

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

ЗАДАЧИ ЗА IV клас

Зад.1 Да се пресметне стойността на израза $(a : 7 + 4 \cdot b) + c - 12.8$, ако:

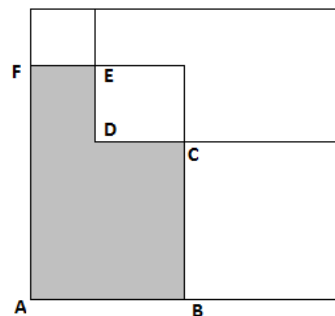
a е неизвестното събираемо в израза $a + 2000 = 1567 + 250.4$;

$b = 4867 - 2345 - 20 \cdot (3 + 9 : 3) - 2400$;

$c = 11.2 - 11.1 + 12.3 - 12.2 + 13.4 - 13.3 + 14.5 - 14.4 + 15.6 - 15.5$.

(7 точки)

Зад.2 В един голям квадрат са поместени три по-малки квадрата с обиколки съответно 12 дм, 28 дм и 40 дм. Намерете обиколката на големия квадрат в метри. Намерете обиколката на заштрихованата фигура $ABCDEF$.



(7 точки)

Зад.3 Попитали Петьо на колко години е, а той отговорил: „Татко е по-голям от бащата на Иван, който е 30-годишен и по-млад от бащата на Георги, който е 50-годишен. Годините на татко се изразяват с двуцифрено число, на което цифрата на десетиците е два пъти по-голяма от цифрата на единиците. Той е с 2 години по-голям от мама. Мама пък има два пъти повече години от мен и брат ми заедно. Но все пак аз съм с цели 2 години по-голям от брат ми”. На колко години са Петьо, брат му и неговите родители?

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

*Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!*

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IV клас

Зад.1 Намиране на $a = 567$ (2 точки). Намиране на $b = 2$ (2 точки). Намиране на $c = 65$ (2 точки).
Пресмятане на израза $(a : 7 + 4 \cdot b) + c - 12.8 = (567 : 7 + 4 \cdot 2) + 65 - 96 = (81 + 8) + 65 - 96 = 58$
(1 точка).

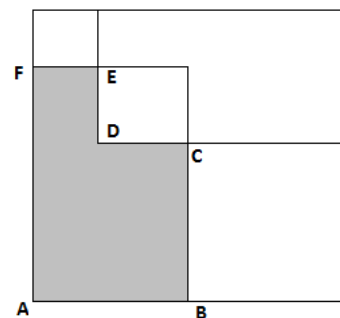
Зад.2 Намиране на страните на малките квадрати:

3 дм (1 точка), 7 дм (1 точка) и 10 дм (1 точка).

Намиране на страната на големия квадрат $3+7+10=20$ дм
(1 точка).

Намиране на обиколката на големия квадрат: $80 \text{ дм} = 8 \text{ м}$
(1 точка).

Намиране на обиколката на фигурата ABCDEF: 54 дм (2 точки).



Зад.3 Намиране на годините на таткото: 42 г. (2 точки)

Намиране на годините на майката: 40 г. (1 точка)

Намиране на общия брой на годините на Петьо и брат му: 20 г. (1 точка)

Намиране на годините на Петьо и брат му: съответно 11 г. и 9 г. (3 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

ЗАДАЧИ ЗА V клас

Зад.1 Намерете частното $B:A$,

ако числото $A = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,9 + 1 + 1,1 + 1,2 + 1,3$

и числото $B = 1.324,19 + 80,9.324,19 - 81,9.323,19$.

(7 точки)

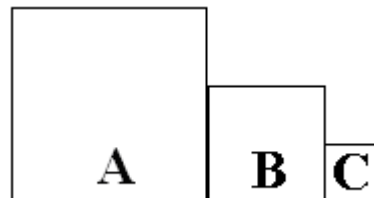
Зад.2 Мързеливко и Незнайко изпекли общо 7,8 кг коледни сладки за един ден. До обяд Незнайко изпекъл 1,2 пъти повече килограма от изпечените от Мързеливко за същото време. След обяд фурната на Незнайко се повредила и той изпекъл с 1 кг сладки по-малко от направените от него до обяд. По колко килограма е направил всеки от тях, ако Мързеливко изпекъл равни количества сутринта и след обяд?

