

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

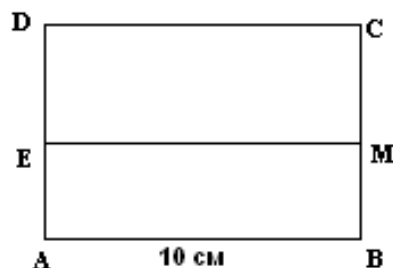
ЗАДАЧИ ЗА IV клас

Зад.1 а) Кое число трябва да се прибави към $102 - 2 \cdot 9 + 612 : 3 - (7.3 + 9.7)$, за да се получи $1012 - 812 + (638 + 173)$?

б) На всяка от буквите А, Б, В и Г съответства цифра. Ако е известно, че $AB + BA = GA$ и $AB - BA = A$, да се намери коя цифра съответства на буквата Г.

(7 точки)

Зад.2 Правоъгълник ABCD с дължина 10 см е разделен на правоъгълници ABME и EMCD, както е показано на чертежа. Обиколката на ABME е 24 см, а обиколката на EMCD е 32 см. Да се намери обиколката на ABCD и страната на квадрат с обиколка, равна на обиколката на правоъгълника ABCD.



(7 точки)

Зад.3 На едно тържество присъствали момчета и момичета от IV клас. Ако момчетата бяха с едно повече, те щяха да са три пъти повече от момичетата. Ако момичетата бяха с 3 по-малко, то четвъртокласниците общо щяха да са 40. Колко момичета и момчета са присъствали на тържеството?

Момчетата и момичетата танцуват по двойки. Колко е възможно най-големият брой танцуващи двойки и колко деца тогава ще останат без партньори?

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IV клас

Зад.1 а) Намиране на $102 - 2 \cdot 9 + 612 : 3 - (7.3 + 9.7) =$

$$= 102 - 18 + 204 - (21 + 63) = 102 - 18 + 204 - 84 = 84 + 204 - 84 = 204 \text{ (2 точки).}$$

Намиране на $1012 - 812 + (638 + 173) = 1012 - 812 + 811 = 200 + 811 = 1011$ (1,5 точки).

Ако търсеното число е x , то $204 + x = 1011 \Rightarrow x = 1011 - 204 = 807$ (1,5 точки).

б) От сбора на единиците в равенството $AB + BA = GA$ следва, че $B = 0$ (0,5 точки).

Тогава от разликата на единиците в равенството $AB - BA = A$ следва, че $A = 5$ (0,5 точки).

Получаваме $50 - B5 = 5$, т.е. $B = 4$ (0,5 точки). Сборът $50 + 45 = 95$, т.е. $G = 9$ (0,5 точки).

Зад.2 Тъй като обиколката на правоъгълника ABME

е 24 см и дължината му е 10 см, то широчината му $MB = (24 - (10 + 10)) : 2 = 2$ см (2 точки).

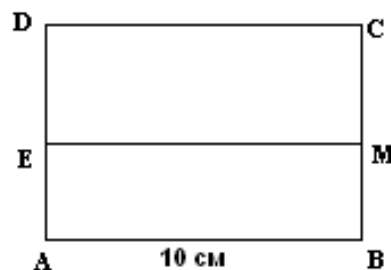
Тъй като обиколката на правоъгълника EMCD

е 32 см и дължината му е 10 см, то широчината му $CM = (32 - (10 + 10)) : 2 = 6$ см (2 точки).

Следователно $CB = 2 + 6 = 8$ см (1 точка)

и обиколката на ABCD е $10 + 10 + 8 + 8 = 36$ см (1 точка).

Страната на квадрат с обиколка, равна на обиколката на правоъгълника ABCD, е $36 : 4 = 9$ см (1 точка).



Зад.3 Броят на четвъртокласниците е $40 + 3 = 43$ (1 точка). Ако добавим липсващото момче, получаваме $43 + 1 = 44$ деца и момчетата са три пъти повече от момичетата (2 точки).

Следователно момичетата са $44 : 4 = 11$ (1 точка). Момчетата са $43 - 11 = 32$ (1 точка). Най-големият възможен брой танцуващи двойки е 11 (1 точка) и тогава без партньори ще останат $32 - 11 = 21$ момчета (1 точка).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА V клас

Зад.1 Да се намери стойността на израза $M = 100b - a - 2c$, където
 $a = (97,2 : (13,2 - 4,2)) : 0,9 + 55,6 : 0,2$,
 $b = 10,12 - 8,12 : (6,38 - 2,38)$ и c е неизвестното число в равенството $(c - 12,5) : 1,2 = 2,3 + 0,3 \cdot 9$.
(7 точки)

Зад.2 Правоъгълен $\triangle ABC$ има лице 150 кв. см и хипотенуза AB равна на 25 см. Дължината на катета AC е половината от дължината на страната на квадрат, лицето на който е шест пъти по-голямо от лицето на $\triangle ABC$. Намерете обиколката на $\triangle ABC$.
(7 точки)

Зад.3. От град A към град B тръгва камион. Едновременно с него от B към A тръгва лека кола. След 20 минути те се срещат на 30 км от B . След още 16 минути леката кола пристига в A .
а) Намерете скоростите на леката кола и камиона;
б) Намерете разстоянието между A и B ;
в) На колко км от B ще бъде камионът, когато леката кола пристигне в A ?
(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 За намиране на $a = (97,2 : (13,2 - 4,2)) : 0,9 + 55,6 : 0,2 = 290$ **(2,5 точки)**,
 $b = 10,12 - 8,12 : (6,38 - 2,38) = 8,09$ **(1,5 точки)**, $c = (2,3 + 0,3 \cdot 9) \cdot 1,2 + 12,5 = 18,5$ **(2 точки)** и
 $M = 100 \cdot b - a - 2 \cdot c = 100 \cdot 8,09 - 290 - 2 \cdot 18,5 = 482$ **(1 точка)**.

Зад.2 Намиране на $S_{\text{кв.}} = 6 \cdot 150 = 900$ кв. см **(1 точка)**. От $S_{\text{кв.}} = 900 = a^2$, следва, че страната a на квадрата е $a = 30$ см **(1 точка)**. Следователно катетът $AC = 30 : 2 = 15$ см **(1 точка)**.
Тъй като $S_{\triangle ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot BC$ **(1 точка)** и по условие $S_{\triangle ABC} = 150$ кв. см, то
 $150 = 0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot 15 \cdot BC \Rightarrow BC = 20$ см **(2 точки)**
 $\Rightarrow P = AB + BC + AC = 25 + 15 + 20 = 60$ см **(1 точка)**.

