

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

XII клас

Зад.1 Основата на наклонена призма $ABCA_1B_1C_1$ е равностранен $\triangle ABC$ със страна a . Върхът B_1 е равноотдалечен от върховете A , B и C , а лицето на околната стена ACC_1A_1 е $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Да се намерят ъгълът, който сключват околният ръб BB_1 и основният ръб AC , околната повърхнина и обемът на призмата.

(7 точки)

Зад.2 Четириъгълникът $ABCD$ със страна $AB = 13$ cm и диагонал $AC = 12$ cm е вписан в окръжност k с център точката O . Ако лицето на $\triangle ACD$ е 24 cm² и $\angle ACB = 90^\circ$, то:

- а) да се намери периметърът на $ABCD$;
- б) да се докаже, че диагоналът BD е ъглополовяща на $\angle ABC$ и $DO \perp AC$.

(7 точки)

Зад.3 Да се намери най-голямата стойност измежду стойностите, които функцията $f(x) = -x^2 + 10x - 27$ приема, когато аргументът x принадлежи на:

- а) множеството на реалните числа;

- б) множеството от решенията на неравенството $\log_{0,7} \log_2 \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} \leq 0$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца

ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

ХІІ клас

Зад.1 От $B_1B=B_1C=B_1A \Rightarrow$ т. $B_1 \frac{\text{оп}}{(ABC)}$ т. O – център на описаната около

$\triangle ABC$ окръжност, но $\triangle ABC$ е равностранен $\Rightarrow$ т. O е ортоцентър, медицентър, център на вписаната окръжност (**1 точка**)

$\Rightarrow BO \perp AC$, но $BB_1 \frac{\text{оп}}{(ABC)} BO \Rightarrow BB_1 \perp AC / \text{ТП} \Rightarrow \angle(BB_1, AC) = 90^\circ$ (**1 точка**).

От $BB_1 \parallel CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow CC_1 \perp AC$, т.е. ACC_1A_1 - правоъгълник (**1 точка**).

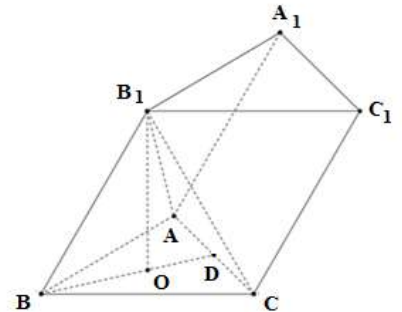
$$S_{ACC_1A_1} = AC \cdot CC_1 \Rightarrow a \cdot CC_1 = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \Rightarrow CC_1 = BB_1 = AA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (0,5 точки) } \Rightarrow$$

$\triangle BCB_1$ и $\triangle BAB_1$ са равнобедрени и правоъгълни $\Rightarrow \angle CBB_1 = \angle ABB_1 = 45^\circ$ (**1**

точка). $S = S_{BCC_1B_1} + S_{ABB_1A_1} + S_{ACC_1A_1}$

$$\Rightarrow S = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ + a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ + \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 \text{ (0,5 точки). От } BB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (0,5 точки) и}$$

$$\triangle BOB_1 - \text{правоъгълен} \Rightarrow h = B_1O = \frac{a\sqrt{6}}{6} \text{ (1 точка) } \Rightarrow V = B \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{8} \text{ (0,5 точки).}$$



Зад.2 а) От това, че $\angle ACB = 90^\circ$ и ABCD- вписан в $k \Rightarrow AB$ е диаметър за окръжността k (**0,5 точки**). $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow BC = 5$ cm (**0,5 точки**).

Нека $AD = x$, $DC = y$. От ABCD- вписан в k

$$\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC \Rightarrow \sin \angle ADC = \sin \angle ABC = \frac{12}{13}, \text{ а } \cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = -\frac{5}{13} \text{ (1 точка).}$$

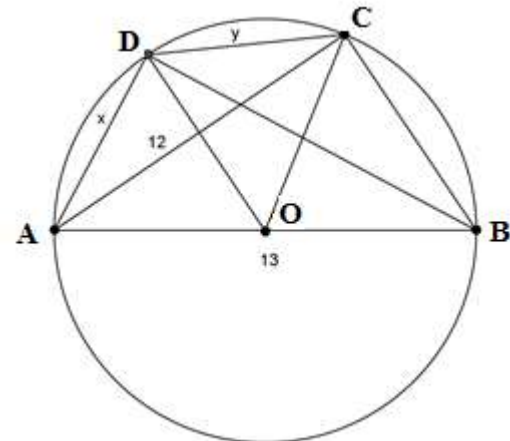
От $S_{\triangle ACD} = 24$ и косинусова теорема за $\triangle ACD$ получаваме системата:

$$\begin{cases} AD \cdot CD \cdot \sin \angle ACD = 2 \cdot S_{\triangle ACD} \\ AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC \end{cases} \text{ (1 точка)}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 52 \\ x^2 + y^2 + \frac{10}{13}xy = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 52 \\ x + y = 4\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow AD = CD = x = y =$$

$$2\sqrt{13} \text{ cm (1,5 точки) и } P_{ABCD} = 18 + 4\sqrt{13} \text{ cm (0,5 точки).}$$

б) От $AD = CD = 2\sqrt{13}$ cm следва, че $\widehat{AD} = \widehat{CD} \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD$, т. е. BD е ъглополовяща на $\angle ABC$ (**1 точка**). От $\triangle AOD \cong \triangle COD \Rightarrow \angle ADO = \angle CDO$, т. е. DO е ъглополовяща на $\angle ADC$, но $\triangle ADC$ е равнобедрен с основа $AC \Rightarrow AC \perp DO$ (**1 точка**).



