

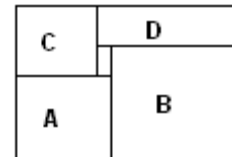
ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

IV клас

Зад.1 Ако числото А е равно на сбора от всички двуцифрени числа с цифра на единиците 6 и $B = 987.6 + 345.6 - (543.5 + (2 + 6 : 2) \cdot 789)$, намерете числото Х така, че разликата на Х и А да е равна на разликата на В и Х.

(7 точки)

Зад.2 Правоъгълникът на фигурата е разделен, както е показано на чертежа, на три квадрата А, В и С, малък правоъгълник със страни 1 см и 2 см и голям правоъгълник D, по-голямата страна на който е 10 см. Намерете обиколката на правоъгълника D и лицето на фигурата. Намерете страната и лицето на квадрат с два пъти по-голяма обиколка от обиколката на правоъгълника D.



(7 точки)

Зад.3 В магазин за един ден продали 3 костюма, 2 рокли и 4 панталона на обща стойност 398 лв. Намерете цената на един костюм, ако една рокля е с 13 лв. по-скъпа от един панталон, а един костюм е с 15 лв. по-скъп от една рокля. Колко костюма, рокли и панталони са продадени на следващия ден, ако оборотът е бил 201 лв.?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

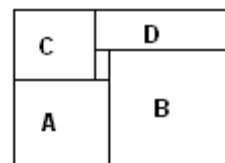
IV клас

Зад.1 Намиране на $A = 504$ (2,5 точки).

Намиране на $B = 1332$ (3,5 точки).

От $X - 504 = 1332 - X \Rightarrow X = 1332 - X + 504 \Rightarrow X = 1836 - X \Rightarrow X = 1836 : 2 = 918$ (1 точка).

Зад.2 Последователно намираме, че страната на квадрата B е $10 - 1 = 9$ см (1 точка), страната на квадрата A е $9 - 2 = 7$ см (1 точка) и страната на квадрата C е $7 - 1 = 6$ см (1 точка). Тогава по-малката страна на правоъгълника D е $6 - 2 = 4$ см (1 точка), а обиколката на D е $(4 + 10) \cdot 2 = 28$ см (0,5 точки). Определяме, че дължината и широчината на фигурата са съответно $9 + 7 = 16$ см и $7 + 6 = 13$ см, а лицето ѝ е $16 \cdot 13 = 208$ кв.см (1 точка). Страната на търсения квадрат е $(28 \cdot 2) : 4 = 14$ см (1 точка), а лицето - $14 \cdot 14 = 196$ кв.см (0,5 точки).



Зад.3 Костюмът струва с $13 + 15 = 28$ лв. повече от един панталон (0,5 точки). За трите костюма са платени $3 \cdot 28 = 84$ лв. повече (0,5 точки), а за двете рокли - $2 \cdot 13 = 26$ лв. повече (0,5 точки) и следователно общо за костюмите и панталоните са дадени $84 + 26 = 110$ лв. повече от панталоните (0,5 точки). Ако приспаднем тези пари от общата сума, то получаваме, че $398 - 110 = 288$ лв. (0,5 точки) са платени за общо $3 + 2 + 4 = 9$ артикула с една и съща цена (0,5 точки) и тогава цената на един панталон е $288 : 9 = 32$ лв. (0,5 точки). Оттук цената на роклята е $32 + 13 = 45$ лв. (1 точка), а цената на костюма е $32 + 28 = 60$ лв. (1 точка). Тъй като $201 = 60 + 45 + 3 \cdot 32$, то сумата 201 лв. може да бъде получена само ако са продадени 1 костюм, 1 рокля и 3 панталона (1,5 точки).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

V клас

Зад.1 Пресметнете

$$a = (6,5 - 0,05) : 1,5;$$

$$b = 24,89 - 1,89.11;$$

$$c = 1,87.2,5 + 2,5.1,23 + 0,25$$

<i>a</i>		<i>b</i>
	<i>c</i>	

и попълнете магическия квадрат така, че във всеки ред, във всеки стълб и по всеки диагонал, сборът от трите записани числа там да е един и същ.

(7 точки)

Зад.2 Дадени са успоредник EFGH и четириъгълник ABCD.

Лицето на успоредника EFGH е 42 кв.см, а обиколката му е 4,2 дм. Ако дължината на едната му височина е 3 см, намерете дължините на другата височина и страните на успоредника.

В четириъгълника ABCD на страната AB са отбелязани точките M и N, така че $AM=MN=NB$, а на страната CD са отбелязани точките P и Q, така че $CP=PQ=QD$. Намерете лицето на четириъгълника ANCQ, ако лицето на $S_{\triangle AMQ} = 3.m \text{ кв.см}$ и $S_{\triangle CPN} = 2.m \text{ кв.см}$, където m е частното от дължините на страните на успоредника EFGH.

(7 точки)

Зад.3 . С три различни цифри a , b и c Виктор съставил всички едноцифрени, двуцифрени и трицифрени числа, в които цифрите a , b и c не се повтарят. След това събрал тези числа и получил сбор 1470. Намерете най-голямото от съставените от Виктор числа.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 Намираме $a = (6,5 - 0,05) : 1,5 = 4,3$ (1 точка); $b = 24,89 - 1,89 \cdot 11 = 4,1$ (1,5 точки);
 $c = 1,87 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 1,23 + 0,25 = 8$ (1,5 точки).