Зад.3

30 км:20 мин.=1,5 км/мин=90 км/ч - скорост на леката кола **(1,5 точки)**.

1,5 · 16 = 24 км –изминат път на колата след срещата **(1 точка)**.

24:20=1,2 км/мин=72 км/ч -скорост на камиона **(1,5 точки)**.

Разстоянието $AB = 24 + 30 = 54$ км **(1 точка)**.

16 · 1,2 = 19,2 км - изминат път от камиона след срещата **(1 точка)**.

Камионът се намира на $30 - 19,2 = 10,8$ км от B , когато колата пристигне в A **(1 точка)**.

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА VI клас

Зад.1 Пресметнете $\left((2.3)^2 \cdot 2.3^2 + \frac{(3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^4} \right) : \left(-3^4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right).$

(7 точки)

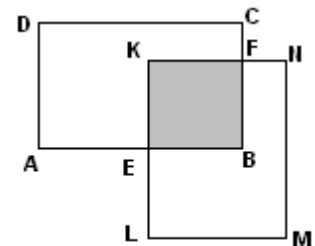
Зад.2 Да се намерят и сравнят стойностите на

изразите $M = \frac{|-2013|}{2013} + \frac{|-5,2| \cdot 0,7 + 0,3 \cdot |-4 - 1,2|}{10 \cdot (-1,04)} - |-10 + 3,5|$ и

$N = \frac{-|a-b|}{2} - \frac{2+|a+2b|}{3} - \frac{4 \cdot (|a|+|b|)}{|a-b|}$ при $a = \frac{x}{|x|}$, където $x < 0$ и $b = \frac{|y|}{y}$, където $y > 0$.

(7 точки)

Зад.3 Фигурата AELMNFCD на чертежа е образувана от два еднакви правоъгълника с обща част квадрат. Страната на квадрата е половината от дължината на правоъгълника. Широчината на правоъгълника е с 1 см по-голяма от страната на квадрата. Обиколката на получената фигура е 20 см. Намерете нейното лице.



(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VI клас

Зад.1 $(2.3)^2 \cdot 2.3^2 = 2^3 \cdot 3^4$ (2 точки), $\frac{(3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^4} = 2^3 \cdot 3^3$ (2 точки), $\left(-3^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = -3^2 \cdot 2^2$ (2 точки) и

тогава $\left((2.3)^2 \cdot 2.3^2 + \frac{(3^2)^3 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^4}\right) : \left(-3^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = (2^3 \cdot 3^3 \cdot (3+1)) : (-2^2 \cdot 3^2) = -24$ (1 точка).

Зад.2 $M = \frac{|-2013|}{2013} + \frac{|-5,2| \cdot 0,7 + 0,3 \cdot |-4-1,2|}{10 \cdot (-1,04)} - |-10+3,5| = \frac{2013}{2013} + \frac{5,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot |-5,2|}{-10,4} - |-6,5| =$
 $= 1 + \frac{5,2 \cdot (0,7+0,3)}{-10,4} - 6,5 = 1 - 0,5 - 6,5 = -6$ (3 точки). От $a = \frac{x}{|x|} = -1$ при $x < 0$ (0,75 точки) и

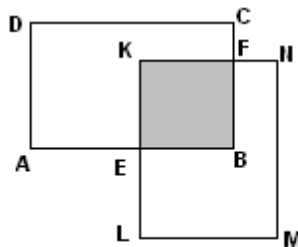
$b = \frac{|y|}{y} = 1$ при $y > 0$ (0,75 точки) следва $N = \frac{-|a-b|}{2} - \frac{2+|a+2b|}{3} - \frac{4 \cdot (|a|+|b|)}{|a-b|} =$
 $= \frac{-|-1-1|}{2} - \frac{2+|-1+2 \cdot 1|}{3} - \frac{4 \cdot (|-1|+|1|)}{|-1-1|} = -1 - 1 - 4 = -6$ (2 точки) $\Rightarrow M = N = -6$ (0,5 точки).

Зад.3 Нека страната на квадрата $BFKE$ е x см ($x > 0$).

Тогава дължината на всеки от правоъгълниците е $2x$ см,
а широчината е $(x+1)$ см. От условието $P_{AELMNFC D} = 20$ см

$\Rightarrow AE + EL + LM + MN + NF + FC + CD + AD =$
 $= x + x + (x+1) + 2x + 1 + 1 + 2x + (x+1) = 20 \Rightarrow x = 2$ см.

$\Rightarrow S_{AELMNFC D} = S_{ABCD} + S_{KLMN} - S_{BFKE} = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 20$ кв. см.



Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА VIII клас

Зад.1 Малката основа a на трапец $ABCD$ е равна на височината му h , а голямата му основа b е 12 cm. Намерете височината h на трапеца, ако лицето му S е 80 cm^2 .

(7 точки)

Зад.2 Намерете стойностите на параметъра m , за които уравнението $x^2 - (m-8)x = (m + \sqrt{15})(m - \sqrt{15})$ има корен 2. Сравнете намерените стойности на параметъра

m със стойността на израза $A = \left(\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{2 - \sqrt{7}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2} \right)$.

(7 точки)

Зад.3 Ъглополовящата на ъгъл A в правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) пресича катета BC в точка P под ъгъл, равен на един от ъглите на $\triangle ABC$ и $AP = 6$ cm.

а) Да се намерят острите ъгли на триъгълника, дължината на височината CH ($H \in AB$) през върха C и разстоянието от точка H до медицентъра G на $\triangle HBC$;

б) Ако $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, да се изразят чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{AP}$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1 Съгласно условието $a = h$, $S = 80 \text{ cm}^2$ и тъй като $S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$ (1,5 точки), то следва, че
 $80 = \frac{(h+12)}{2} \cdot h$ (1,5 точки) $\Leftrightarrow h^2 + 12h - 160 = 0$ (1 точка) $\Rightarrow h_1 = -20$ (1 точка) и $h_2 = 8$ (1 точка).
От $h_1 = -20 < 0$ и $h_2 = 8 > 0$ следва $a = h = 8 \text{ cm}$ (1 точка).

Зад.2 За получаване на уравнението $m^2 + 2m - 35 = 0$ при $x=2$ (2 точки).
За решаване на уравнението и определяне на $m_1 = -7$ и $m_2 = 5$ (1 точка).
За пресмятане на $A = \sqrt{7}$ (3 точки). За сравняването $m_1 < A$ (0,5 точки) и $m_2 > A$ (0,5 точки).

