

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА IV клас

Зад.1 Пресметнете $(A + B) - C$, ако:

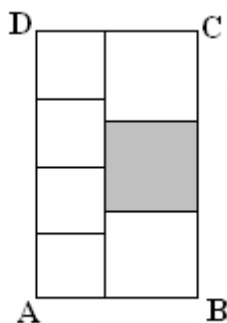
A е числото, което има деветнадесет единици, седем десетици, седемнадесет хиляди и четири десетохиляди;

B е числото, два пъти по-голямо от сбора на две естествени числа, които се записват с римски цифри съответно като LIX и XXV.

C е трицифрено число, по-голямо от 200 и по-малко от 300, на което цифрата на единиците му е два пъти по-голяма от цифрата на стотиците, а сборът от цифрите му е 12.

(7 точки)

Зад.2



От 7 квадрата Сръчко сглобил правоъгълника $ABCD$, показан на чертежа. Обиколката на оцветения квадрат в него е 32 см. Колко сантиметра е обиколката на правоъгълника $ABCD$?

(7 точки)

Зад.3 В кухнята на семейство Мечови имало кошница с круши. Дошъл татко Мечок и изял 5 круши. След него се вмъкнал малкият Мечо и изял половината от останалите. Мама Меца се върнала от пазар и оставила в кошницата толкова круши, колкото е най-малкото двуцифрено число, записано с еднакви цифри. На обяд се оказало, че в чинията на всеки от тримата има по 5 круши, а в кошницата няма нито една. Колко круши е имало първоначално в кошницата?

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

*Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!*

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IV клас

Зад.1 Намиране на $A = 40\,000 + 17\,000 + 70 + 19 = 57\,089$ (**2 точки**).

Намиране на $B = 2 \cdot (59 + 25) = 168$ (**2 точки**).

Цифрата на стотиците на числото C е 2, следователно цифрата на единиците е 4, а цифрата на десетиците е $12 - (2 + 4) = 6$, т.е. $C = 264$ (**1,5 точки**).

Пресмятане на израза $(A + B) - C = (57\,089 + 168) - 264 = 56993$ (**1,5 точки**)

Зад.2 Страната на оцветения квадрат е $32 : 4 = 8$ см (**1,5 точки**). Едната страна на правоъгълника е $3 \cdot 8 = 24$ см (**1,5 точки**). Тогава страната на по-малките квадрати е $24 : 4 = 6$ см (**1,5 точки**). Оттук другата страна на правоъгълника е $6 + 8 = 14$ см (**1,5 точки**).

Обиколката на правоъгълника е $14 + 14 + 24 + 24 = 76$ см (**1 точка**).

Зад.3 На обяд е имало $3 \cdot 5 = 15$ круши (**1 точка**). Следователно в кошницата е имало $15 - 11 = 4$ круши преди мама Меца да се върне от пазара и да остави в нея 11 круши (**2 точки**). Преди да се вмъкне малкият Мечо и да изяде половината круши е имало $4 \cdot 2 = 8$ круши (**2 точки**). А преди татко Мечок да изяде 5 круши, е имало $8 + 5 = 13$ круши - първоначалният брой круши в кошницата (**2 точки**).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА V клас

Зад.1 Намерете числата X , Y и Z и ги подредете по големина, ако знаете, че X е неизвестното число в равенството $2,7 + (x - 0,5) : 5 + 5 = 8,25$, $Y = (1,025 - 0,025 \cdot 8 + 0,136 : 0,17) : (4,098 + 0,902)$, а Z е частното на числото, което има 1 стотица, 2 десетици, 1 единица, 1 десета, 2 стотни и 1 хилядна с числото, което има 4 десетици и 4 стотни.

(7 точки)

Зад.2 В новоасфалтиран двор на училище решили да оформят игрище за „Народна топка”. За целта боядисали с жълта боя правоъгълник с ширина 5 метра и 35 сантиметра и дължина с 8 метра и 5 сантиметра по-голяма от ширината. Известно е, че за боядисването на един квадратен сантиметър от игрището са необходими 0,05 грама боя. Намерете колко метра е обиколката на игрището и колко килограма жълта боя са използвали за направата му.

(7 точки)

Зад.3. За 4 часа туристически кораб изминава по течението на реката такова разстояние, каквото изминава срещу течението за 5 часа. За 24 часа, движейки се по течението, той може да измине 588 км. Да се определи скоростта на кораба по течението и скоростта на течението.

За колко часа сал ще измине по течението на реката разстоянието, което корабът изминава за час по течението на реката?