Сборът $4,3 + x + z$ на числата от първия стълб е равен на сбора $4,1 + 8 + z$ на числата по диагонала, откъдето $x = 7,8$ (0,75 точки). Аналогично получаваме, че $4,3 + 8 = 4,1 + y$, следователно $y = 8,2$ (0,75 точки). Тогава сборът на числата във втория ред е $7,8 + 8 + 8,2 = 24$ (0,5 точки) и можем лесно да допълним квадрата до магически (1 точка).

4,3		4,1
x	8	y
z		

$\Rightarrow$

4,3	15,6	4,1
7,8	8	8,2
11,9	0,4	11,7

Зад.2 $S_{EFGH} = a \cdot h_a \Rightarrow 42 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 14$ см (1 точка)

$$P_{EFGH} = 2a + 2b = 4,2 \text{ } \partial M = 42 \text{ см (1 точка)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 14 + 2b = 42 \Rightarrow b = 7 \text{ см (1 точка)}$$

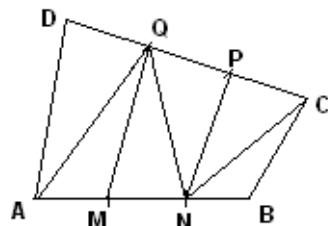
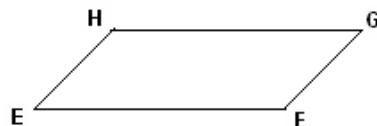
$$S_{EFGH} = b \cdot h_b \Rightarrow 42 = 7 \cdot h_b \Rightarrow h_b = 6 \text{ см (1 точка)}$$

Построяваме отсечката QN и определяме, че

$S_{\Delta AMQ} = S_{\Delta MNQ}$, тъй като триъгълниците имат обща височина през върха Q и равни основи-AM=MN по условие (1 точка).

Аналогично $S_{\Delta QNP} = S_{\Delta CPN}$, тъй като триъгълниците имат обща височина през върха N и равни основи-CP=PQ по условие (1 точка).

Определяме $m = a : b = 14 : 7 = 2$ и тогава $S_{\Delta NCQ} = 2 \cdot (3m + 2m) = 10m = 10 \cdot 2 = 20$ кв.см (1 точка).



Зад.3 С цифрите a , b и c могат да се съставят:

-едноцифрените числа $\underline{a}$, $\underline{b}$ и $\underline{c}$ (1 точка) със сбор $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$;

-двучифрените числа $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$, $\overline{ba} = 10 \cdot b + a$, $\overline{bc} = 10 \cdot b + c$, $\overline{cb} = 10 \cdot c + b$,
 $\overline{ac} = 10 \cdot a + c$ и $\overline{ca} = 10 \cdot c + a$ (1,5 точки) със сбор $22a + 22b + 22c$;

-трицифрените числа $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{acb} = 100a + 10c + b$, $\overline{bac} = 100b + 10a + c$,
 $\overline{bca} = 100b + 10c + a$, $\overline{cab} = 100c + 10a + b$ и $\overline{cba} = 100c + 10b + a$ (1,5 точки) със сбор
 $222a + 222b + 222c$.

Съгласно условието общият сбор $245a + 245b + 245c = 1470$ (1,5 точка), откъдето $a + b + c = 6$ (0,5 точки). Тъй като цифрите са различни, това е възможно само, ако те са равни на 1, 2 и 3 (0,5 точки). Следователно най-голямото число, което Виктор е написал, е 321 (0,5 точки).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

VI клас

Зад.1 а) Опростете израза $A = -5^2 \cdot 7^9 \cdot \left(-\frac{25^2 \cdot b^3}{15^2 \cdot (7ab^2)^3} \right)^3 \cdot c^{-2}$

и пресметнете стойността му за $a = -1$, $b = 1\frac{2}{3}$ и $c = -\frac{3}{5}$.

б) Намерете неизвестното число x в равенството $((456 - 1,2 \cdot x) \cdot 0,3) : 14,4 - 4,4 = 5,6$.

(7 точки)

Зад.2 Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD . Върху страните AB , BC , CD и AD са взети съответно точки M , N , P и Q така, че $AM = \frac{3}{4}AB$, $CN = \frac{1}{4}CB$, $CP = \frac{3}{4}CD$ и $AQ = \frac{1}{4}AD$. Ако лицето на трапеца е 308 cm^2 , намерете лицата на четириъгълниците $AMCP$ и $ANCQ$.

Намерете радиуса на кръг, лицето на който е число, средноаритметично на лицата на четириъгълниците $AMCP$ и $ANCQ$ $\left(\pi \approx \frac{22}{7} \right)$.