(7 точки)

Зад.3. Антон изрязал три квадрата от картон и ги подредил, както е показано на фигурата. Обиколката на получената фигура била 84 см. Когато махнал квадрат C , получил фигура с обиколка 74 см. После Антон върнал квадрат C на мястото му и махнал квадрат A – получил фигура с обиколка 46 см.

А) Намерете страните на трите квадрата.

Б) Намерете лицето на фигурата.



(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

*Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!*

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1

$$A = (0,1 + 1,3) + (0,2 + 1,2) + (0,3 + 1,1) + (0,4 + 1) + (0,5 + 0,9) + (0,6 + 0,8) + 0,7 = 6,1,4 + 0,7 = 9,1 \text{ (3 точки)}$$

$$B = 324,19 \cdot (1 + 80,9) - 81,9 \cdot 323,19 = 81,9 \cdot (324,19 - 323,19) = 81,9 \cdot 1 = 81,9 \text{ (3 точки)}$$

$$B:A = 81,9 : 9,1 = 9 \text{ (1 точка)}$$

Зад.2

Означаване на количеството сладки, изпечени от Мързеливко с x кг и получаване на общото количество до обяд - $2,2 \cdot x$ кг **(2 точки)**.

Определяне на общото количество сладки, направени след обяд - $2,2 \cdot x - 1$ кг **(2 точки)**.

Получаване на уравнението $2,2 \cdot x + 2,2 \cdot x - 1 = 7,8$ **(1 точка)**.

Намиране на $x = 2$ кг **(1 точка)** и получаване на отделните количества: Мързеливко – 4кг и Незнайко – 3,8кг **(1 точка)**.

Зад.3

Намиране на страната на квадрата A: 14 см **(2 точки)**.

Намиране на страната на квадрата B: 9 см **(2 точки)**.

Намиране на страната на квадрата A: 5 см **(2 точки)**.

Намиране лицето на фигурата $S=302$ кв. см **(1 точка)**.

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

ЗАДАЧИ ЗА VI клас

Зад.1 Сборът на три числа е равен на $(-36,7)$. Намерете числата, ако второто и третото са съответно 3,5% и $\frac{4}{5}$ от първото.

(7 точки)

Зад.2 Пресметнете числената стойност на израза $A^{2012} + 5 \cdot (-B)^{2013} - C^4 \cdot (-0,25)$, където

$$A = \left| -\frac{|-5 + |-4||}{|9 - |-1| - |2| - 5|} \right|; \quad B = \frac{-4 : \left(-\frac{1}{9}\right) + 2,4 : (-0,6)}{7 : \left(-\frac{1}{4}\right) - 2,4 : 0,6} \text{ и } C = \frac{7 \cdot 2^4 \cdot 16 \cdot (2^5)^2 - 5 \cdot 8 \cdot 2^{15}}{2 \cdot 2^{10} \cdot 2^7}.$$

(7 точки)

Зад.3 Дадена е отсечка $AB = 15$ см. Върху нея е взета точка M така, че дължината на AM е 30% от дължината на AB . Построен е квадрат $ABCD$ и точка M е свързана със средите P и N на страните AD и DC на този квадрат. Намерете лицето на $\triangle MNP$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VI клас

Зад.1 Означаване на числата с x , y и z и определяне на $y = 3,5\%x$ (0,5 точки) и $z = \frac{4}{5}x$ (0,5 точки).

Съставяне на равенството $x + y + z = -36,7 \Leftrightarrow x + 3,5\%x + \frac{4}{5}x = -36,7$ (1 точка).

$$x + \frac{3,5}{100}x + \frac{4}{5}x = -36,7 \Leftrightarrow \frac{183,5}{100}x = -36,7 \Leftrightarrow x = -36,7 \cdot \frac{100}{183,5} = -\frac{3670}{183,5} \Rightarrow x = -20 \text{ (3 точки)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3,5}{100} \cdot (-20) = -0,7 \text{ (1 точка)} \text{ и } z = \frac{4}{5} \cdot (-20) = -16 \text{ (1 точка)}.$$

Зад.2 Намерена стойност на $A = 1$ (1,5 точки), $B = -1$ (1,5 точки) и $C = 2$ (2 точки).

Изчисляване на израза $A^{2012} + 5 \cdot (-B)^{2013} - C^4 \cdot (-0,25) = 10$ (2 точки).