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 $X = 3,25$ (2 точки); $Y = 0,325$ (3 точки); $Z = 3,025$ (1,5 точки) и $Y < Z < X$ (0,5 точки)

Зад.2 Намиране на дължината на игрището 13 м 40 см (1 точка) и обиколката му 37,5 м (2 точки). Намиране на лицето на игрището $71,69 \text{ м}^2 = 716900 \text{ см}^2$ (2 точки) и необходимото количество жълта боя $(716900 \cdot 0,05) : 1000 = 35,845 \text{ кг}$ (2 точки).

Зад.3 Определяне на скоростта на кораба по течението $588 : 24 = 24,5 \text{ км/ч}$ (1 точка).
Определяне на пътя на кораба за 4 часа по течението $24,5 \cdot 4 = 98 \text{ км}$ (1 точка).
Определяне скоростта на кораба срещу течението $98 : 5 = 19,6 \text{ км/ч}$ (1 точка).
Намиране на скоростта на течението на реката $(24,5 - 19,6) : 2 = 2,45 \text{ км/ч}$ (2 точки).
Салът ще измине по течението на реката разстоянието, което корабът изминава за час по течението на реката за $24,5 : 2,45 = 10 \text{ ч.}$ (2 точки).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА VI клас

Зад.1 Да се намерят стойностите на числата $A = |-0,5.7 + |-0,7||$,

$$B = -\left|\frac{A}{2} - 3|A| + \frac{|A|}{4}\right| \text{ и } C = \left(\frac{(-2)^{19} \cdot (-27)^3 + 15.4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + (-12)^{10}}\right)^{-3}.$$

Нанесете върху числова ос образите на числата А, В и С при единична отсечка с дължина 1 см и намерете разстоянието между най-малкото и най-голямото от тях.

(7 точки)

Зад.2 Обемът на метален съд с форма на правоъгълен паралелепипед е 1029 куб. дм. Съдът може да бъде разрязан на три еднакви куба. Най-малко колко кутии боя от 0,8 кг ще са достатъчни за боядисване на повърхнината на този съд, ако за боядисването на 1 кв. м се изразходват 0,35 кг боя.

(7 точки)

Зад.3 Да се намери отрицателното число a , за което стойността на израза $\frac{(a.b^2)^4 \cdot (a^3.b)^2}{(a^2.b^3)^3}$ при

$$b = \frac{17 - 7 : (-5)}{|6,8 - 9,1|} \text{ е равна на } 5000.$$

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VI клас

Зад.1 Намерено $A = 2,8$ (1 точка).

Намерено $B = -6,3$ (1 точка).

Намерено $C = 8$ (3 точки).

Правилно разположени върху числовата ос $B < A < C$ (1 точка).

Намерено разстоянието $BC = 14,3$ см (1 точка).

Зад.2 Обемът на всеки от трите куба е $1029:3 = 343$ куб. дм (1 точка).

Но $V_{\text{куб}} = a^3 = 343 = 7^3 \Rightarrow a = 7$ дм (2 точки).

Измеренията на паралелепипеда са $a = 7$ дм, $b = 7$ дм и $c = 21$ дм и следователно повърхнината на съда е $2(av + ac + bc) = 686$ дм² = $6,86$ м² (2 точки).

Необходимата боя е $6,86 \cdot 0,35 = 2,401$ кг (1 точка), откъдето получаваме $2,401:0,8 = 3,00125$ кутии (0,5 точки) и следователно трябва да се купят 4 кутии боя (0,5 точки).

Зад.3 $\frac{(a \cdot b^2)^4 \cdot (a^3 \cdot b)^2}{(a^2 \cdot b^3)^3} = a^4 \cdot b$ (2,5 точки), $b = \frac{17 - 7 : (-5)}{|6,8 - 9,1|} = \frac{18,4}{2,3} = 8$ (2,5 точки) $\Rightarrow$

$a^4 \cdot 8 = 5000 \Rightarrow a^4 = 625 \Rightarrow a = \pm 5$, но по условие $a < 0 \Rightarrow a = -5$ (2 точки).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА VIII клас

Зад.1 Да се реши квадратното уравнение $x^2 + a \cdot x + b = 0$, където

$$a = (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})\sqrt{15} \quad \text{и} \quad b = 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{6}{3 - \sqrt{3}} \right) \cdot (3 - \sqrt{5}).$$

(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $(m - 2) \cdot x^2 + 2m \cdot x + m + 1 = 0$.

Намерете стойностите на параметъра m , за които:

- а) уравнението има два различни корена;
- б) уравнението има един корен и намерете това решение.

(7 точки)

Зад.3 Даден е трапец $ABCD$, в който $AB \parallel CD$ и $AB > CD$. Точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BD, CD и AC .