(7 точки)

Зад.3 В правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 cm са дадени точките $A(2;1)$ и $B(5;3)$. Определете координатите на всички точки C , които имат абсцисата или ординатата на точката A и такива, че триъгълникът с върхове A , B и C да е равнобедрен с бедра AB и BC . Намерете лицето на $\Delta.ABC$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VI клас

Зад.1 а) Намиране на $A = -5^2 \cdot 7^9 \cdot \left(-\frac{25^2 \cdot b^3}{15^2 \cdot (7ab^2)^3} \right)^3 \cdot c^{-2} = \frac{5^8}{3^6 \cdot a^9 \cdot b^9 \cdot c^2} = -15$ **(3,5 точки).**

б) Последователно намираме $((456 - 1,2 \cdot x) \cdot 0,3) : 14,4 = 10 \Leftrightarrow$
 $((456 - 1,2 \cdot x) \cdot 0,3) = 144 \Leftrightarrow 456 - 1,2 \cdot x = 480 \Leftrightarrow 1,2 \cdot x = -24 \Leftrightarrow x = -20$ **(3,5 точки).**

Зад.2 $AMCP$ е трапец с височина, равна на височината h на трапеца $ABCD$ **(1 точка).**

$$\Rightarrow S_{AMCP} = \frac{AM + CP}{2} \cdot h = \frac{\frac{3}{4}AB + \frac{3}{4}CD}{2} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{AB + CD}{2} \cdot h \right) = \frac{3}{4} \cdot S_{ABCD} = \frac{3}{4} \cdot 308 = 231 \text{ cm}^2 \text{ (1 точка).}$$

$S_{ACQ} = \frac{1}{4} \cdot S_{ACD}$, тъй като двата триъгълника имат равни височини от

върха C и $AQ = \frac{1}{4}AD$ по условие **(1 точка).**

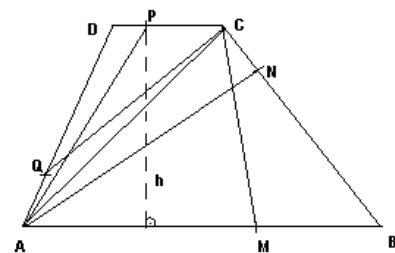
Аналогично $S_{ANC} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC}$, тъй като двата триъгълника имат равни

височини от върха A и $CN = \frac{1}{4}CB$ по условие **(1 точка).**

$$\Rightarrow S_{ANCQ} = S_{ANC} + S_{ACQ} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot S_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABCD} \Rightarrow S_{ANCQ} = \frac{1}{4} \cdot 308 = 77 \text{ cm}^2 \text{ (1 точка).}$$

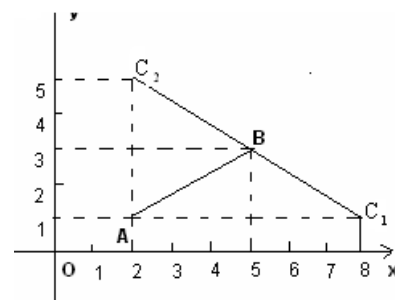
$$S_{кръг} = \frac{S_{AMCP} + S_{ANCQ}}{2} = \frac{231 + 77}{2} = 154 \text{ cm}^2 \text{ по условие (1 точка).}$$

$$\Rightarrow S_{кръг} = \pi \cdot R^2 \Rightarrow \frac{22}{7} \cdot R^2 = 154 \Rightarrow R = 7 \text{ cm (1 точка).}$$



Зад.3 Правилно определяне положението на точките $A(2;1)$, $B(5;3)$ и намиране на точките, които удовлетворяват условието на задачата: $C_1(8;1)$ и $C_2(2;5)$ **(4 точки).**

$$S_{ABC_1} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}^2 \text{ и } S_{ABC_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2 \text{ (3 точки).}$$



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

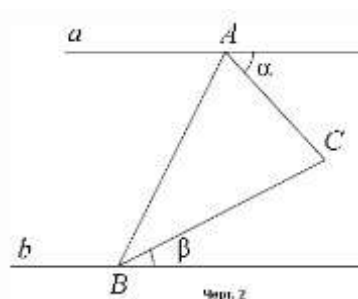
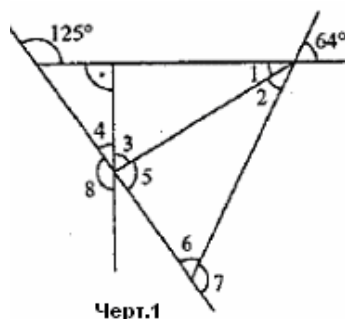
VII клас

Зад.1 а) Разложете на множители израза $xy^2 + 2y^2 - 9x - 18$.

б) Ако $x + y = 2$, то намерете числената стойност на израза $A = x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy$.
(7 точки)

Зад.2 Намерете градусните мерки на $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5$, $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 7$ и $\sphericalangle 8$, като използвате данните на **чертеж 1**, ако $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

На **чертеж 2** правите a и b , построени през върховете A и B на $\triangle ABC$, са успоредни. Ако $\alpha + \beta = 80^\circ$ и $\angle ABC : \angle BAC = 2 : 3$, намерете ъглите на $\triangle ABC$.



(7 точки)

Зад.3 От град A за град B , разстоянието между които е 60 km, пътуват велосипедист и мотоциклетист. Скоростта на велосипедиста е 20 km/h, а на мотоциклетиста 2,5 пъти по-голяма от скоростта на велосипедиста. Мотоциклетистът тръгнал от град A след велосипедиста, но двамата пристигнали едновременно в B . На какво разстояние от A е бил велосипедистът в момента, в който е тръгнал мотоциклетистът? Колко време след тръгването на велосипедиста е тръгнал мотоциклетистът?