Зад.3 Намиране на $AM = 4,5$ см и построяване на точка M (1 точка). Построяване на квадрата $ABCD$ (0,5 точки).
Намиране на $AP = PD = 7,5$ см и построяване на средата P на AD (0,5 точки). Намиране на $DN = NC = 7,5$ см и построяване на средата N на DC (0,5 точки).

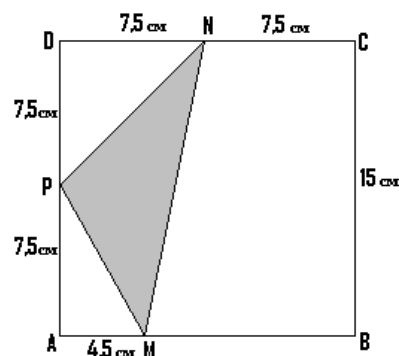
Построяване на $\triangle MPN$ (0,5 точки). Намиране на

$$S_{AMND} = \frac{(4,5 + 7,5)}{2} \cdot 15 = 90 \text{ кв. см (1 точка)},$$

$$S_{\triangle AMP} = \frac{4,5 \cdot 7,5}{2} = 16,875 \text{ кв. см (1 точка)},$$

$$S_{\triangle PND} = \frac{7,5 \cdot 7,5}{2} = 28,125 \text{ кв. см (1 точка) и}$$

$$S_{\triangle MNP} = S_{AMND} - (S_{\triangle AMP} + S_{\triangle PND}) = 90 - 45 = 45 \text{ кв. см (1 точка)}.$$



Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

ЗАДАЧИ ЗА VIII клас

Зад.1 Да се сравнят стойностите на изразите A и B , където

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 0,5\sqrt{108} \text{ и}$$

$$B = \frac{47}{3\sqrt{7} + 4} - \frac{\sqrt{20} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} - 3\sqrt{7}$$

(7 точки)

Зад.2 Дадено е уравнението $2x^2 - 3ax + a^2 + a - 2 = 0$, където a е параметър.

а) Решете уравнението при $a = 3$.

б) За кои стойности на параметъра a , корените x_1 и x_2 на уравнението са цели числа?

(7 точки)

Зад.3 Даден е равнобедрен трапец $ABCD$, $AB > CD$ и $AB \parallel CD$. Точките M , P , N и Q са среди съответно на AB , BC , CD , DA . Отсечката $MP = a$ cm, а $\sphericalangle QMN = 75^\circ$.

а) Намерете ъгъла между диагоналите срещу основата на трапеца.

б) Намерете лицето на трапеца.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

VIII клас

Зад.1. Пресмятане стойността на израза $A = -4\sqrt{3}$ (3 точки).

Пресмятане стойността на израза $B = -5$ (3 точки).

Извод, че $A < B$ (1 точка).

Зад.2 а) Заместено $a = 3$ и получено уравнение $2x^2 - 9x + 10 = 0$ (1 точка).

Решено уравнение $2x^2 - 9x + 10 = 0$ и получени корени $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{5}{2} = 2,5$ (2 точки).

б) Намерена $D = a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$ и извод, че $D \geq 0$ за всяко a (1 точка).

Получени корени $x_1 = a - 1$ и $x_2 = \frac{a}{2} + 1$ (1 точка).

Направен извод, че от $x_1 \in Z \Rightarrow a \in Z$ (1 точка).

Направен извод, че от $x_2 \in Z \Rightarrow a$ - четно число (1 точка).

Зад.3 а) Доказано, че $MPNQ$ е успоредник (1 точка).

Доказано, че $MPNQ$ е ромб (1 точка).

Обосновано, че $\sphericalangle QMP = 150^\circ$ (0,5 точки).

Обосновано, че ъгълът между диагоналите срещу основата е 150° (0,5 точки).

б) Обосновано, че $AC = BD = 2a$ cm (1 точка).

Построени $CK \parallel DB$ ($K \in AB \rightarrow$) и $KH \perp AC$ ($H \in AC \rightarrow$) или направени подобни допълнителни построения, водещи към решението (1 точка).

Обосновано, че $\sphericalangle KCH = 30^\circ$ и $KH = \frac{1}{2} CK = a$ cm (1 точка).

Доказано, че $S_{ABCD} = S_{AKC} = \frac{AC \cdot KH}{2} = a^2 \text{ cm}^2$ (1 точка).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

ЗАДАЧИ ЗА IX клас

Зад.1 Да се реши уравнението $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} + \frac{6x + 10}{2x^2 - 3x + 5} = 3$.