Да се намери периметърът на трапеца $ABCD$, ако средната му основа има дължина 10 cm и периметърът на четириъгълникът $MNPQ$ е 18 cm.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1. $a = (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})\sqrt{15} = 17$ (2 точки),

$$b = 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{6}{3 - \sqrt{3}} \right) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 16$$
 (3 точки)

$$\Rightarrow x^2 + 17x + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -16$$
 (2 точки).

Зад.2 а) Уравнението има два различни корена при $\begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

(3 точки);

б) Уравнението има едно решение, ако $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ и тогава $x = -\frac{3}{4}$ (2 точки) или

ако $D = 0 \Leftrightarrow m = -2$ и тогава $x = -\frac{1}{2}$ (2 точки);

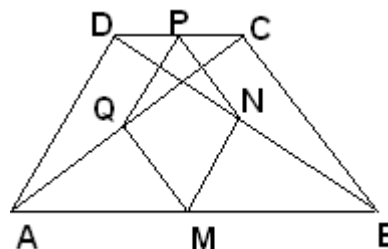
Зад.3 От MN -средна отсечка в $\triangle ABD$

$$\Rightarrow MN = \frac{AD}{2} \text{ и } MN \parallel AD$$
 (1)(1 точка).

От PQ -средна отсечка в $\triangle ACD$

$$\Rightarrow PQ = \frac{AD}{2} \text{ и } PQ \parallel AD$$
 (2)(1 точка).

От (1) и (2) следва $MNPQ$ е успоредник (1 точка).



От PN -средна отсечка в $\triangle CDB \Rightarrow PN = \frac{CB}{2}$, но по условие

$$P_{MNPQ} = 2(PQ + PN) = 18 \text{ cm} \Rightarrow AD + BC = 18 \text{ cm}$$
 (1,5 точки). Ако FG е средната основа на

трапеца, то $FG = \frac{AB + CD}{2}$, но по условие $FG = 10 \text{ cm} \Rightarrow AB + CD = 20 \text{ cm}$ (1,5 точки).

$$\text{Тогава } P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 20 + 18 = 38 \text{ cm}$$
 (1 точка).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА IX клас

Зад.1 Да се реши уравнението $\frac{x+3}{3x-1} + \frac{x}{3-x} = \frac{x^2-4x-7}{3x^2-10x+3}$.

(7 точки)

Зад.2 За кои стойности на параметъра p уравнението $(p+2)x^2 - 2(p+1)x + p-3 = 0$ има два различни корена x_1 и x_2 , за които е изпълнено условието $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

(7 точки)

Зад.3 Даден е равностранен $\triangle ABC$. През произволна точка M от страната AC е построена права $g \perp AB$. Права t минава през точка C и е перпендикулярна на BC . Правите g и t се пресичат в точка K . Да се намерят ъглите на $\triangle BKS$, където точката S е среда на AM .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 ДМ: $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ (1 точка).

$$\frac{x+3}{3x-1} + \frac{x}{3-x} = \frac{x^2-4x-7}{3x^2-10x+3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{3x-1} - \frac{x}{x-3} = \frac{x^2-4x-7}{(x-3)(3x-1)}$$
$$\Rightarrow (x+3)(x-3) - x(3x-1) = x^2 - 4x - 7 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ (4 точки)}$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \in DM, x_2 = \frac{2}{3} \in DM \text{ (2 точки)}.$$

Зад.2 Уравнението има два различни корена при

$$\begin{cases} p+2 \neq 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq -2 \\ 3p+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in \left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup (-2; +\infty) \text{ (3 точки)}.$$

Съгласно формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = \frac{2(p+1)}{p+2}, x_1 x_2 = \frac{p-3}{p+2}$ (1 точка).

$$\text{От } x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow \frac{-2p^2 - 6p}{(p+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow p_1 = 0 \in (-2; +\infty), p_2 = -3 \notin \left(-\frac{7}{3}; -2\right) \cup (-2; +\infty) \Rightarrow p = 0 \text{ (3 точки)}.$$

Зад.3 От условието, че $\angle BCK = \angle BDK = 90^\circ$

$(K = g \cap t, D = g \cap AB) \Rightarrow$ около четириъгълник $BCKD$ може да се опише окръжност с $d=BK$ и нека това е окръжността k_1 (1 точка).