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VII клас

Зад.1 а) $xy^2 + 2y^2 - 9x - 18 = y^2(x+2) - 9(x+2) = (x+2)(y^2 - 9)$ **(1 точка)** $= (x+2)(y-3)(y+3)$ **(1 точка).**

б) $A = x^4 + y^4 - x^3y^2 - x^2y^3 + 16xy = x^4 + y^4 - x^2y^2(x+y) + 16xy = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 16xy$ **(1 точка)**
 $= (x^2 - y^2)^2 + 16xy$ **(1 точка)** $= (x+y)^2(x-y)^2 + 16xy = 4(x-y)^2 + 16xy$ **(1 точка)** $= 4(x^2 - 2xy + y^2 + 4xy)$ **(1 точка)** $= 4(x^2 + 2xy + y^2) = 4(x+y)^2 = 16$ **(1 точка).**

Зад.2 $\sphericalangle 1 = 32^\circ$, $\sphericalangle 2 = 32^\circ$, $\sphericalangle 3 = 58^\circ$, $\sphericalangle 4 = 35^\circ$, $\sphericalangle 5 = 87^\circ$, $\sphericalangle 6 = 61^\circ$, $\sphericalangle 7 = 119^\circ$ и $\sphericalangle 8 = 145^\circ$ **(по 0,5 точки за всеки верен и обоснован отговор- общо 4 точки).**

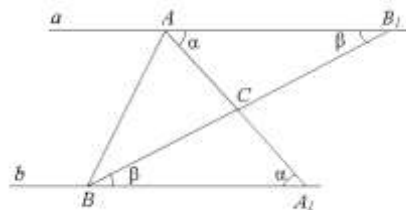
Продължаване на AC или BC до пресичането им съответно с b или a и получаване на $\triangle BCA_1$ ($A_1 \in b$) или $\triangle ACB_1$ ($B_1 \in a$) и обосноваване намиране на $\angle BCA_1 = 100^\circ$ или $\angle ACB_1 = 100^\circ$ **(0,5 точки).**

Намиране на $\angle ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ /съседен ъгъл/ **(0,5 точки).**

Изразяване на $\angle ABC = 2x$ и $\angle BAC = 3x$ **(0,5 точки).**

Използване на Теоремата за сбора на ъглите в триъгълник за $\triangle ABC$: $2x + 3x + 80^\circ = 180^\circ$ и намиране на $x = 20^\circ$ **(0,5 точки).**

Намиране на $\angle ABC = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ **(0,5 точки)** и $\angle BAC = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ **(0,5 точки).**



Зад.3 Намиране на скоростта на мотоциклетиста – $2,5 \cdot 20 = 50$ km/h **(0,5 точки).**

Означаване с $x(x > 0)$ разстоянието, на което се намира велосипедистът от град A в момента, в който от A тръгва мотоциклетистът **(0,5 точки).**

Определяне на пътя, който остава на велосипедиста до град B: $(60 - x)$ km **(1 точка).**

Определяне на времето за изминаване на този път от велосипедиста : $\frac{60-x}{20} h$ **(1 точка).**

Определяне на времето на мотоциклетиста за изминаване на разстоянието от град A до град B: $\frac{60}{50} h$ **(1 точка).**

Съставяне на математически модел $\frac{60-x}{20} = \frac{60}{50}$ и намиране на $x = 36$ km **(2 точки).**

Намиране времето, което е пътувал велосипедистът до тръгването на моториста $\frac{36}{20} h$ или 1 h и 48 min **(1 точка).**

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

VIII клас

Зад.1 а) Определете броя на корените на уравнението $x^2 - 2(k+2)x + 12k + k^2 = 0$ в зависимост от стойностите на реалния параметър k .

Решете уравнението при $k = 0,05$. А, където

$$A = (\sqrt{27} + \sqrt{0,48} - \sqrt{1,47})\sqrt{3} + (\sqrt{28} + \sqrt{0,0175}) : \sqrt{7} - \sqrt{0,0225}.$$

За кои стойности на параметъра k произведението от корените на уравнението е 0?
(7 точки)

Зад.2 В $\triangle ABC$ точките M и N са съответно средите на страните BC и AB , точката D лежи на страната BC , а P е пресечната точка на правите AD и MN .

Да се докаже че:

- а) Ако AD е ъглополовяща на $\angle CAB$, то $AP \perp BP$;
- б) Ако $AP \perp BP$, то AD е ъглополовяща на $\angle CAB$.

(7 точки)

Зад.3 Дадена е функцията $f(x) = ax - 2b$. Намерете a и b така, че произведението ab да е възможно най-малко и точката $A(1; -8)$ да лежи на графиката на $f(x)$.