(7 точки)

Зад.2 Да се намери стойността на израза $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2}$, ако x_1 и x_2 са корени на

уравнението $2x^2 - 18x + 15 = 0$.

Упътване: Докажете, че $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ и $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

(7 точки)

Зад.3 Даден е $\triangle ABC$, в който $\angle ABC = 45^\circ$. Върху страната BC е взета точка D , такава че $CD = 2DB$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

- а) Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност лежи върху AD .
- б) Да се намерят градусните мерки на дъгата AB и дъгата BC от тази окръжност.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

IX клас

Зад.1 ДМ: $x \neq -\frac{5}{3}$ (0,5 точки).

Полагаме $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5}$ (0,5 точки) и тогава $y + \frac{2}{y} = 3 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2$ (2 точки).

От $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} = 1$ следва $x_1 = 0 \in \text{ДМ}, x_2 = 3 \in \text{ДМ}$ (2 точки).

От $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} = 2$ следва $x_3 = 5 \in \text{ДМ}, x_4 = -\frac{1}{2} \in \text{ДМ}$ (2 точки)

Зад.2 Прилагане на формулите на Виет за даденото уравнение и получаване $x_1 + x_2 = 9$ и $x_1 x_2 = 7,5$ (1 точка). Доказване на равенството $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ (2 точки).

Доказване на равенството $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ (1 точка). Преобразуване на знаменателя на дробта до вида $(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2$ (1 точка).

Заместване на изразите $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$ с техните стойности и пресмятане стойността на дробния

израз $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2} = \frac{351}{59} = 5\frac{56}{59}$ (2 точки).

Зад.3 Построена симетралата s на AB и доказано, че $OA = OB$, където $O = AD \cap s_{AB}$ (1 точка).

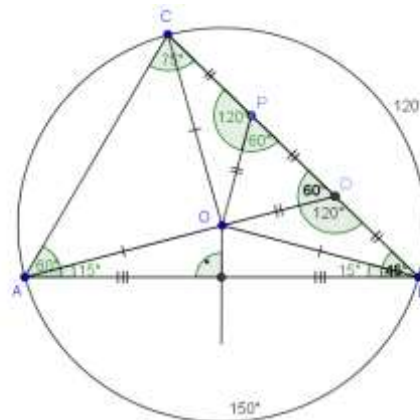
Доказано, че $\triangle OBD$ е равнобедрен с бедра $OD = BD$ (1 точка). Построена отсечката OP (P среда на CD) и доказано, че $\triangle ODP$ е равностранен (1 точка).

Доказано, че $\triangle OBD \cong \triangle COP \Rightarrow OB = OC$ (1 точка).

От $OA = OB$ и $OC = OB \Rightarrow O$ е център на описаната окръжност (1 точка).

б) Намерени $\angle A = 60^\circ$ и $\angle C = 75^\circ$ (1 точка).

Намерена дъгата $AB = 150^\circ$ и дъгата $BC = 120^\circ$ (1 точка).



Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

X клас

Зад.1 Да се реши неравенството $\frac{(x-3)^2 \cdot (x^2 - 7x + 10)}{(x^2 + 8x + 16)(x^2 - 4)} \geq 0$.

(7 точки)

Зад.2 Дадена е квадратната функция $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k + 5$, където k е параметър.

а) Да се намери за кои стойности на k уравнението $f(x) = 0$ има реални корени.

б) Да се намери за кои стойности на k неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x .

(7 точки)

Зад.3 Да се намерят стойностите на реалния параметър a , при които графиките на функциите $f(x) = 4x^2 + 8ax - a$ и $g(x) = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат в една и съща полуравнина относно правата $y = -5$, като върхът на всяка от параболите може да лежи на правата.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

X клас

Зад.1 ДМ: $x \neq -4; \pm 2$ (1 точка). За намиране на $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ (1 точка),
 $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ (1 точка) и $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ (1 точка). Следователно
 $\frac{(x-3)^2 \cdot (x^2 - 7x + 10)}{(x^2 + 8x + 16)(x^2 - 4)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x-2)^2(x-5)(x+4)^2(x+2) \geq 0$, $x \neq -4; \pm 2$ (1 точка).
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$ (2 точки).

Зад.2. а) Съгласно условието $D \geq 0 \Leftrightarrow D = -7k^2 - 4k + 36 \geq 0$ (1 точка)

За намиране на $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{18}{7}$ (1 точка)

За определяне на $k \in \left[-\frac{18}{7}; 2\right]$ (1 точка) и $k \neq 1$ (0,5 точки).