DS – медиана в правоъгълен $\triangle ADM \Rightarrow DS = \frac{1}{2} AM = AS$,

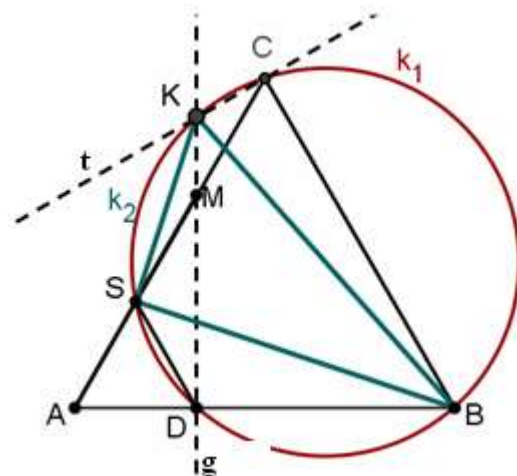
и тъй като $\angle SAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADS$ равностранен (2 точки).

Тогава $\angle BDS = 120^\circ$ и от $\angle BDS + \angle SCB = 180^\circ$ следва, че около четириъгълника $DBCS$ също може да се опише окръжност и нека това е окръжността k_2 (1 точка).

Но точките B, D и C принадлежат и на двете окръжности $\Rightarrow k_1 \equiv k_2$ (1 точка).

Следователно ъглите на $\triangle BKS$ са:

$$\angle BKS = 30^\circ, \angle KSB = 90^\circ \text{ /вписани ъгли/ и } \angle SBK = 60^\circ \text{ (2 точки)}.$$



Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

X клас

Зад.1 Решете неравенството $\frac{x^2 + mx - n - 3}{x^2 - (n+2)x + 1} < 2$, където $n = \frac{1}{6} \cdot \sqrt[3]{-216}$ и $m = (-4) \cdot \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}}$.
(7 точки)

Зад.2 Намерете квадратна функция $f(x)$ и нейната най-голяма стойност в интервала $[0;2]$, ако графиката на функцията пресича ординатната ос в т. $P(0;-5)$ и е с връх $V(3;4)$.

За така намерената функция $f(x)$, изследвайте броя на решенията на уравнението $f(x) = m-1$ в зависимост от параметъра m .

(7 точки)

Зад.3 Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ACB = 90^\circ$, $AC < BC$, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

Точките M и N лежат съответно върху страните AB и AC и са такива, че $MN \perp AC$ и

$S_{AMN} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABC}$. Ако радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е 5 cm, то:

а) Да се намерят страните на $\triangle ABC$;

б) Да се намери радиусът на окръжността, която минава през точка N и се допира до AB в точка M .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 Изчисляване на $n = -1$ и $m = -6$ (2 точки). Заместване с n и m и получаване на неравенството $\frac{x^2 - 6x - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x^2 - x + 1} > 0$ (2 точки).

Знаменателят $x^2 - x + 1 > 0$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ (1 точка), а числителят $(x+2)^2 \geq 0$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ (1 точка) и следователно решението е всяко реално число $x \neq -2$, т.е. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ (1 точка).

Зад.2 Точка $P(0; -5) \in f(x)$, следователно $f(0) = -5$, откъдето $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -5$, $c = -5$ (1 точка).

Върхът на параболата е точката $V(3; 4) \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 5 = 4 \end{cases}$ и след решаване на

системата получаваме $a = -1$ и $b = 6$ (2 точки).

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ растяща в интервала $(-\infty; 3)$, следователно най-голямата стойност се постига при $x = 2$ и $f(2) = 3$ (1 точка).

Изследване на $f(x) = m - 1$ за $m - 1 > 4$, т.е. ако $m > 5$, уравнението **няма** решение (1 точка).

Изследване на $f(x) = m - 1$ за $m - 1 = 4$, т.е. ако $m = 5$, уравнението има **1** решение (1 точка).

Изследване на $f(x) = m - 1$ за $m - 1 < 4$, т.е. ако $m < 5$, уравнението има **2** решения (1 точка).

Зад.3 Намерен коефициентът $k = \frac{1}{2}$ на подобие

между $\triangle AMN$ и $\triangle ABC$ (1 точка).

Доказано, че MN е средна отсечка (1 точка).

Доказано, че $AB = 2R = 10$ cm, където R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и намерени

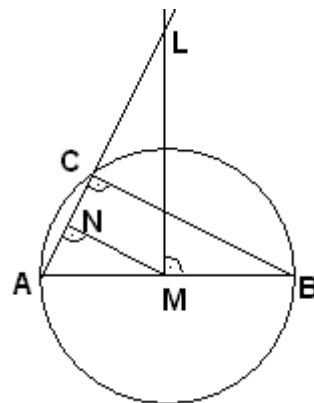
$AC = 6$ cm и $BC = 8$ cm (1,5 точки).