Да се намери линейна функция $g(x)$, чиято графика е успоредна на графиката на функцията $f(x)$ и пресича ъглополовящата на втори и четвърти квадрант в точка с абсциса $x=5$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1. а) $D = 4 - 8k \Rightarrow$ уравнението има два корена при $k < \frac{1}{2}$, един двоен корен при $k = \frac{1}{2}$ и

няма решение при $k > 0,5$ (**1,5 точки**).

$$k = 0,05. A = 0,05. ((\sqrt{27} + \sqrt{0,48} - \sqrt{1,47})\sqrt{3} + (\sqrt{28} + \sqrt{0,0175}) : \sqrt{7} - \sqrt{0,0225}) = \\ = 0,05.(9 + 1,2 - 2,1 + 2 + 0,05 - 0,15) = 0,5 \text{ (3 точки).}$$

При $k = 0,5$ получаваме уравнението

$$x^2 - 5x + 6,25 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (1 точка).}$$

От $x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, т. е числото 0 е корен на уравнението $\Rightarrow f(0) = k^2 + 12k = 0 \Rightarrow k = 0$ или $k = -12$ (**1,5 точки**).

Зад.2 а) От AD е ъглополовяща на $\angle CAB$ следва, че $\angle PAN = \angle PAC$

Но $MN \parallel AC$ (MN – средна отс. в $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle PAC = \angle APN$ (кръстни ъгли)

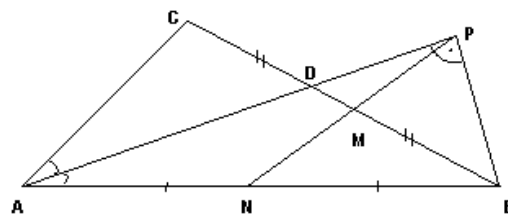
$\Rightarrow \angle PAN = \angle APN$ ($\triangle ANP$ – равнобедрен)

$\Rightarrow AN = NP$

($AN = NP$ по доказателство, $AN = NB$ по условие)

$\Rightarrow \triangle ABP$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P .

$\Rightarrow AP \perp BP$ (**3,5 точки**).



б) От $AP \perp BP$ следва, че $\triangle ABP$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха P .

$\Rightarrow AN = NB = NP$ (свойство на медианата към хипотенузата)

$\Rightarrow \angle PAN = \angle APN$ ($\triangle ANP$ – равнобедрен)

Но $MN \parallel AC$ (MN – средна отс. в $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle PAC = \angle APN$ (кръстни ъгли)

$\Rightarrow \angle PAN = \angle PAC$

$\Rightarrow AD$ е ъглополовяща на $\angle CAB$ (**3,5 точки**).

Зад.3 От $A(1; -8) \in f(x) \Rightarrow a - 2b = -8$ (**1 точка**) $\Rightarrow$ Произведението

$$ab = (2b - 8)b = 2 \cdot ((b - 2)^2 - 4) \text{ е минимално при } b = 2 \text{ (2 точки)} \Rightarrow a = -4 \text{ (0,5 точки).}$$

Тъй като $g(x)$ е линейна функция, то $g(x) = cx + d$ (**0,5 точки**). От това, че графиката на $g(x)$ е успоредна на графиката на $f(x)$ следва, че $c = -4$ (**0,5 точки**). Графиката на функцията $u(x) = -x$ е ъглополовяща на втори и четвърти квадрант (**0,5 точки**). Точката $B(x = 5; y)$ принадлежи на графиките на $g(x)$ и $u(x)$ (**0,5 точки**) $\Rightarrow u(5) = -5$ (**0,5 точки**) и $g(5) = -4 \cdot 5 + d = -5 \Leftrightarrow d = 15$ (**0,5 точки**). Следователно $g(x) = -4x + 15$ (**0,5 точки**).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

IX клас

Зад.1 Намерете най-малкия от корените на уравнението $(x^2 + x + 1)^4 - 10(x^2 + x + 1)^2 + 9 = 0$.
(7 точки)

Зад.2 Намерете:

а) квадратно уравнение, единият от корените на което е равен на сумата, а другият на произведението от корените на уравнението $ax^2 + bx + c = 0$;

б) стойностите на параметъра k , за които равенството

$$\left(x^2 + x + 1 + \frac{k}{x-1}\right)\left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ при } x \neq \pm 1 \text{ е тъждество.}$$

(7 точки)

Зад.3 Окръжностите k_1 и k_2 с центрове съответно O_1 и O_2 се пресичат в точките A и B . Точките A и B лежат от различни страни на права l , пресичаща окръжността k_1 в точките C и D , а окръжността k_2 в точките E и F , така че точката E е между C и D , а точката D е между E и F . Докажете, че:

а) $\angle CAE = \angle DBF$;

б) $\angle DBE + \angle CAF = 180^\circ$

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 Полагаме $t = (x^2 + x + 1)^2$ **(0,5 точки)** и тогава уравнението

$$(x^2 + x + 1)^4 - 10(x^2 + x + 1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 9$$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = \pm 1$ или $x^2 + x + 1 = \pm 3$ **(2 точки)**.

Уравненията $x^2 + x + 2 = 0$ и $x^2 + x + 4 = 0$ нямат реални корени **(2 точки)**.

Корените на $x^2 + x = 0$ са $x_1 = 0, x_2 = -1$ **(1 точка)**, а корените на $x^2 + x - 2 = 0$ са

$x_3 = 1, x_4 = -2$ **(1 точка)** $\Rightarrow$ най-малкият корен на даденото уравнение е $x = -2$ **(0,5 точки)**.