За определяне на $k \in \left[-\frac{18}{7}; 1\right) \cup (1; 2]$ (0,5 точки).

б) $f(x) > 0$ за всяко x , когато $a > 0$ и $D < 0$:

$$\begin{array}{l|l} a > 0 & k - 1 > 0 \\ D < 0 & 7k^2 + 4k - 36 > 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} k > 1 \\ k \in \left(-\infty; -\frac{18}{7}\right) \cup (2; +\infty) \end{array} \Rightarrow k \in (2; +\infty) \text{ (3 точки)}$$

Зад.3 Върховете на параболите са $V_1(-a; -4a^2 - a)$ (1 точка) и $V_2\left(\frac{1}{a}; a - 2 - \frac{4}{a}\right)$ (1 точка).

Тъй като графиката на $f(x)$ е обърната с върха надолу, то следва, че параболите $f(x) = 4x^2 + 8ax - a$ и $g(x) = 4ax^2 - 8x + a - 2$ са разположени над правата $y = -5$ (1 точка).

Условието е равносилно на системата:

$$\begin{array}{l} -4a^2 - a \geq -5 \\ a - 2 - \frac{4}{a} \geq -5 \\ a > 0 \end{array} \quad \text{(1 точка)}$$

Намиране на решенията на неравенствата: $-4a^2 - a \geq -5 \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right]$ (1 точка) и

$a - 2 - \frac{4}{a} \geq -5 \Leftrightarrow a \in [-4; 0) \cup [1; \infty)$ (1 точка). Намиране на общото решение $a = 1$ (1 точка).

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

XI клас

Зад.1 Страните на правоъгълен триъгълник образуват растяща геометрична прогресия. Определете частното ѝ.

(7 точки)

Зад.2 Три числа, a , b и c , първото от които е

$$a = \frac{3^{3\log_3 \sqrt{6}} + 81^{\log_9 5}}{409} \cdot (5^{3\log_5 \sqrt{6}} - 7^{2\log_7 5}) - \log_2 \frac{1}{8},$$
 образуват аритметична прогресия. Ако

към второто число прибавим по-малкия корен на уравнението $x^2 + x - 12 = 0$, ще се получат три числа, които образуват геометрична прогресия. Да се намерят числата a , b и c .

(7 точки)

Зад.3. Нека M е вътрешна точка за $\triangle ABC$, от която всичките му страни се виждат под един и същи ъгъл.

Да се докаже, че ако квадратите на дължините на страните на $\triangle ABC$ образуват аритметична прогресия, то разстоянията от точка M до върховете на $\triangle ABC$ образуват аритметична прогресия.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
XI клас

Зад.1 Съгласно условието страните са a, aq, aq^2 , където $a > 0$ и $q > 1$ (2 точки).

По Питагоровата теорема получаваме $a^2 + a^2q^2 = a^2q^4$ (1 точка).

Получаване на уравнението $q^4 - q^2 - 1 = 0$ (1 точка).

Получаване на $q^{2,1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (2 точки).

Получаване на $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ (1 точка).

Зад.2 Намерена стойността на $a = 2$ (2 точки).

Решаване на уравнението $x^2 + x - 8 = 4$ и намиране на корените $x_1 = -4, x_2 = 3$ (1 точка).

Съставяне на аритметичната прогресия $2, b, 2b - 2$ (1 точка) и геометричната прогресия $2, b - 4, 2b - 2$ (1 точка).

Получаване на уравнението $(b - 4)^2 = 2(2b - 2)$ и намиране на корените $b_1 = 10, b_2 = 2$ (1 точка).

Намиране на числата $a = 2, b = 10, c = 18$ (0,5 точки) или $a = 2, b = 2, c = 2$ (0,5 точки).

Зад.3. От условието следва, че $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ (1 точка).

Нека $AM = x, BM = y, CM = z, AB = c, BC = a, CA = b$.

От косинусовата теорема за $\triangle ABM, \triangle ACM$ и $\triangle BCM$ получаваме

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = c^2 \\ x^2 + z^2 + xz = b^2 \\ y^2 + z^2 + yz = a^2 \end{array} \right. \quad (3 \text{ точки}).$$

Страните a^2, b^2, c^2 образуват аритметична прогресия, т.е. $c^2 - b^2 = b^2 - a^2$ (1 точка).