Обосновано местоположението на диаметъра

$ML (L \in AC)$ на търсената окръжност ($\angle MNC = 90^\circ$)

и намиране на $ML = \frac{20}{3}$ cm от подобие на $\triangle MNL$ и $\triangle MNA$,

откъдето търсеният радиус $R_1 = \frac{10}{3}$ cm (3,5 точки).



Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

XI клас

Зад.1 Дадени са 4 числа.Първите три от тях образуват аритметична прогресия, а последните три– геометрична прогресия. Намерете числата, ако сборът на крайните е 23, а на средните е 14.
(7 точки)

Зад.2 Намерете x , ако числата $\log_2 27$; $\sqrt{x+7}$; $\log_3 8^{x-1}$ образуват в този ред геометрична прогресия.
(7 точки)

Зад.3 Даден е $\triangle ABC$ с радиус на вписаната в триъгълника окръжност $r = \sqrt{3}$. Страните му образуват аритметична прогресия с разлика $d = 4$.
Намерете страните на триъгълника и определете вида му.
Докажете, че синусите на ъглите в триъгълника образуват аритметична прогресия и намерете разликата ѝ.
(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 Ако аритметична прогресия е x, y, z , а геометричната прогресия – y, z, t , то съгласно

условието на задачата
$$\begin{cases} x + t = 23 \\ y + z = 14 \\ 2y = x + z \\ z^2 = yt \end{cases} \quad \text{(2 точки)}.$$

След решаване на системата се получава $z_1 = \frac{7}{4}$ и $z_2 = 10$ (3 точки).

Намиране на двете решения на задачата $(\frac{91}{4}; \frac{49}{4}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4})$ и $(-2; 4; 10; 25)$ (2 точки).

Зад.2 За определяне на ДС: $x \geq -7$ (0,5 точки). Прилагане на свойството на геометрична прогресия $x + 7 = \log_2 27 \cdot \log_3 8^{x-1}$ (1 точка) и решаване на съставеното уравнение

$$x + 7 = \log_2 27 \cdot \log_3 2^{3(x-1)} = (3x-1) \cdot \log_2 27 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = (3x-1) \cdot \log_3 27$$

$$\Rightarrow x + 7 = (3x-1) \cdot 3 \Rightarrow x = 2 \quad \text{(5 точки)}. \text{ Намерената стойност за } x = 2 \in \text{ДС} \text{(0,5 точки)}.$$

Зад.3 Нека $a = b - 4$, $b, c = b + 4$, където a, b и c са страните на триъгълника (0,5 точки).

Съставяне на уравнението $\sqrt{\frac{3b}{2} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} + 4 \right) \left(\frac{b}{2} - 4 \right)} = \frac{3b}{2} \sqrt{3}$ (2 точки) и намиране на

$b = 10$, $a = 6$ и $c = 14$ (1,5 точки). Определяне на вида на триъгълника- тъпоъгълен (0,5 точки)

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \sin \beta = \frac{5\sqrt{3}}{14}, \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } 2\sin \beta = \sin \alpha + \sin \gamma \Rightarrow \text{синусите на ъглите в}$$

триъгълника образуват аритметична прогресия (2 точки) и $d = \frac{\sqrt{3}}{7}$ (0,5 точки).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

ХІІ клас

Зад.1 В триъгълната пирамида $ABCM$ околните ръбове MA , MB и MC са равни с дължина l и $\angle AMB = \angle BMC = 90^\circ$, $\angle AMC = 60^\circ$. Да се намери обемът на пирамидата $ABCM$ и разстоянието от основния връх A до околната стена MBC .

(7 точки)

Зад.2 Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ръб a . Точките K и O са центровете съответно на стените $ABB_1 A_1$ и $ABCD$, а точка M е среда на ръба BB_1 .

Да се намери сечението на куба с равнината KOM .

Ако точките P , S и N са средите съответно на ръбовете AD , BC и AA_1 , то намерете лицето на четириъгълника $PSMN$ и тангенса на ъгъла φ между равнините $PSMN$ и $ABCD$.

В какво отношение равнината $PSMN$ дели обема на куба?

(7 точки)

Зад.3 Намерете квадратната функция $f(x) = x^2 + bx + c$, чиято графика се допира до абсцисната ос и до графиката на линейната функция $y = \frac{4}{3}x + 8$.

Намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[-7n; 0]$, където

$$n = \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1 - 2\sin^2 22^\circ 30'}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} \cdot \frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}.$$

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване-XII клас

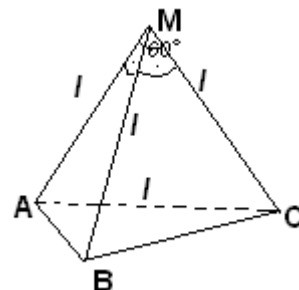
Зад.1 От $BM \perp AM$ и $BM \perp CM$ следва, че $BM \perp (ACM)$ (1 точка).