Зад.2 а) Нека търсеното уравнение е $y^2 + py + q = 0$ с корени $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1 x_2$.

Съгласно формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ за уравнението $ax^2 + bx + c = 0$

(0,5 точки) и $y_1 + y_2 = -p$, $y_1 y_2 = q$ за уравнението $y^2 + py + q = 0$ **(0,5 точки)**

$\Rightarrow p = -(y_1 + y_2) = \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}$ **(1 точка)**, $q = y_1 y_2 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = -\frac{bc}{a^2}$ **(1 точка)** и получаваме

уравнението $y^2 + \frac{b-c}{a}y - \frac{bc}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 y^2 + a(b-c)y - bc = 0$ **(0,5 точки)**.

б) Преобразуваме лявата страна на равенството и

получаваме $\left(x^2 + x + 1 + \frac{k}{x-1}\right)\left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right) = (x^2 + x + 1)\frac{x^3 - 1 + k}{x+1}$ **(1,5 точки)**.

Тъй като $x^2 + x + 1 > 0$ за $\forall x$ **(1 точка)**, то равенството

$$(x^2 + x + 1)\frac{x^3 - 1 + k}{x+1} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ е тъждество, когато } \frac{x^3 - 1 + k}{x+1} =$$

$$= (x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^3 - 1 + k = x^3 + 1 \Rightarrow k = 2 \text{ **(1 точка)** .}$$

Зад.3 а) Нека $\angle CAE = x$, $\angle DBF = y$ и $\angle EFB = \alpha$.

$\angle EFB = \angle EAB = \alpha$ (вписани ъгли) **(1 точка)**.

$\angle CAB = \angle CAE + \angle EAB = x + \alpha = \angle CDB$ (вписани ъгли) **(1 точка)**.

$\angle CDB = \angle DBF + \angle BFD$ (външен ъгъл) $= y + \alpha \Rightarrow x + \alpha = y + \alpha$

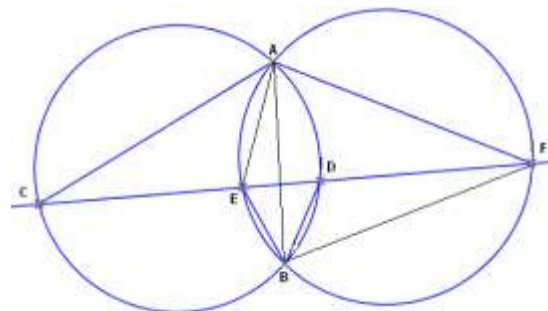
$\Rightarrow x = y \Leftrightarrow \angle CAE = \angle DBF$ **(1 точка)**.

б) В $\triangle ACF$ е изпълнено $\angle CAF + \angle ACF + \angle CFA = 180^\circ$

(1 точка), но $\angle ACF = \angle ACD = \angle ABD$ (вписани ъгли) **(1**

точка) и $\angle CFA = \angle EFA = \angle EBA$ (вписани ъгли) **(1 точка)**.

От $\angle CAF + \angle ABD + \angle EBA = 180^\circ$ и $\angle ABD + \angle EBA = \angle DBE \Rightarrow \angle DBE + \angle CAF = 180^\circ$ **(1 точка)**.



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.
X клас

Зад.1 Намерете стойностите на x и y , за които $\frac{1}{1-y} < \frac{1}{\frac{y}{2}-1}$ и $y = 2^x$.

(7 точки)

Зад.2 Дадена е квадратната функция $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k+5$, където k е параметър.

- а) Да се намери за кои стойности на k уравнението $f(x) = 0$ има реални корени;
- б) Да се намери за кои стойности на k неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x ;
- в) Да се реши уравнението $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k+5 = 0$ за

$$k = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right).$$

(7 точки)

Зад.3 В трапеца ABCD ($AB \parallel CD$ и $AB > CD$) е вписана полуокръжност с радиус $r=12$ cm, така че центърът ѝ точката O лежи на AB. Намерете периметъра на трапеца, ако $OC=13$ cm и $OD=15$ cm.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

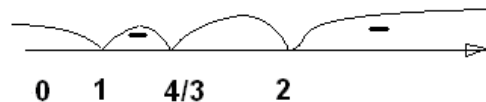
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 $\frac{1}{1-y} < \frac{1}{\frac{y}{2}-1} \Leftrightarrow \frac{3y-4}{(1-y)(y-2)} < 0$ и $y \neq 1$; $y \neq 2$



$\Rightarrow 1 < y < \frac{4}{3}$ или $y > 2 \Rightarrow y \in \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ (**4 точки**).

От $1 < y < \frac{4}{3}$ или $y > 2 \Rightarrow 1 < 2^x < \frac{4}{3}$ или $2^x > 2^1 \Rightarrow 0 < x < \log_2 \frac{4}{3}$ или $x > 1 \Rightarrow$

$x \in \left(0; \log_2 \frac{4}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ (**3 точки**).

Зад.2 а) Ако $D \geq 0$, то уравнението $f(x) = 0$ има реални корени (**0,5 точки**).

От $D = k^2 + 8k + 16 - 4(k-1)(2k+5) = -7k^2 - 4k + 36 \geq 0 \Rightarrow k \in \left[-\frac{18}{7}; 2\right]$ (**1 точка**).