Чрез почленно изваждане получаваме

$$\left| \begin{array}{l} y^2 - z^2 + x(y - z) = c^2 - b^2 \\ x^2 - y^2 + z(x - y) = b^2 - a^2 \end{array} \right. .$$

Но $c^2 - b^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow y^2 - z^2 + x(y - z) = x^2 - y^2 + z(x - y) \Rightarrow (y - z)(x + y + z) = (x - y)(x + y + z) \Rightarrow y - z = x - y \Rightarrow z, y, x$ в растящ ред образуват аритметична прогресия (2 точки).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

XII клас

Зад.1 В четириъгълна пирамида с основа успоредник две от околните стени са перпендикулярни на равнината на основата и сключват помежду си ъгъл 120° . Другите две околни стени сключват с равнината на основата съответно ъгли от 45° и 60° . Ако височината на пирамидата е h , то намерете основните ръбове и обема ѝ.

(7 точки)

Зад.2 Хипотенузата AB на правоъгълния $\triangle ABC$ лежи в равнината π , а катетите му AC и BC сключват с тази равнина съответно ъгли α и β . Да се определи синусът на ъгъла между равнината на триъгълника и равнината π .

(7 точки)

Зад.3 Дадена е функцията $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, където a , b и c са реални параметри. Функцията има локален екстремум в точка с абсциса $x_0 = 2$, графиката ѝ минава през точката с координати $(0;3)$, а допирателната към графиката на функцията в точка от графиката с абсциса 1 сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл 135° .

Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията в интервала $[1;3]$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XII клас

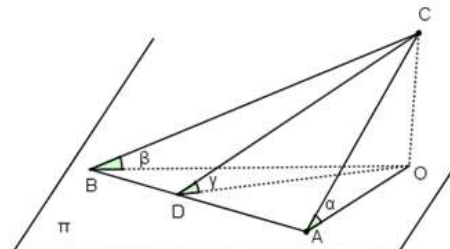
Зад.1 За определяне на ъглите на основата 120° и съответно 60° (1 точка).

За намиране на един от основните ръбове $a = \frac{2}{3} \cdot h$ (2 точки).

За намиране на другия основен ръб $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot h$ (2 точки).

За намиране на лицето на основата $B = \frac{2}{3} \cdot h^2$ (1 точка).

За намиране на обема на пирамидата $V = \frac{2}{9} \cdot h^3$ (1 точка).



Зад.2 Нека точка O е ортогоналната проекция на върха C в равнината π . Тогава $\angle OAC = \alpha$ и $\angle OBC = \beta$ (1 точка). Прекарваме $CD \perp AB$ в равнината (ABC) , откъдето по теоремата за трите перпендикуляра следва $OD \perp AB \Rightarrow \angle ODC = \gamma$ е търсеният двустенен ъгъл (2 точки). Да означим

$OC = x$. От правоъгълните $\triangle OAC$ и $\triangle OBC$ следва $AC = \frac{x}{\sin \alpha}$ и $BC = \frac{x}{\sin \beta}$ (1 точка). От

теоремата на Питагор за $\triangle ABC$ следва $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

$\Rightarrow AB = \frac{x}{\sin \alpha \sin \beta} \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$ (1 точка).

От равенството $AB \cdot DC = BC \cdot AC$ в правоъгълния $\triangle ABC$ следва $DC = \frac{x}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}$ (1 точка).

От правоъгълния $\triangle DOC$ намираме $\sin \gamma = \frac{OC}{DC} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$ (1 точка).

Зад.3 От $f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$ (1 точка). Намиране на $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ (1 точка). Съгласно условието на задачата $f'(2) = 12 + 4a + b = 0$ и $f'(1) = 3 + 2a + b = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$, откъдето следва

системата $\begin{cases} 4a + b = -12 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = -4, b = 4$ (2 точки). Тогава $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ и

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = (3x - 2)(x - 2) \Rightarrow f_{\min}(2) = 3, f_{\max}(\frac{2}{3}) = \frac{113}{27}$ (1 точка) и $f(x)$ расте в

интервалите $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$, а в интервала $(\frac{2}{3}; 2)$ намалява (1 точка). Следователно в $[1; 3]$

НГС на $f(x)$ е $\max(f(1); f(3)) = \max(4; 6) = f(3) = 6$, а НМС на $f(x)$ е $f_{\min}(2) = 3$ (1 точка).