Следователно можем да разглеждаме $\triangle AMC$ като основа на пирамидата $ABCM$, а BM като нейна височина (1 точка). От $AM = CM$ и $\angle AMC = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ е равностранен, т.е. $AC = l$ (1 точка).

$$\text{Тогава } V = \frac{S_{ACM} \cdot BM}{3} = \frac{AM \cdot CM \cdot \sin 60^\circ \cdot BM}{2 \cdot 3} = \frac{l^3 \sqrt{3}}{12} \quad (1 \text{ точка}).$$

Ако разгледаме пирамидата $ABCM$ с основа $\triangle BMC$ и височина h_A - разстоянието от върха A до стената (MBC) (1 точка),

$$\text{то } V = \frac{S_{BCM} \cdot h_A}{3} = \frac{BM \cdot CM \cdot h_A}{2 \cdot 3} = \frac{l^2 \cdot h_A}{6} = \frac{l^3 \sqrt{3}}{12} \Rightarrow h_A = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad (2 \text{ точки}).$$



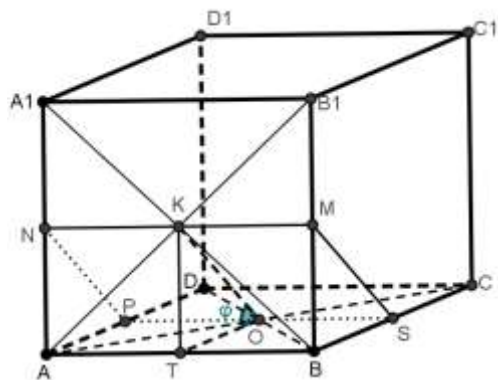
Зад.2

Равнината KOM е инцидентна с равнината на четириъгълника $PSMN$ (1,5 точки).

$PSMN$ е правоъгълник (1 точка) и $S_{PSMN} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$ (1 точка).

За определяне на ъгъл φ и доказателство, че $\triangle KTO$ е равнобедрен правоъгълен $\Rightarrow \tan \varphi = \tan 45^\circ = 1$ (1,5 точка).

Пресмятане обема $V_{BSMAPN} = \frac{a^3}{8}$ на призмата $BSMAPN$ (1 точка) и определяне на отношението 1:7 (1 точка).



Зад.3 Тъй като параболата $f(x) = x^2 + bx + c$ се допира до абсцисната ос, то $b^2 - 4c = 0$

(1 точка). Параболата има и единствена обща точка с правата $y = \frac{4}{3}x + 8$, следователно

уравнението $x^2 + bx + c = \frac{4}{3}x + 8 \Leftrightarrow x^2 + \left(b - \frac{4}{3}\right)x + c - 8 = 0$ има дискриминанта, равна на нула,

$$\text{т.е. } \left(b - \frac{4}{3}\right)^2 - 4(c - 8) = 0 \quad (1 \text{ точка}). \text{ Решаваме системата } \begin{cases} b^2 - 4c = 0 \\ \left(b - \frac{4}{3}\right)^2 - 4(c - 8) = 0 \end{cases} \quad \text{с неизвестни}$$

b и c и получаваме $b = \frac{38}{3}$, $c = \frac{361}{9}$ (2 точки), откъдето $f(x) = x^2 + \frac{38}{3}x + \frac{361}{9}$.

Изчисляване на $n = 1$ и получаване на интервала $[-7; 0]$ (1 точка).

$f(x) = x^2 + \frac{38}{3}x + \frac{361}{9}$ е намаляваща в интервала $\left[-7; -\frac{19}{3}\right]$ и растяща в интервала $\left[-\frac{19}{3}; 0\right]$,

следователно най-малката стойност е $f\left(-\frac{19}{3}\right) = 0$, а най-голямата стойност е $f(0) = \frac{361}{9}$

(2 точки).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012г.

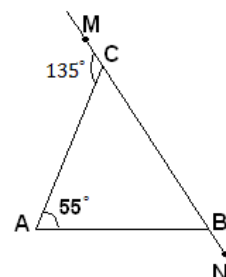
ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

Задачи с избираем отговор:

В бланката за отговори отбележете верния според Вас отговор.