От $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k+5$ -квадратна функция

$\Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow k \in \left[-\frac{18}{7}; 1\right) \cup (1; 2]$ (**0,5 точки**).

б) Ако $D < 0$ и $a > 0$, то $f(x) > 0$ за всяко x (**0,5 точки**).

$$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-1 > 0 \\ 7k^2 + 4k - 36 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \in \left(-\infty; -\frac{18}{7}\right) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow k \in (2; +\infty) \text{ (**2 точки**)}$$

в) $k = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} \right) = 2$ (**2 точки**)

$\Rightarrow f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k+5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x=3$ (**0,5 точки**).

Зад.3 Нека $OM \perp CD$, $BP \perp OC$ и $AN \perp OD$. От правоъгълния $\triangle OMC$ следва

$MC^2 = OC^2 - OM^2 = 13^2 - 12^2 = 25cm$, откъдето $MC = 5cm$ (**1 точка**). От правоъгълния $\triangle OMD$

следва $MD^2 = OD^2 - OM^2 = 15^2 - 12^2 = 81cm$, откъдето $MD = 9cm$

(**1 точка**). $\triangle OCM \cong \triangle OCQ \Rightarrow \angle OCM = \angle OCQ = \alpha$ и

$\angle OCM = \angle BOC = \alpha$ (кръстни ъгли) $\Rightarrow \triangle OBC$ - равнобедрен $\Rightarrow OB = BC$

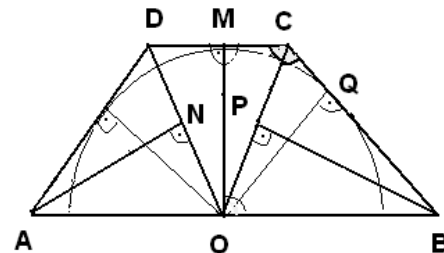
(**1 точка**) и $OP = PC = 6,5$ (**0,5 точки**).

Аналогично се доказва, че $AO = AD$ (**1 точка**).

От $\triangle OBP \sim \triangle COM \Rightarrow \frac{BO}{CO} = \frac{OP}{MC}$

$\Rightarrow \frac{BO}{13} = \frac{6,5}{5} \Rightarrow BO = 16,9cm = BC$ (**1 точка**)

По аналогичен начин намираме, че $AO = 12,5cm = AD$ (**1 точка**) $\Rightarrow P_{ABCD} = 72,8cm$ (**0,5 точки**).



XI клас

Зад.1 Да се намери частното на геометрична прогресия, за която $a_1 + a_3 = \frac{37}{8}$ и $a_5 = 162$.

(7 точки)

Зад.2 В $\triangle ABC$ точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, точката M е средата на страната AB . Описаната около $\triangle AMO$ окръжност пресича страната AC в точка K . Ако $AK=3$, $MK=4$ и $\angle AOM=45^\circ$, намерете дължините на страните на триъгълника.

(7 точки)

Зад.3 Дадена е редицата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, дефинирана чрез равенствата

$$a_1 = 3 \text{ и } a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4.$$

- а) Да се намери a_4 ;
- б) Да се докаже, че числото 1808 е член на редицата и да се намери номерът му.
- в) Да се докаже, че редицата е монотонно растяща и неограничена отгоре.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 От условието имаме $a_1(1+q^2) = \frac{37}{8}$ (1точка) и $a_1q^4 = 162$ (1точка). След почленно

разделяне на двете уравнения намираме $\frac{1+q^2}{q^4} = \frac{37}{6^4}$ (1точка). След полагане на $t = q^2 \geq 0$,

получаваме квадратното уравнение $37t^2 - 6^4t - 6^4 = 0$ (1точка), което има само един неотрицателен корен $t = 36$ (2точка) $\Rightarrow q = \pm 6$ (1точка).

Зад.2 $\angle AOM = 45^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$ или $\angle ACB = 135^\circ$ (2 точки)

От OM- симетрала на AB (1 точка)

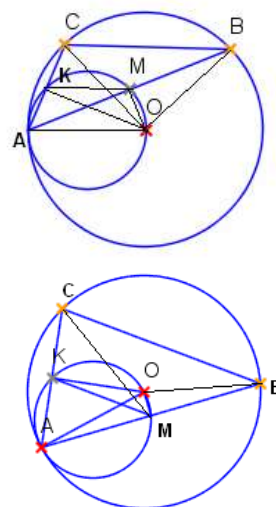
$\Rightarrow OK$ е симетрала на AC $\Rightarrow AC = 2 \cdot AK = 2 \cdot 3 = 6$ (1 точка)

MK-средна отсечка $\Rightarrow BC = 2 \cdot MK = 2 \cdot 4 = 8$ (1 точка).