Зад.3 а) $f(x) = -x^2 + 10x - 27 = -[(x-5)^2 + 2] \leq 0$ (**1 точка**). Най-голямата стойност на $f(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ е $f_{\max}(x=5) = -2$ (**1 точка**).

б) Множеството от допустимите стойности D се задава от условията $x \neq -4, \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} > 0$ и

$$\log_2 \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} > 0 \text{ (1 точка). Неравенството}$$

$$\log_{0,7} \log_2 \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 16}{x + 4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} \geq 0 \Rightarrow$$

$x \in (-4, -3] \cup [8, +\infty)$ /стойностите удовлетворяват и условията, определящи $D/$ (**3 точки**). Най-голямата стойност на $f(x)$ при $x \in (-4, -3] \cup [8, +\infty)$ е $f(x=8) = -11$ (**1 точка**).

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

XI клас

Зад.1 Инвестиционен фонд предлага три варианта за нарастване на сума, вложена за три години във фонда:

Първи вариант - след всяка година сумата нараства с 10%.

Втори вариант - на края на третата година сумата нараства с 30 %.

Трети вариант-след първата година – сумата нараства с 5 %, след втората- с 10%, след третата – с 15 %.

А) Кой от вариантите е най-изгоден за вложителите?

Б) Господин Илиев избрал първи и втори вариант и вложил равни суми във фонда. След третата година едната сума нараснала спрямо другата сума с 93 лева. Колко лева общо е вложил във фонда г-н Илиев?

(7 точки)

Зад.2 Вторият и третият член на геометрична прогресия са съответно четвърти и осми член на аритметична прогресия. Намерете първите три члена на геометричната прогресия, ако вторият член на аритметичната прогресия е нула и частното на геометричната прогресия е равно на разликата на аритметичната прогресия.

(7 точки)

Зад.3 Страните на $\triangle ABC$ образуват аритметична прогресия и дължината на $AC = 2$ cm. Медианата AM ($M \in BC$) е перпендикулярна на правата AB . Намерете:

- а) разликата на аритметичната прогресия;
- б) $\cos \angle BAC$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
XI клас

Зад.1 а) Общо 4 точки

	1 година	2 година	3 година
I вариант	$X+10\%X=1,1X$	$1,1X+10\%1,1X=1,21X$	$1,21X+10\%1,21X=1,331X$
II вариант			$X+30\%X=1,3X$
III вариант	$X+5\%X=1,05X$	$1,05X+10\%1,05X=1,155X$	$1,155X+15\%1,155X=1,32825X$

$1,331X > 1,32825X > 1,3X, X > 0 \Rightarrow$ най-изгоден е първият вариант.

За вярно определяне на коефициента на всеки от вариантите - по 1 точка.

За сравняване и верен отговор - 1 точка.

б) Общо 3 точки

$1,331X - 1,3X = 93 \Rightarrow 0,031X = 93 \Rightarrow X = 3000$. Господин Илиев е вложил общо 6000 лв.

За вярно съставено уравнение- 1 точка.

За вярно пресметнат X- 1 точка. За отговор 6000лв.- 1 точка.

Зад.2 Въвеждаме следните означения:

$\dots a_1, a_2 = x, a_3 = x.q$ с частно q **(1 точка)** и

$\dots b_1, b_2 = 0, b_3, b_4 = x, b_5, b_6, b_7, b_8 = x.q, \dots$ с разлика d **(1 точка)**.

Съгласно условието $b_2 = 0 \Leftrightarrow x - 2d = 0 \Leftrightarrow x = 2d$ **(1 точка)**, $d = q$ и

$b_4 + 4d = b_8 = x.q \Leftrightarrow x + 4d = x.q \Rightarrow 6d = 2d^2 \Rightarrow d = 0$ (не е решение) или $d = 3$ **(2 точки)**.

Следователно $q = d = 3$, $x = 2d = 6 = a_2$ **(1 точка)** $\Rightarrow a_3 = x.q = 18$, $a_1 = x : q = 2$

$\Rightarrow$ членовете на геометричната прогресия са 2, 6, 18 **(1 точка)**.

Зад.3 $\angle BAC > 90^\circ \Rightarrow a > b$ и $a > c$ **(0,5 точки)**.

От $\triangle MAB$, $\angle MAB = 90^\circ \Rightarrow c < \frac{a}{2}$ **(0,5 точки)**.