Правилните отговори на задачите от 1 до 8 се оценяват с по 2 точки

- Нормалният вид на израза $(3+x)(3-x)-(x-5)x$ е:
А) $-2x^2 + 5x + 9$ Б) $-5x + 9$ В) $11x + 9$ Г) $-x^2 + 4x + 9$
- Равенството $4x^2 - 24x + a = (2x - 6)^2$ е тъждество, ако a е:
А) 3 Б) -3 В) 9 Г) 36
- Кое от уравненията има корен $-2\frac{2}{3}$?
А) $(x - 2\frac{2}{3})(3 - x) = 0$ Б) $(8x + 3)(2x + 5) = 0$
В) $5 - 3x = 13$ Г) $|2x - \frac{2}{3}| = 5$
- Кое от уравненията НЯМА решение?
А) $-6x = 0$ Б) $5 + x = x - 2$ В) $x - 2 = 2 - x$ Г) $(3 + x) \cdot 2 = 2x + 6$
- Точката M е среда на отсечката AB , точката Q е среда на отсечката AM и дължината на $QB = 7,5cm$. Дължината на отсечката AB е:
А) $10cm$ Б) $9,5cm$ В) $9cm$ Г) $8,5cm$
- Лъчът QN е вътрешен за $\angle PQM = 64^\circ$. Ако $\angle PQN = 16^\circ 28'$, то мярката на $\angle MQN$ е:
А) $80^\circ 28'$ Б) $47^\circ 32'$ В) $48^\circ 32'$ Г) $46^\circ 32'$
- Ако един ъгъл е с 36° по-голям от съседния си, то този ъгъл е равен на:
А) 72° Б) 108° В) 36° Г) 118°
- На чертежа $\angle BAC = 55^\circ$, а $\angle ACM = 135^\circ$.
Мярката на $\angle ABN$ в градуси е:
А) 120° Б) 110°
В) 105° Г) 100°



Правилните отговори на задачите от 9 до 16 се оценяват с по 3 точки

9. Изразът $(x+2)^3 - (x-1)^3$ е тъждествено равен на:

A) $(x-1)(x^2+x+1)$

Б) $9x^2+15x+9$

В) $9(x^2+x+1)$

Г) $3x^2+15x+8$

10. Кой от изразите е множител в разлагането на израза $5a-5b-a^2+2ab-b^2$ на множители?

A) $5-a$

Б) $5-b$

В) $5-a+b$

Г) $5-a-b$

11. Произведението от корените на уравнението $|2x+1|=5$ е:

A) -5

Б) -1

В) 6

Г) -6

12. Решението на уравнението $2x(x-1)-(2x-3)(2x+3)=1-2x^2$ е:

A) -4

Б) 6

В) -6

Г) 4

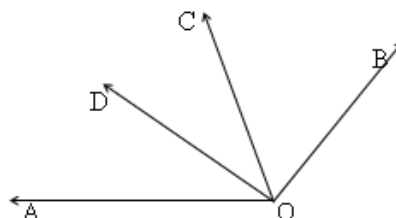
13. На чертежа $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle AOC = 72^\circ$ и $\angle DOB = 85^\circ$. Мяката на $\angle COD$ е:

A) 7°

Б) 17°

В) 13°

Г) 27°



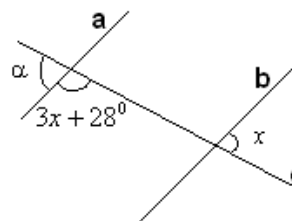
14. По данните от чертежа, ако $a \parallel b$, то мяката на ъгъла, означен с α е:

A) 142°

Б) 152°

В) 38°

Г) 54°



15. В $\triangle ABC$ е построена височината CH ($H \in AB$).

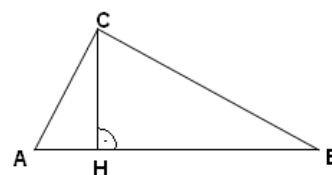
Ако $\angle BAC + \angle ACB = 160^\circ$, то мяката на $\angle HCB$ е:

A) 20°

Б) 70°

В) 80°

Г) 10°



16. В триъгълник един от ъглите е 2 пъти по-голям от друг и с 20° по-малък от третия ъгъл на триъгълника. Най-големият ъгъл на триъгълника е равен на:

A) 84°

Б) 32°

В) 100°

Г) 64°

Задачи с отворен отговор:

Запишете получения от Вас отговор в бланката за отговори.

Правилните отговори на задачите от 17 до 20 се оценяват с по 6 точки

17. Пресметнете стойността на израза $x^2y^3 - x^3y^2$, ако $x-y=3$ и $xy=-2$.