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013г.

ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

Задачи с избираем отговор:

В бланката за отговори отбележете верния според Вас отговор.

Правилните отговори на задачите от 1 до 8 се оценяват с по 2 точки

1. Нормалният вид на многочлена $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2$ е:

A) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

Б) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y^2$

В) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

Г) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y$

2. Изразът $\frac{1}{3}(a+1)(a-1) - \frac{1}{3}(a^2+1)$ е тъждествено равен на:

A) $-\frac{2}{3}$

Б) 0

В) $\frac{2}{3}$

Г) $\frac{2}{3}a^2$

3. Изразът $(2x+5)^2 - 4x(x+5)$ е тъждествено равен на:

A) $-2x^2 + 25$

Б) $20x + 25$

В) 25

Г) $-2x^2 + 10$

4. Изразът $(-x-2)^3$ е тъждествено равен на:

A) $(x+2)^3$

Б) $(x-2)^3$

В) $(-x+2)^3$

Г) $-(x+2)^3$

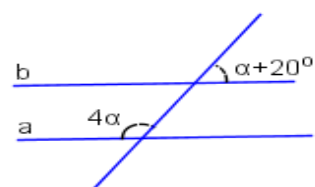
5. На чертежа $a \parallel b$ (**a** и **b**-прави). Мяката на ъгъл α е:

A) 20°

Б) 30°

В) 32°

Г) 60°



6. На чертежа $\angle DAC$ е външен за $\triangle ABC$ и $BH \perp AC$.

Мяката на $\angle ABH$ е:

A) 128°

Б) 48°

В) 38°

Г) 52°

7. Ъглите $\angle MON = 120^\circ$ и $\angle NOP$ са съседни.

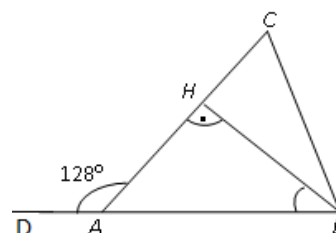
Мяката на $\angle MOP$ е:

A) 180°

Б) 60°

В) 90°

Г) 120°



Задачи с отворен отговор:

Запишете получения от Вас отговор в бланката за отговори.

Правилните отговори на задачите от 17 до 20 се оценяват с по 6 точки

17. В равенствата са пропуснати някои едночлени, местата на които са означени с главни букви. Срещу всяка буква запишете едночлен така, че полученото равенство да е твърдение.

$$(x^2 - 3)(3 + A) = x^4 - 9; \quad x^2 - 6x + 7 = (3 - x)^2 - B; \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^3 + C.$$

18. Пресметнете стойността на израза $x - y$, ако $x + y = 8$ и $y^2 - x^2 = 16$.

19. Две успоредни прави са пресечени с трета. Един от вътрешнокръстните ъгли е $\frac{5}{9}$ от изправения ъгол. Да се намери острият ъгол, който ъглополовящата на този ъгол сключва с другата права.

20. В $\triangle ABC$ ъглополовящите на $\angle BAC$ и $\angle ABC$ се пресичат в точка O . Намерете $\angle ACB$, ако $\angle AOB = 3\angle ACB$.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 8 точки

21. В таблицата са показани резултатите на 50 ученици от 7. клас, получени на математическо състезание (броят на точките, които може да получи един ученик е от 0 до 50).

Брой ученици	2	5	7	8	10	16	2
Получени точки	5	10	20	25	30	40	50

- А) Колко ученици са получили по-малко от 20 точки?
- Б) Колко ученици са получили повече от 50% от максималния брой точки?
- В) Колко процента от учениците са получили максималния брой точки?
22. Седмокласничката Милица от град Русе е допусната до участие в национален кръг на математическото състезание „Европейско кенгуру“, което ще се проведе в град София. Милица живее с майка си, баща си и братчето си Иво, който е ученик в пети клас. Семейният съвет започнал да обсъжда следните варианти за пътуването до София.

Първи вариант: пътуване с автобус на фирма „Комфорт“. Цената на билета в едната посока е 28 лв. за възрастни, а учащите ползват намаление от 10%.

Втори вариант: пътуване със семейния автомобил, който за 100 км изразходва 5,5 литра бензин и цената на един литър бензин е 2,50 лв. Разстоянието от Русе до София е 324 км.