Зад.3 а) За намиране на $\angle CAB = \alpha = 60^\circ$ и $\angle ABC = \beta = 30^\circ$, като използваме, че $\angle APC = \alpha$,
 $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \beta$ и $\alpha + \beta = 90^\circ$ (1,5 точки), $CP = 3 \text{ cm}$ (0,5 точки),

$PB = AP = 6 \text{ cm}$ (0,5 точки), $CH = \frac{BC}{2} = 4,5 \text{ cm}$ (0,5 точки) и $HG = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = 3 \text{ cm}$ (1 точка).

б) За изразяване на $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b})$ (1 точка), $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$ (1 точка) и $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ (1 точка).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

ЗАДАЧИ ЗА IX клас

Зад.1 Да се състави уравнение, което има корени, които са с 5 по-големи от корените на уравнението $2x^2 - 14x + 23 = 0$.

(7 точки)

Зад.2 Да се реши уравнението $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = \frac{9}{2}$.

Упътване: Положете $4x^2 + 7x + 3 = t$

(7 точки)

Зад.3 Опростете дробта $M = \frac{x^4 + 3x^3 + x + 3}{(x^2 - x + 1)(2x^2 + 5x - 3)}$ и намерете стойността ѝ при $x = |a + 1| - |a|$, където a е параметър.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 Нека x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 - 14x + 23 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7$ и

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{23}{2}$ съгласно формулите на Виет (**1,5 точки**). Ако търсеното уравнение е

$y^2 + py + q = 0$ с корени y_1 и y_2 , то съгласно условието $y_1 = x_1 + 5$ и $y_2 = x_2 + 5$ (**1 точка**).

От формулите на Виет $y_1 + y_2 = -p$, $y_1 \cdot y_2 = q$ (**1,5 точки**) и условието на задачата

следва, че $y_1 + y_2 = x_1 + 5 + x_2 + 5 = (x_1 + x_2) + 10 = 17 = -p \Rightarrow p = -17$ (**1 точка**)

и $y_1 \cdot y_2 = (x_1 + 5)(x_2 + 5) = x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) + 25 = \frac{23}{2} + 5 \cdot 7 + 25 = \frac{143}{2} = q$, т.е.

$q = \frac{143}{2}$ (**1 точка**) $\Rightarrow$ търсеното уравнение е $y^2 - 17y + \frac{143}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 34y + 143 = 0$

(**1 точка**).

Зад.2 $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (64x^2 + 112x + 49)(4x^2 + 7x + 3) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (16t + 1)t = \frac{9}{2}$, където

$t = 4x^2 + 7x + 3$ (**2,5 точки**). От $(16t + 1)t = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 32t^2 + 2t - 9 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{9}{16}$, $t_2 = \frac{1}{2}$ (**1,5 точки**).

Следователно $4x^2 + 7x + 3 = -\frac{9}{16}$ или $4x^2 + 7x + 3 = \frac{1}{2}$. От $4x^2 + 7x + 3 = -\frac{9}{16}$ следва

уравнението $64x^2 + 112x + 57 = 0$, което няма решение (**1,5 точки**). От $4x^2 + 7x + 3 = \frac{1}{2}$ следва

уравнението $8x^2 + 14x + 5 = 0$ с решения $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{4}$ (**1,5 точки**).

Зад.3 DM: $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -3$ (**0,5 точки**).

$M = \frac{x^4 + 3x^3 + x + 3}{(x^2 - x + 1)(2x^2 + 5x - 3)} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)(x+3)}{(x^2 - x + 1)(2x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{2x-1}$ ($x \neq -3$) (**2 точки**).

1 сл.) $a \leq -1 \Rightarrow x = |a+1| - |a| = -a - 1 + a = -1 \Rightarrow M = \frac{x+1}{2x-1} = 0$ (**1,5 точки**).

2 сл.) $-1 < a \leq 0 \Rightarrow x = |a+1| - |a| = a + 1 + a = 2a + 1 \Rightarrow M = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{2(a+1)}{4a+1}$ при

$2a + 1 \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{4}$ (**1,5 точки**).

3 сл.) $a > 0 \Rightarrow x = |a+1| - |a| = a + 1 - a = 1 \Rightarrow M = \frac{x+1}{2x-1} = 2$ (**1,5 точки**).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

X клас

Зад.1 Да се пресметнат и сравнят стойностите на изразите a и b , където

$$a = \frac{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\frac{27}{2}} - \sqrt[3]{32} \right) \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{17} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} + 3}} \quad \text{и} \quad b = \frac{\sqrt[3]{0,25^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}} - 3^2}{\sqrt{0,5^{-4} + 3^2}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Да се намерят общите решения на неравенствата $\frac{2}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2+4x+3} \leq 5$ и $4x^4 - 17x^2 + 4 < 0$.

(7 точки)

Зад.3 Дадена е функцията $f(x) = (3-a)x^2 - 2(2a+3)x - 2a - 3$, където a е параметър.

а) Намерете стойността на параметъра a , за която графиката на функцията минава през точката $(1; -13)$. За получената стойност на параметъра a намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[2; 4]$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 $a = \frac{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\frac{27}{2}} - \sqrt[3]{32}\right)\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{17}-3}\sqrt[3]{\sqrt{17}+3}} = \frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{17-9}} = \frac{2+3-4}{2} = \frac{1}{2}$ **(3 точки).**

$b = \frac{\sqrt[3]{0,25^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}} - 3^2}{\sqrt{0,5^{-4} + 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{4,9-9}}{\sqrt{2^4+9}} = \frac{3}{5}$ **(3 точки).** От $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} \Rightarrow a < b$ **(1 точка).**

Зад.2 $\frac{2}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2+4x+3} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{-5x^2-15x-10}{(x+1)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) \geq 0$ при $x \neq -1, x \neq -3 \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; +\infty)$ **(3 точки).**

В неравенството $4x^4 - 17x^2 + 4 < 0$ полагаме $x^2 = t \geq 0$ и получаваме неравенството $4t^2 - 17t + 4 < 0 \Leftrightarrow 4\left(t - 4\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow 4\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow 4(x-2)(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$
 $\Rightarrow x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ **(3 точки).**

Общите решения на неравенствата са числата $x \in (-2; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ **(1 точка).**