18. Ако m е параметър, а x е променлива, то намерете стойността на m , за която в нормалния вид на многочлена $A = mx^3 + 3mx^2 - 2x^3 + 3x^2 - 5mx + 3m - 4$ коефициентът на члена от втора степен е 9.
19. Ако α_1, β_1 и γ_1 са външните ъгли на един триъгълник и $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1 = 12:13:20$, то намерете най-малкия вътрешен ъгъл на триъгълника.
20. При пресичането на две прави се получават четири ъгла. Единият от тях е $42\frac{6}{7}\%$ от друг. Намерете градусната мярка на този ъгъл.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 8 точки

21. Даден е изразът $B = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17-4m}{4}$.
- а) Опростете израза B ;
- б) Намерете всички стойности на m , за които $B = 0$;
- в) Намерете корена на уравнението $(m-2)x = B$, ако $m \neq 2$.
22. Даден е $\triangle ABC$, в който са построени височина CH ($H \in AB$) и ъглополовяща AL ($L \in BC$), които се пресичат в точка O . Ако $\angle AOH = 70^\circ$ и $\angle HCB = 30^\circ$, то намерете:
- а) $\angle ABC$ и външния ъгъл на $\triangle ABC$ при върха B ;
- б) Колко пъти $\angle ACB$ е по-голям от $\angle BAC$?

Задачи, на които се изписва решението с обосновка:

Върху листа за решения запишете решенията с обосновка.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 10 точки

23. Том боядисал $\frac{1}{4}$ от летвите от оградата на леля Поли, а Хък - $\frac{1}{3}$ от останалите. Последните 24 летви боядисали приятелите им. Колко летви е боядисал Том и колко летви е боядисал неговият приятел Хък?
24. Даден е $\triangle ABC$, за който AL е ъглополовяща на $\angle BAC$ и $\angle A:\angle B:\angle C = 2:4:9$. През точката C е построена права m , успоредна на AL . Точката E от правата m е външна за $\triangle ABC$ и такава, че E и A са в различни полуравнини спрямо правата BC . Ако точката D е пресечната точка на правите AC и BE и $\angle CBE = 32^\circ$, то намерете ъглите на $\triangle CED$.

Общ брой точки: 100. За областен кръг се класират учениците с минимум 73 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА

ул. "Софроний Врачански" №6, 092 62 46 43

ОБЩНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012г.

ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

КЛЮЧ С ВЕРНИТЕ ОТГОВОРИ

Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки
1.	А	2	9.	В	3	17.	-12	6
2.	Г	2	10.	В	3	18.	$m=2$	6
3	В	2	11.	Г	3	19.	20^0	6
4.	Б	2	12.	Г	3	20.	54^0	6
5.	А	2	13.	А	3	21.	а) $m^2 - 4$; б) $m = \pm 2$; в) $x = m + 2$	а)4; б)2; в)2
6.	Б	2	14.	В	3	22.	а) $60^0, 120^0$; б) 2 пъти	а)3; б)5
7.	Б	2	15.	Б	3	23.	Том-12летви; Хък-12 летви	10
8.	Г	2	16.	А	3	24.	$12^0, 76^0, 92^0$	10

Решения на задачи 23. и 24. и критерии за оценяване

23 задача Нека броят на летвите на оградата да означим с x ($x \in N$). Том боядисал $\frac{1}{4}$ от летвите, т.е. $\frac{1}{4}x$ (2 точки) и останали $\frac{3}{4}x$ летви (1 точка). Хък боядисал $\frac{1}{3}$ от останалите, т.е. $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$ (2 точки) и останали $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x$ летви (1 точка). Следователно $\frac{1}{2}x = 24$, т.е. $x = 48$ -летви(2 точки) и тогава Том е боядисал $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$ летви(1 точка), а Хък е боядисал също $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$ летви(1 точка).

24 задача $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 4 : 9$, т.е. $\angle A = 2x$, $\angle B = 4x$, $\angle C = 9x$,
но $2x + 4x + 9x = 180^\circ \Rightarrow 15x = 180^\circ \Rightarrow x = 12^\circ$
 $\Rightarrow \angle CAB = 2x = 24^\circ$ (3 точки),
 $\angle ABC = 4x = 48^\circ$ и $\angle ACB = 9x = 108^\circ$ (2 точки).

$AL \equiv l_{\angle BAC}$, тогава $\angle BAL = \angle CAL = 12^\circ$ (1 точка).

$(CE \parallel AL) \cap AC \Rightarrow \angle DCE = \angle LAC = 12^\circ$ (съответни ъгли) (1 точка).

$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 48^\circ + 32^\circ = 80^\circ$ (1 точка). От

$\angle DAB + \angle ABD + \angle ADB = 180^\circ \Rightarrow 24^\circ + 80^\circ + \angle ADB = 180^\circ \Rightarrow \angle ADB = 76^\circ = \angle CDE$ (1 точка).

Тогава $\angle CED = 180^\circ - (12^\circ + 76^\circ) = 92^\circ$ (1 точка).