А) Колко лева ще струва пътуването в двете посоки, ако ученичката е придружена от баща си и брат си, и се възползват от услугите на фирма „Комфорт“?

Б) Ако цялото семейство реши да подкрепи Милица на състезанието, кой от вариантите е по изгоден и с колко лева е по-евтин?

Задачи, на които се изписва решението с обосновка:

Върху листа за решения запишете решенията с обосновка.

Правилните отговори на задачите от 21 до 22 се оценяват с по 10 точки

23. Дадени са многочлените $P = x^2 + ax + a(x + a) - 1$ и $Q = x^2 + 2ax - 1 - 2a$

- а) Представете P с нормален многочлен.
- б) Намерете стойностите на a , за които $P = Q$.
- в) Разложете на множители многочлените P и Q .

24. В остроъгълния $\triangle ABC$ височините през върховете A и B се пресичат в точка H , а ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle ACB$ се пресичат в точка O . Ако $\angle AHB = \angle BOC$, намерете отношението на $\angle ABC$ и $\angle ACB$.

Общ брой точки: 100. За областен кръг се класират учениците с минимум 73 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО-ВРАЦА

✉ ул. "Софроний Врачански" №6, ☎ 092 62 46 43

**ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 63. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
15.12.2013г.**

ЗАДАЧИ ЗА VII КЛАС

КЛЮЧ С ВЕРНИТЕ ОТГОВОРИ

Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки	Задача №	Отговори	Точки
1.	В	2	9.	Г	3	17.	$A = x^2$ $B = 2$ $C = \frac{1}{8}$	2 2 2
2.	А	2	10.	Б	3	18.	$x - y = -2$	6
3	В	2	11.	Г	3	19.	50°	6
4.	Г	2	12.	Г	3	20.	36°	6
5.	В	2	13.	Б	3	21.	А. 7 Б. 28 В. 4%	а) 2 б) 3 в) 3
6.	В	2	14.	Б	3	22.	А. 156,80 лв. Б. По изгоден е втори вариант, защото пътуването с кола ще струва 89,10 лв., а с автобус – 212,80 лв. Със 123,70 лв. е по-евтино.	а) 3 б) 4 1
7.	А	2	15.	А	3	23.	а) $P = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ б) $a = 0, a = -2$ в) $Q = (x + 2a + 1)(x - 1);$ $P = (x + a + 1)(x + a - 1).$	а) 2 б) 2 в) 6
8.	А	2	16.	Б	3	24.	$\frac{\angle ABC}{\angle ACB} = \frac{1}{1}$	10

Решения на задачи 23. и 24. и критерии за оценяване

23 задача

A) $P = x^2 + ax + a(x + a) - 1 = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ (2 точки).

Б) $P = Q \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 + 2ax - 1 - 2a \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0, a = -2$ (2 точки).

В) $P = x^2 + ax + a(x + a) - 1 = x(x + a) + a(x + a) - 1 = (x + a)^2 - 1^2 = (x + a + 1)(x + a - 1)$ (3 точки).

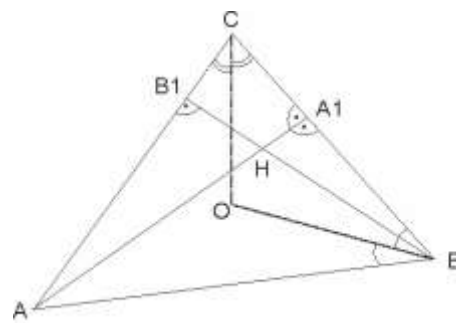
$Q = x^2 + 2ax - 1 - 2a = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - 1 - 2a = (x + a)^2 - (a + 1)^2 = (x + 2a + 1)(x - 1)$ (3 точки).

24 задача Означаваме ъглите в $\triangle ABC$ с α, β и γ .

От $\triangle CB_1B$ определяне на $\angle B_1BC = 90^\circ - \gamma$ (1 точка).

Намерен $\angle A_1HB = \gamma$ (1 точка).

Определяне на $\angle BHA = 180^\circ - \gamma$ (1 точка).



Използване на равенството $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и определяне на $\angle COB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (3 точки).

Намиране на зависимостта $180^\circ - \gamma = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (1 точка).

Използване на равенството $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и получаване на извода $\beta = \gamma$ (2 точки).

Намиране на отношението $\frac{\angle ABC}{\angle ACB} = \frac{1}{1}$ (1 точка).