Зад.3 а) Тъй като точката $(1; -13)$ лежи на графиката на функцията $f(x) = (3-a)x^2 - 2(2a+3)x - 2a - 3$, то $f(1) = -13$, откъдето следва, че $a = 1$ **(1 точка).**

За $a = 1$ получаваме $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$. Определяме координатите $x_0 = 2,5$ **(0,5 точки)** и $y_0 = f(x_0) = -17,5$ **(0,5 точки)** на върха V на параболата. Функцията $f(x)$ намалява за $x \in (-\infty; 2,5]$ и расте за $x \in [2,5; +\infty)$ и тъй като $x_0 = 2,5 \in [2; 4]$, то следва, че $f(x)$ намалява за $x \in [2; 2,5]$ и расте за $x \in [2,5; 4]$. Следователно $f_{\text{HMC}} = f(x_0) = f(2,5) = -17,5$ **(0,5 точки)** и $f_{\text{HGC}} = \max\{f(2), f(4)\} = f(4) = -13$ **(0,5 точки).**

б) Неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x , ако $\begin{cases} 3-a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$ **(2 точки).**

$$\begin{cases} 3-a > 0 \\ D < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a > 0 \\ (2a+3)^2 - (3-a)(-2a-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ (2a+3)(a+6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ -6 < a < -1,5 \end{cases}$$

 $\Rightarrow a \in (-6; -1,5)$ **(2 точки).**

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

XI клас

Зад.1 Общият член на числова редица е $a_n = n^2 - 5n$. Да се определи кое от числата $-7, -4, -3$ и 6 е член на редицата. Да се докаже, че редицата $a_n = n^2 - 5n$ е растяща за всяко естествено число $n > 2$ и да се намери a_{105} .

(7 точки)

Зад.2 Да се намери петият член на растяща геометрична прогресия, първият член на която е $7 - 3\sqrt{5}$ и всеки нейн член след първия е равен на разликата на двата му съседни членове.

(7 точки)

Зад.3 Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 3\text{cm}$ и $BC = 4\text{cm}$. Построена е ъглополовящата $CL (L \in AB)$, а около $\triangle ALC$ и $\triangle BCL$ са описани съответно окръжностите $k_1(O_1; R_1)$ и $k_2(O_2; R_2)$. Да се намерят дължините на радиусите R_1, R_2 и дължината на O_1O_2 .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 Числото -7 не е член на редицата, защото уравнението $n^2 - 5n = -7$ няма решения **(1 точка)**.

Числото -3 не е член на редицата, защото уравнението $n^2 - 5n = -3$ има решения, които не са естествени числа **(1 точка)**.

Числото -4 е член на редицата, защото уравнението $n^2 - 5n = -4$ има решения $n_1 = 1, n_2 = 4$, които са естествени числа и следователно $a_1 = a_4 = -4$ **(1 точка)**.

Числото 6 е член на редицата, защото уравнението $n^2 - 5n = 6$ има решения $n_1 = -1, n_2 = 6$, едното от които е естествено число и следователно $a_6 = 6$ **(1 точка)**.

$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 5(n+1) - n^2 + 5n = ((n+1)^2 - n^2) - 5(n+1-n) = (2n+1) - 5 = 2n - 4 > 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $n > 2 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2 \Rightarrow$ редицата с общ член $a_n = n^2 - 5n$ е растяща за всяко естествено число $n > 2$ **(2 точки)**.

$$a_{105} = 105^2 - 5 \cdot 105 = 105(105 - 5) = 105 \cdot 100 = 10500 \text{ (1 точка)}.$$

Зад.2 По условие $a_2 = a_3 - a_1 \Rightarrow a_1 q = a_1 q^2 - a_1 \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0$ (3 точки) $\Rightarrow q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **(1 точка)**.

От условието, че прогресията е растяща $\Rightarrow q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ **(1 точка)**.

Тогава $a_5 = (7 - 3\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^4$ **(1 точка)** $\Rightarrow a_5 = 2$ **(1 точка)**.

Зад.3 От теоремата на Питагор намираме $AB = 5 \text{ cm}$ **(0,5 точки)**. От свойството на ъглополовящата следва $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AL = \frac{3}{7} AB = \frac{15}{7} \text{ cm}, BL = \frac{4}{7} AB = \frac{20}{7} \text{ cm}$

(0,5 точки). Ако O_1 е център на описаната окръжност за $\triangle ALC$, то $\triangle AO_1L$ -равнобедрен и правоъгълен,

откъдето следва $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, AL = \frac{15\sqrt{2}}{14}$ **(2 точки)**.

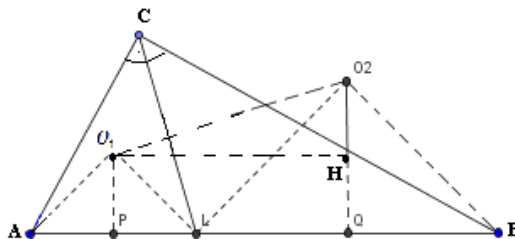
Аналогично, ако O_2 е център на описаната окръжност за $\triangle BLC$, то $\triangle BO_2L$ -равнобедрен и

правоъгълен, откъдето следва $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, BL = \frac{10\sqrt{2}}{7}$ **(2 точки)**.

Нека $O_1P \perp AL$ и $O_2Q \perp BL \Rightarrow O_1P = \frac{1}{2} AL = \frac{15}{14}$ и $O_2Q = \frac{1}{2} BL = \frac{10}{7}$.

Ако $O_1H \perp O_2Q$, то $O_2H = O_2Q - HQ = \frac{5}{14}$,

$PQ = O_1H = \frac{1}{2} AL + \frac{1}{2} BL = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2} \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{O_1H^2 + O_2H^2} = 1\frac{11}{14}\sqrt{2}$ **(2 точки)**.



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

XII клас

Зад.1 В правилна четириъгълна пирамида α е ъгълът между околен ръб и основата, β е ъгълът между околна стена и основата, γ е ъгълът между два съседни околни ръба и φ е ъгълът между две съседни околни стени. Докажете, че $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}tg\beta$, $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ и $\sin\alpha = \cot g\frac{\varphi}{2}$.

(7 точки)

Зад.2 Основните ръбове на едната основа на пресечена триъгълна пирамида $ABCA_1B_1C_1$ са 27 cm, 29 cm и 52 cm, а периметърът на другата основа е 72 cm. Височината h на пирамидата е 10 cm. Като използвате формулата за обем на пресечена пирамида $V = \frac{h}{3}(B + B_1 + \sqrt{B \cdot B_1})$, където B и B_1 са лицата на основите на пресечената пирамида, намерете обема на $ABCA_1B_1C_1$.

