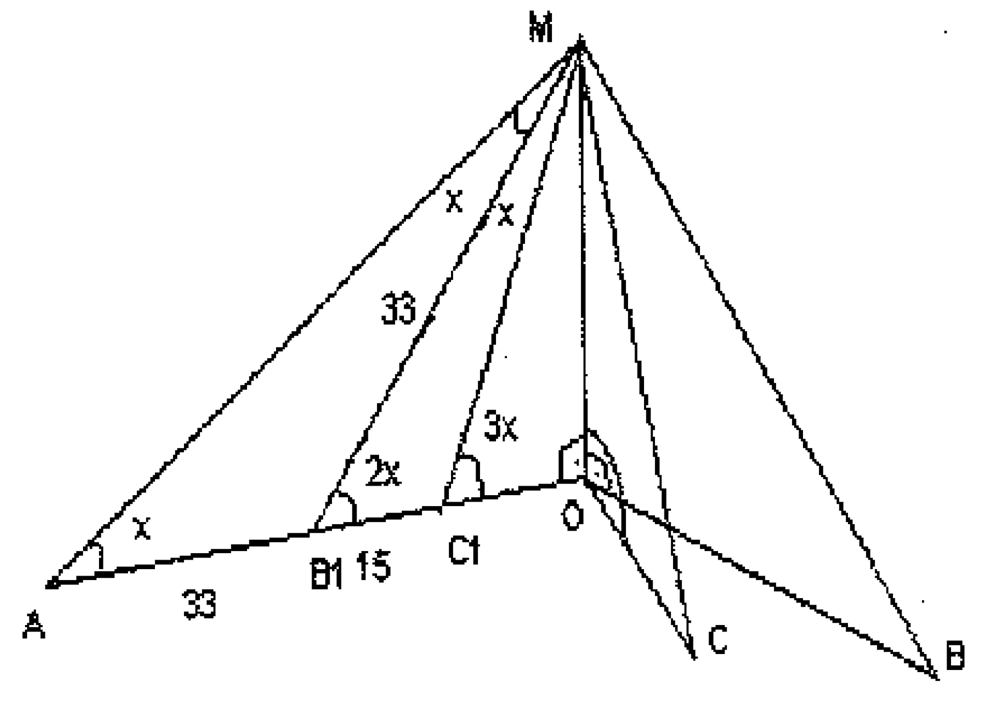
б) Тъй като 1>-2, то $a=1$ и $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$ **(0,5 точки)**, $f(\sin x)=\dfrac{\sin^2 x+2\sin x-1}{3}$ **(0,5 точки)**

$$F(x)=\frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+2\sin x-1}{3}+2}=\frac{3}{\sin^2 x+2\sin x+5}$$, т.е. $F(x)=\dfrac{3}{\sin^2 x+2\sin x+5}$ **(0,5 точки)**.

Разглеждаме функцията $g(t)=t^2+2t+5$, където $\sin x=t$. Ако $x\in[0\,;2\pi]$, то $|\sin x|\le 1$, т.е. $t\in[-1\,;1]$. Следователно търсим НГС и НМС на $g(t)$ за $t\in[-1\,;1]$. Графиката е парабола с връх $V(-1\,;4)$, обърната «нагоре». Тогава $g(t)$ расте в интервала $[-1\,;1]$**(1 точка)**, т.е. НГС $g(t)=g(1)=8$ **(0,5 точки)** и НМС $g(t)=g(-1)=4$ **(0,5 точки)**.

От $4\le g(t)\le 8$ за $\forall t\in[-1\,;1]$ следва, че $\dfrac{3}{8}\le\dfrac{3}{g(t)}\le\dfrac{3}{4}$, т.е. $\dfrac{3}{8}\le F(x)\le\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ НМС $F(x)=\dfrac{3}{8}$ за $\sin x=1$, т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}$ **(0,5точки)** и НГС $F(x)=\dfrac{3}{4}$ за $\sin x=-1$, т.е. $x=\dfrac{3\pi}{2}$ **(0,5 точки)**.

__Зад.3__ Построяваме точки B_1 $(B_1\in OA)$ и C_1 $(C_1\in OA)$, такива, че OB_1=OB и OC_1=OC. От условието на задачата следва, че AB$_1$=33 cm и B_1 C$_1$=15 cm**(1 точка)**.



Означаваме $\angle OAM=x(x>0) \Rightarrow \angle$OB$_1$M=$2x$ и $\angle$OC$_1$M=$3x$ **(0,5 точки)**.

Тъй като $\angle$OB$_1$M е външен за ΔMAB$_1$ $\Rightarrow \angle$AMB$_1$ = x **(0,5 точки)** $\Rightarrow$ AB$_1$ =MB$_1$=33cm **(0,5 точки)**.

Аналогично се доказва, че $\Rightarrow \angle$C$_1$MB$_1$ = x **(0,5 точки)**. От Синусова теорема за ΔB$_1$C$_1$M следва, че $\dfrac{33}{\sin(180^0-3x)}=\dfrac{15}{\sin x}$

$\Rightarrow$ 5sin3x=11sinx $\Rightarrow$ 5(3sinx−4sin^{3}x)=11sinx $\Rightarrow$ sinx= $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **(2 точки)**.

$\Rightarrow$ cox= $\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow$ sin2x=2sinxcosx = $\dfrac{4}{5}$ **(0,5 точки)**.

От правоъгълния ΔOB$_1$M $\Rightarrow \dfrac{OM}{MB_1}=\sin 2x \Rightarrow \dfrac{OM}{33}=\dfrac{4}{5} \Rightarrow OM=\dfrac{132}{5}=26{,}4\ cm$ **(1 точка)**.