От косинусова теорема за AB намираме

$$AB^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{100 - 48\sqrt{2}} \text{ (1 точка) или}$$

$$AB^2 = 36 + 64 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}} \text{ (1 точка).}$$



Зад.3 а) $a_2 = a_1^2 - 3a_1 + 4 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 4$,

$$a_3 = a_2^2 - 3a_2 + 4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 8, \quad a_4 = a_3^2 - 3a_3 + 4 = 8^2 - 3 \cdot 8 + 4 = 44$$

(1,5 точки)

$$\text{б) } a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4 \Leftrightarrow 1808 = a_n^2 - 3a_n + 4 \Rightarrow a_n^2 - 3a_n - 1804 = 0$$

$$\text{Но } a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4 = \left(a_n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \Rightarrow a_n = 44 \Rightarrow a_n = a_4 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow n+1 = 5,$$

т.е. числото 1808 е пети член в редицата (2 точки)

$$\text{в) } a_{n+1} - a_n = (a_n^2 - 3a_n + 4) - a_n = (a_n - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{редицата е монотонно растяща (1,5 точки)}$$

Ще докажем по индукция, че $a_n \geq n+2$ за $\forall n = 1, 2, 3, \dots$.

Неравенството е вярно при $n=1$.

Допускаме, че то е вярно при $n=k \geq 1$, т.е. $a_k \geq k+2$. От $k \geq 1 \Rightarrow k^2 \geq 1$.

Ще докажем твърдението за $n=k+1$. От условието и допускането следва

$$a_{k+1} = a_k(a_k - 3) + 4 \geq (k+2)(k-1) + 4 = k^2 + k + 2 \geq 1 + k + 2 = k+3.$$

Следователно $a_n \geq n+2$ за $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, т.е. редицата е неограничена отгоре (2 точки)

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
12.02.2011 г.

XII клас

Зад.1 Обемът на правилна триъгълна пирамида е $18\sqrt{3}$, а височината ѝ е равна на 6. Намерете повърхнината на пирамидата и разстоянието от връх на основата до противоположната стена.

(7 точки)

Зад.2 Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3$ и решенията на уравнението $\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{3}{4}n$, където n е най-малката стойност на дадената функция.

(7 точки)

Зад.3 Правоъгълник със страни 36cm и 48cm е разделен от диагонала си на два триъгълника. Във всеки от триъгълниците е вписана окръжност. Намерете разстоянието между центровете на тези окръжности.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА-12.02.2011 г.
Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване-ХІІ клас

Зад.1 Нека $AB=BC=AC=a \Rightarrow h_a = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (1 точка).

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABC} \Rightarrow 18\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 6 \text{ (1 точка)}.$$

$$OD = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{39}$$

(1 точка). Следователно $S = \frac{pk}{2} = \frac{3 \cdot 6 \cdot \sqrt{39}}{2} = 9\sqrt{39}$ кв.ед.,

$$S_1 = S + S_{ABC} = 9\sqrt{39} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{39} + 18\sqrt{3} = 9 \cdot (\sqrt{39} + \sqrt{3}) = 9\sqrt{3}(\sqrt{13} + 1) \text{ кв.ед. (2 точки)}.$$

Ако $AK \perp SD$, то търсеното разстояние от върха А до стената BSD е дължината на АК.

$$\text{От } S_{ADS} = \frac{AD \cdot SO}{2} = \frac{SB \cdot AK}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 6 = \sqrt{39} \cdot AK \Rightarrow AK = \frac{18}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ (2 точки)}.$$

Зад.2 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 3 =$

$$= (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) + 3 = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 3, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Полагаме $x^2 - 5x = z \Rightarrow f(x) = \varphi(z) = (z+4)(z+6) + 3 = z^2 + 10z + 27$ и $z \in (-\frac{25}{4}; +\infty)$ (2 точки).

$$\varphi(z) = z^2 + 10z + 27 = (z+5)^2 + 2 \Rightarrow \min_{z \in (-\frac{25}{4}, \infty)} \varphi(z) = \varphi(-5) = 2, \quad \varphi(z) \geq 2 \text{ за } \forall z \text{ (2 точки)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = -5 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \min_{x \in (-\infty, \infty)} f(x) = f\left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = 2, \quad f(x) \text{ няма най-голяма стойност.}$$

$$\text{(1 точка). } \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{3}{4} \cdot n \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \text{ (2 точки)}$$

Зад.3. По Питагорова теорема от правоъгълния $\triangle ACD$ намираме

$$AC = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60 \text{ cm (1 точка)}.$$

Тъй като $AC + 2r_1 = AD + DC$, то

$$r_1 = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{36 + 48 - 60}{2} = 12 \text{ cm (1 точка)}.$$

Нека $O_1E \perp AB$, $O_2F \perp AB$ и $O_2G \perp O_1E$ (2 точки).

Определяме $O_1E = AD - r_1 = 36 - 12 = 24 \text{ cm (0,5 точки)}$ и

$$O_2F = r_2 = r_1 = 12 \text{ cm (0,5 точки)}.$$

В правоъгълния $\triangle O_1GO_2$ намираме $O_2G = EF = AB - r_1 - r_2 = 48 - 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm (0,5 точки)}$,

$$O_1G = O_1E - GE = O_1E - O_2F = 24 - 12 = 12 \text{ cm (0,5 точки)} \text{ и}$$

$$O_1O_2^2 = O_1G^2 + O_2G^2 = 12^2 + 24^2 = 12^2 + 4 \cdot 12^2 = 5 \cdot 12^2, \text{ откъдето } O_1O_2 = 12\sqrt{5} \text{ cm (1 точка)}.$$