(7 точки)

Зад.3 В аритметична прогресия първият член е отрицателен и е равен на -405 , а разликата е равна на 18. Сумата от абсолютните стойности на първите n члена на тази прогресия е равна на 5661. Да се намери n .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XII клас

Зад.1 Нека $MO \perp (ABCD)$, $MR \perp BC (R \in BC)$, $BP \perp MC (P \in BC)$,
 $ON \perp AB (N \in AB)$ и $AB = BC = CD = AD = a$

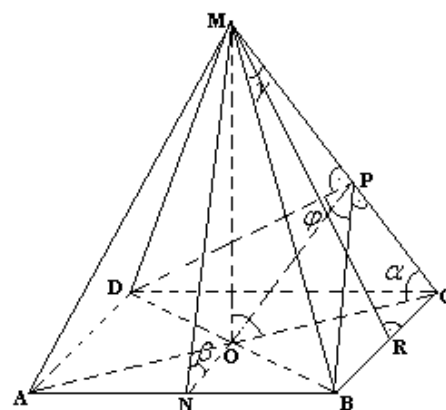
$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{OC}, \operatorname{tg} \beta = \frac{MO}{ON}, \text{ но } OC = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}, ON = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \beta \text{ (2 точки). От } \cos \alpha = \frac{OC}{MC}, \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{RC}{MC},$$

$$OC = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}, RC = \frac{a}{2} (MB=MC) \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} \text{ (2 точки).}$$

$$\text{От } \sin \alpha = \frac{OP}{OC}, \cot g \frac{\varphi}{2} = \frac{PO}{OB} (DP = BP, DO = OB) \text{ и}$$

$$OC = OB = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cot g \frac{\varphi}{2} \text{ (3 точки).}$$



Зад.2 Нека P и B са съответно периметърът и лицето на долната основа, а P_1 и B_1 - периметърът и лицето на горната основа на пресечената пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Следователно $P = 27 + 29 + 52 = 108 \text{ cm}$ и $B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270 \text{ cm}^2$ (3 точки).

По условие $P_1 = 72 \text{ cm}$ и тъй като $\frac{B_1}{B} = \left(\frac{P_1}{P}\right)^2 \Rightarrow B_1 = 120 \text{ cm}^2$ (3 точки).

Тогава $V = \frac{h}{3} (B + B_1 + \sqrt{B \cdot B_1}) = 1900 \text{ cm}^3$ (1 точка).

Зад.3 $405:18 = 22$ (остатък 9) (1 точка). Тогава $a_{23} = -405 + 22 \cdot 18 = -9$ (1 точка) и

$a_{24} = -405 + 23 \cdot 18 = 9$ (1 точка). Тъй като $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{23}| = \frac{(405+9)}{2} \cdot 23 = 207 \cdot 23 = 4761$, то

$a_{24} + a_{25} + \dots + a_n = 5661 - 4761 = 900$ (1 точка). Нека в последната сума има k събираеми, следователно $a_n = 9 + (k-1) \cdot 18 = 18k - 9$ (1 точка) и получаваме уравнението

$$\frac{(9 + (18k - 9))}{2} \cdot k = 900 \Leftrightarrow 9k^2 = 900 \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = 10 \text{ (1 точка)} \Rightarrow n = 23 + k = 33 \text{ (1 точка).}$$

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 62. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2012г.

ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

Задачи с избираем отговор:

В бланката за отговори отбележете верния според Вас отговор.

Правилните отговори на задачите от 1 до 8 се оценяват с по 2 точки

1. Нормалният вид на многочлена $(2x-3y)^2$ е:

- А) $4x^2-6xy+9y^2$ Б) $4x^2-12xy+9y^2$ В) $4x^2-12xy+9y^2$ Г) $9x^2-12xy+4y^2$

2. Изразът $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2$ е тъждествено равен на:

- А) $x^2+\frac{1}{4}$ Б) $x^2-\frac{1}{4}$ В) $-x^2-x-\frac{1}{4}$ Г) $x^2+x+\frac{1}{4}$

3. Изразът $(2x-3)^2-(3-2x)(2x+3)$ е тъждествено равен на:

- А) $12x-18$ Б) $12x+18$ В) $8x^2-18$ Г) $8x^2-12x$

4. Изразите $(x-a)^2$ и x^2+6x+9 са тъждествено равни при:

- А) $a=-3$ Б) $a=3$ В) $a=9$ Г) за никое a

5. Дължините на страните на триъгълник се отнасят както $3:6:7$. Средната по дължина страна е 54 cm. Периметърът на триъгълника е:

- А) 27 cm Б) 144 cm В) 63 cm Г) 100 cm

6. Мерките на два съседни ъгъла са α и β . Ако α е $\frac{7}{5}$ от β , то α е:

- А) 40° Б) 105° В) 75° Г) 85°

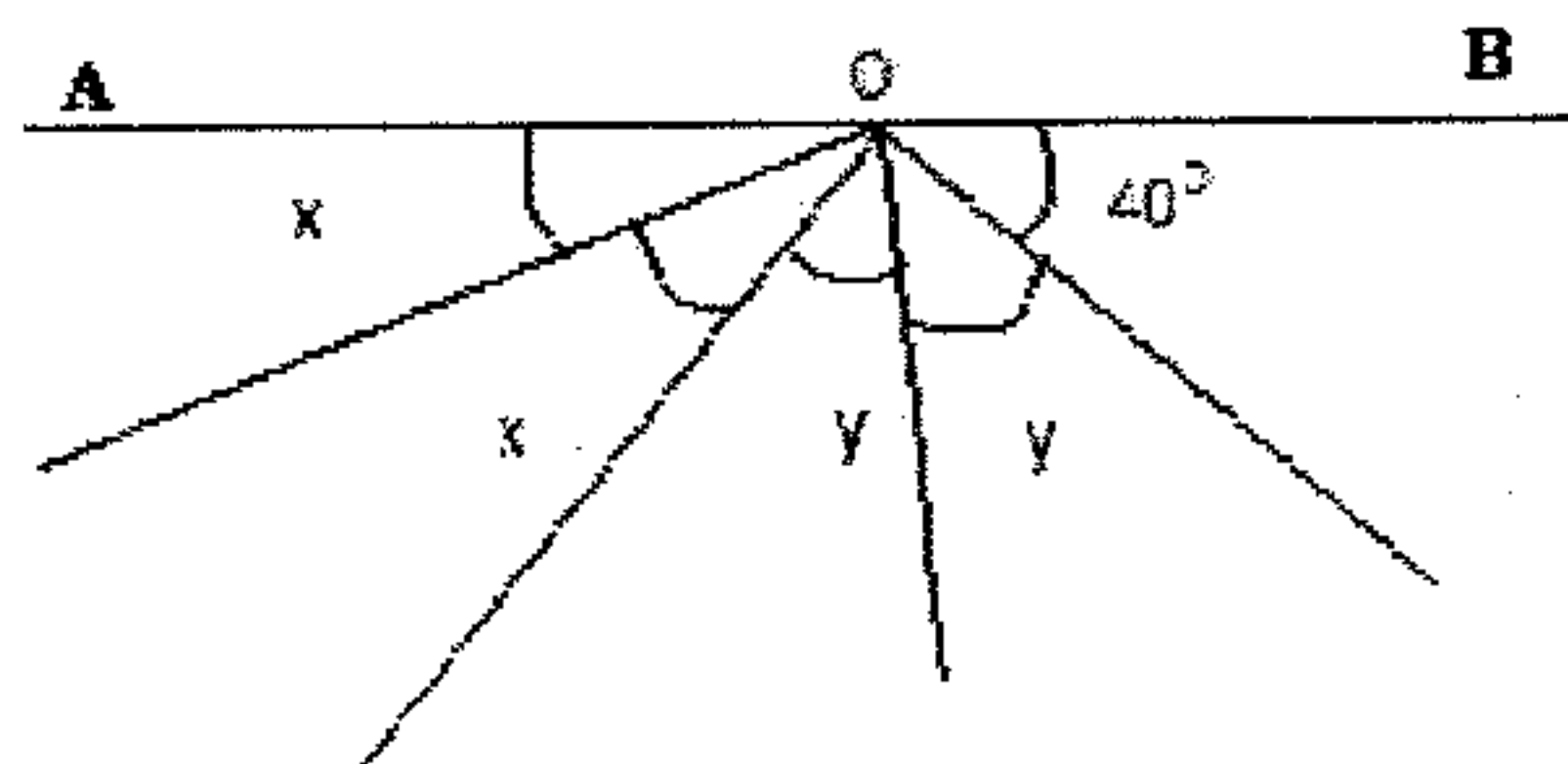
7. Ако разликата между два съседни ъгъла е 20° , то мярката на по-големия от тях е:

- А) 60° Б) 80°
 В) 100° Г) 160°

8. Ако $\angle AOB$ на чертежа е изправен и ъгъл

$\alpha = x + y$, то мярката на 3α е:

- А) 140° Б) 180°
 В) 210° Г) 220°



Правилните отговори на задачите от 9 до 16 се оценяват с по 3 точки

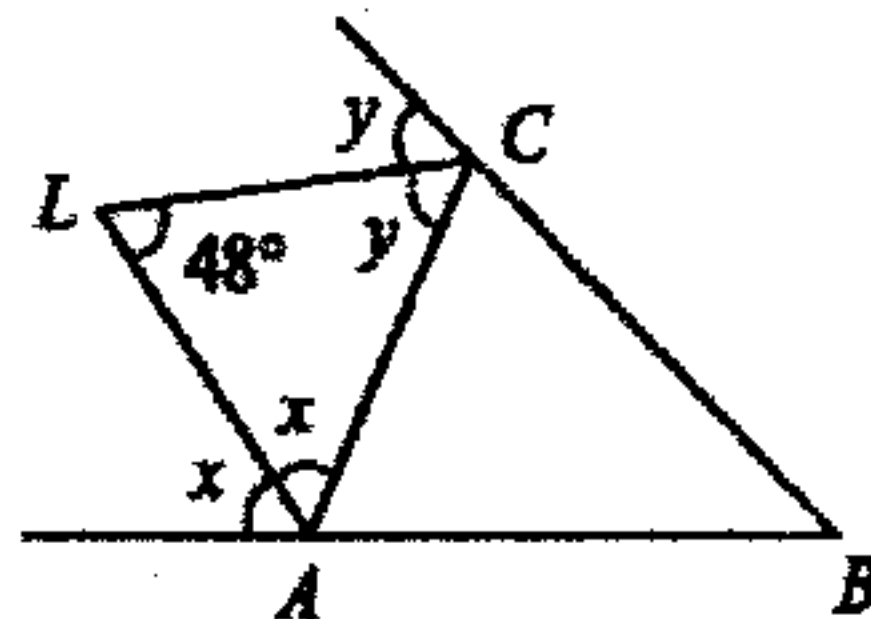
9. На чертежа $a \parallel b$ (a и b -прави). Мярката на ъгъл x е:

- A) $22^\circ 30'$ Б) $22^\circ 50'$
В) 30° Г) 45°



10. Мярката на $\angle ABC$ по данните от чертежа е:

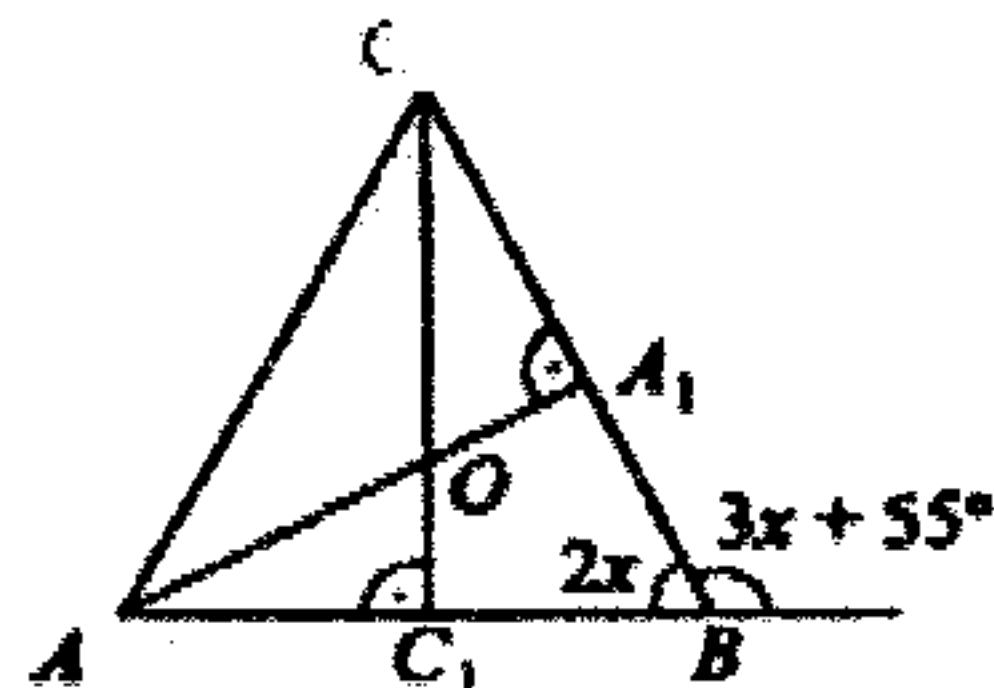
- A) 84° Б) 66°
В) 96° Г) 74°



11. В $\triangle ABC$ височините AA_1 и CC_1 се пресичат в точка O .

Мярката на $\angle AOC$ по данните от чертежа е:

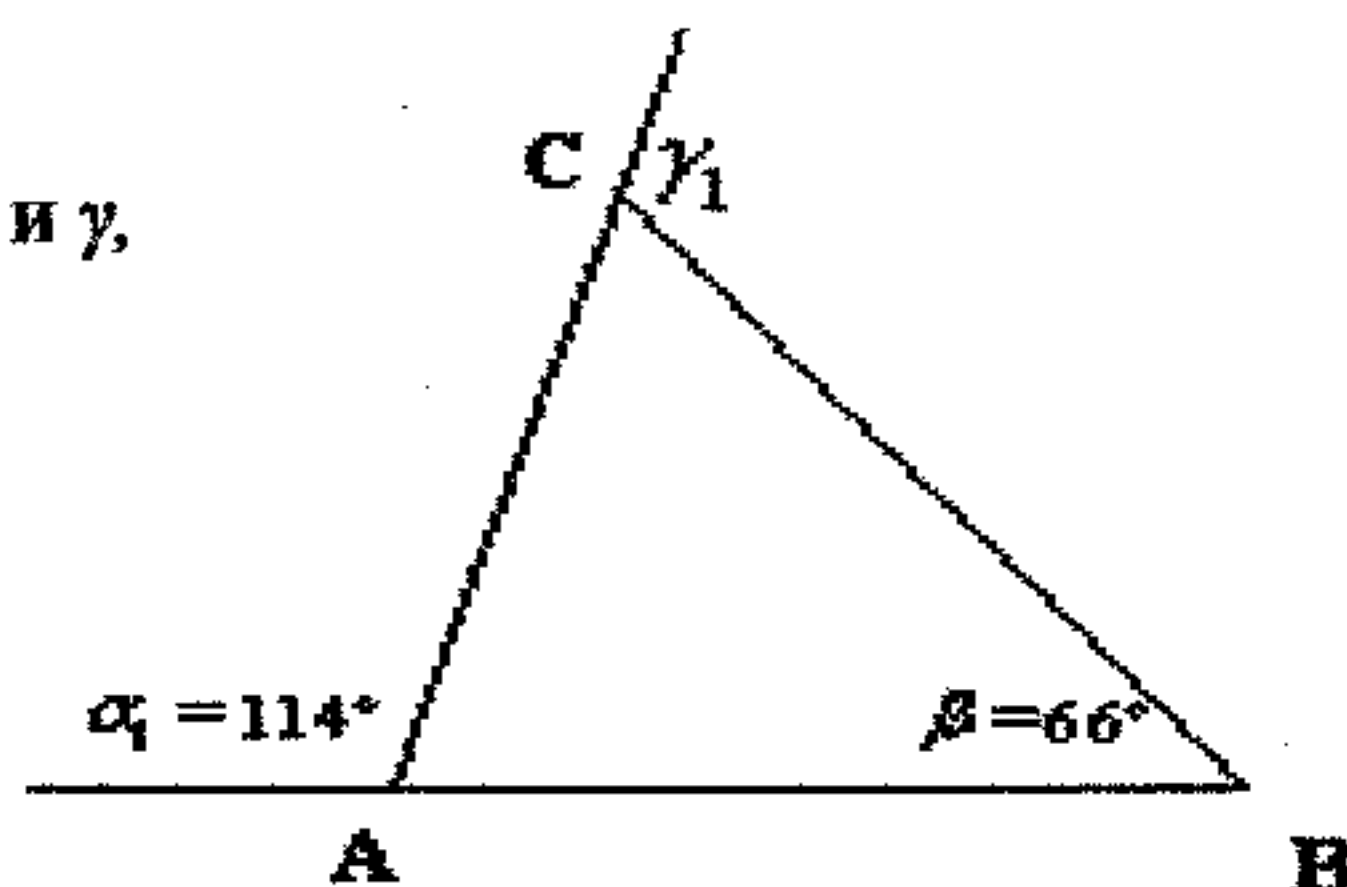
- A) 150° Б) 130°
В) 60° Г) 135°



12. Вътрешните ъгли на $\triangle ABC$ са с големина α , β и γ ,
а външните - с големина α_1 , β_1 и γ_1 .

Ако $\alpha_1 = 114^\circ$, а $\beta = 66^\circ$, то γ_1 е:

- A) 90° Б) 114°
В) 48° Г) 132°



13. Ако $A = x^2$ и $B = 3a$, то $(A - B)^2$ е:

- A) $x^4 - 6ax + 9$ Б) $x^4 - 6ax^2 + 9a^2$ В) $x^4 - 6ax + 9a^2$ Г) $x^4 - 6ax + 9a$

14. Многочленът $3a - 4b + 6ab - 8b^2$ е тъждествено равен на:

- A) $(1 - 2b)(3a + 4b)$ Б) $(1 + 2b)(3a - 4)$ В) $(1 + 2b)(3a - 4b)$ Г) $(1 + 2b)(3b - 4a)$

15. Многочленът $12a^2 - 27a^4$ е тъждествено равен на:

- A) $3a^2(1 - 3a)(1 + 3a)$ Б) $3a^2(2 - 3a)(2 + 3a)$ В) $3a(2 - 3a)(2 + 3a)$ Г) $a^2(2 - 3a)(2 + 3a)$

16. Многочленът $x^3 + x^2 - 4x - 4$, разложен на множители е:

- A) $(x^2 + 4)(x + 1)$ Б) $(x^2 + 1)(x - 4)$ В) $(x + 2)(x - 2)(x - 1)$ Г) $(x + 2)(x - 2)(x + 1)$

Задачи с отворен отговор:

Запишете получения от Вас отговор в бланката за отговори.

Правилните отговори на задачите от 17 до 20 се оценяват с по 6 точки

17. Семейство е изразходвало $\frac{2}{7}$ от месечния си бюджет за отопление през месец март и останалите 525 лв. – за други разходи. През месец април разходите за отопление намалели с 20%. Колко лева са останали на семейството за други разходи след изплащане на сметката за отопление през месец април, ако семейството има същия месечен доход?

18. На дете, което се лекува в болница, инжектират антибиотик. Антибиотикът се разгражда постепенно в неговия организъм, при което един час след поставянето на инжекцията само 60% от антибиотика все още е активен.

Процесът се развива по същата формула: с изтичане на всеки час само 60% от антибиотика, съдържащ се в тялото в края на предходния час, остава активен.

Да приемем, че детето е приело 300 мг антибиотик в 8.00ч.

Намерете количеството на активния антибиотик, съдържащо се в тялото на детето в 11.00ч., като попълнете таблицата:

Време	8.00	9.00	10.00	11.00
Антибиотик(мг)	300			

19. В $\triangle ABC$ мерките на вътрешните ъгли α и β се отнасят както 5: 6, а ъгъл $\gamma = 81^\circ$. Ако CL ($L \in AB$) е ъглополовяща и CD ($D \in AB$) е височина, то намерете големината на $\angle LCD$.

20. Мерките на ъглите при върховете A и B на $\triangle ABC$ са съответно 20° и 60° . Њглополовящата на външния ъгъл при върха C пресича правата през точка A , перпендикулярна на BC , в точка D . Намерете градусната мярка на $\angle ADC$.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 8 точки

21. При разпродажба на сладкиши са събрани пари, както е посочено в таблицата:

Цена на сладкиша	1 лв.	5 лв.	10 лв.	15 лв.
Брой продадени сладкиши	100	25	20	15

а) Колко процента от продадените сладкиши са по 1 лв.?

б) Приблизително колко процента от всички събрани пари са получени от продажбата на сладкиши по 15 лв.?

22. Даден е триъгълник, в който сумата на два от ъглите е равна на третия ъгъл, а най-големият ъгъл се отнася към един от другите два както 5:1. Да се намери средният по големина ъгъл на този триъгълник.

Задачи, на които се изписва решението с обосновка:

Върху листа за решения запишете решенията с обосновка.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 10 точки

23. Дадени са многочлените $A = (-3x+2)^2 - (5x-3)(3x-2)$ и $B = (5x+1)^2 - (2x+3)^2$

а) Да се представи A с нормален многочлен;

б) Да се разложат A и B на прости множители;

в) Да се разложи $M=A+B$ на множители и да се намери числената му стойност, като

x се замести със стойността на израза $N = \left(\frac{(-3)^6 \cdot 3^7}{3^6 (-3)^7} \right)^3$

24. В остроъгълен $\triangle ABC$ височините през върховете A и B се пресичат в точка H , а ъглополовящите в $\triangle ABH$ през върховете A и B се пресичат в точка O .

а) Ако $\angle ACB = 80^\circ$, да се намерят $\angle AHB$ и $\angle AOB$;

б) Ако $\angle AOB$ е четири пъти по-голям от $\angle ACB$, да се намери $\angle ACB$.

Общ брой точки: 100. За областен кръг се класират учениците с минимум 73 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА

✉ ул. "Софроний Врачански" №6, ☎ 092 62 46 43

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 61. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
07.01.2012г.

ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

КЛЮЧ С ВЕРНИТЕ ОТГОВОРИ

Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки
1.	В	2	9.	В	3	17.	567 лв.	6
2.	Г	2	10.	А	3	18.	64,8 мг	6
3	Г	2	11.	Б	3	19.	4 °30'	6
4.	А	2	12.	Г	3	20.	130°	6
5.	Б	2	13.	Б	3	21.	а) 62,5% б) ≈ 35%	а) 3 б) 5
6.	Б	2	14.	В	3	22.	72°	8
7.	В	2	15.	Б	3	23.	а) $A = -6x^2 + 7x - 2$ б) $A = (3x - 2)(1 - 2x)$, $B = (3x - 2)(7x + 4)$ в) $M = 5(3x - 2)(x + 1)$, $N = -1, M = 0$	а) 2 б) 4 в) 4
8.	В	2	16.	Г	3	24.	а) $\angle AHB = 100^\circ$, $\angle AOB = 140^\circ$ б) $\angle ACB = 40^\circ$	а) 3 б) 7

Решения на задачи 23. и 24. и критерии за оценяване

23 задача

а) $A = (-3x+2)^2 - (5x-3)(3x-2) = 9x^2 - 12x + 4 - 15x^2 + 10x + 9x - 6 = -6x^2 + 7x - 2$ (2 точки)

$A = (-3x+2)^2 - (5x-3)(3x-2) =$
 б) $= (3x-2)^2 - (5x-3)(3x-2) = (3x-2)(3x-2-5x+3) = (3x-2)(1-2x)$ (2 точка)

$B = (5x+1)^2 - (2x+3)^2 = (5x+1-2x-3)(5x+1+2x+3) =$
 $= (3x-2)(7x+4)$ (2 точка)

в) $M = (3x-2)(1-2x) + (3x-2)(7x+4) = (3x-2)(1-2x+7x+4) =$
 $= (3x-2)(5x+5) = 5(3x-2)(x+1)$ (2 точки)

$N = -1$ (1 точка), $M = 0$ (1 точка)

24 задача

а) Определяне на $\angle CBE = 10^\circ$ или $\angle CAD = 10^\circ$ (0,5 точки).

Намиране на $\angle AHE = 80^\circ$ или неговия противоположен (0,5 точки).

Определяне на $\angle AHB = 100^\circ$ (0,5 точки)

Намиране на $\angle AOB = 140^\circ$ (1,5 точки)

б) Нека $\angle ACB = \gamma$ и $\angle AOB = 4\gamma$ (1 точка)

За изразяването на $\angle CAD = 90^\circ - \gamma$ (1 точка), $\angle AHE = \gamma$ (1 точка) и $\angle AHB = 180 - \gamma$

(1 точка), както и $\angle AOB = 180^\circ - \frac{\gamma}{2}$ (1,5 точки), откъдето $180^\circ - \frac{\gamma}{2} = 4\gamma$ и определяне на

$\gamma = 40^\circ$ (1,5 точки).