$\angle AMB < 90^\circ \Rightarrow \angle AMC > 90^\circ$ (съседни ъгли) $\Rightarrow b > \frac{a}{2}$ **(0,5 точки)**,

следователно $c < b < a$ **(0,5 точки)**.

Тогава $b = 2$, a и от свойството на аритметичната прогресия

$4 = a + c \Rightarrow a = 4 - c$ **(1 точка)**.

От правоъгълния $\triangle ABM$ определяме $\cos \angle \beta = \frac{2c}{a}$ **(0,5 точки)**.

От косинусова теорема за $\triangle ABC$ следва равенството $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$\Rightarrow 4 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{2c}{a} \Rightarrow 4 = a^2 - 3c^2 \Rightarrow 4 = (4 - c)^2 - 3c^2 \Rightarrow c^2 + 4c - 6 = 0$

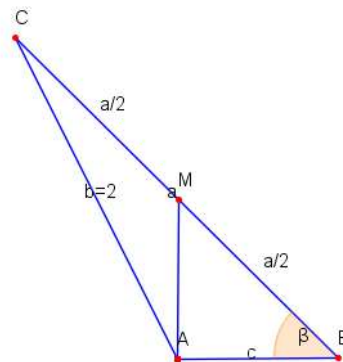
$\Rightarrow c_1 = -2 - \sqrt{10} < 0$ (не е решение) и $c_2 = \sqrt{10} - 2$ **(1,5 точка)**.

Разликата на аритметичната прогресия $d = b - c = 2 - (\sqrt{10} - 2) = 4 - \sqrt{10}$ **(0,5 точки)**.

б) Намираме $a = b + d = 2 + (4 - \sqrt{10}) = 6 - \sqrt{10}$ **(0,5 точки)**.

От формулата $\cos \angle BAC = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$ намираме $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{10} - 7}{\sqrt{10} - 2} = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ **(1 точка)**.

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

X клас

Зад.1 Да се намерят целите стойности на x от дефиниционното множество на функцията

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 10x + 13} - \frac{\sqrt{17x - 2x^2 - 33}}{\sqrt{2x^2 + 13x + 20}}.$$

(7 точки)

Зад.2 Ъглополовящите AL и CD на равнобедрения $\triangle ABC$ с бедра AC и BC се пресичат в точка O, която дели CD в отношение 4:3, считано от върха C. Дължината на отсечката BL е 12 cm.

- а) Да се намери лицето на $\triangle ABC$.
- б) Да се намери отношението на дължините на радиуса на описаната и радиуса на вътрешно вписаната в $\triangle ABC$ окръжности.

(7 точки)

Зад.3 Дадена е функцията $f(x) = \frac{(x^2 - x - 2)\sqrt{1 - 6x + 9x^2}}{3x - 1}$. Да се намерят:

- а) най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[-3; -1]$;
- б) стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $f(x) = a$ има единствен реален корен.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
X клас

Зад.1 DM:
$$\begin{cases} 2x^2 - 10x + 13 \geq 0 \\ -2x^2 + 17x - 33 \geq 0 \text{ (1 точка)} \\ 2x^2 + 13x + 20 > 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 10x + 13 \geq 0$ за $x \in (-\infty, +\infty)$, защото $D < 0$, $a = 2 > 0$ **(1,5 точки)**.

За решения на $-2x^2 + 17x - 33 \geq 0$ получаваме $x \in \left[3, 5\frac{1}{2}\right]$ **(1,5 точки)**.

За решения на $2x^2 + 13x + 20 > 0$ получаваме $x \in (-\infty, -4) \cup \left(-2\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **(1,5 точки)**.

Следователно DM: $x \in \left[3, 5\frac{1}{2}\right]$ **(1 точка)** и целите стойности на x от дефиниционното множество на $f(x)$ са 3, 4 и 5 **(0,5 точки)**.

Зад.2 а) АО ъглополовяща в $\triangle ADC \Rightarrow AC:AD=CO:DO=4:3$ **(0,5 точки)**

$\triangle ABC$ равнобедрен $\Rightarrow AD=DB$ и от AL ъглополовяща

$\Rightarrow AC:AB=CL:BL=2:3$ **(0,5 точки)**

Намерени $CL=8$ cm **(0,5 точки)**, $AC=CB=20$ cm **(0, 5 точки)**,

$AB=30$ cm **(0, 5 точки)**, $CD=5\sqrt{7}$ cm **(0, 5 точки)**,

$S=75\sqrt{7}$ cm² **(0, 5 точки)**

б) $r = \frac{3}{7}CD = 15\frac{\sqrt{7}}{7}$ cm **(1 точка)**.

От правоъгълния $\triangle APC$ намерен $R = \frac{CP}{2} = 40\frac{\sqrt{7}}{7}$ **(2 точки)**.

Намерено отношението $R:r=8:3$ **(0,5 точки)**.

Зад.3 а) $f(x) = \frac{(x^2-x-2)|3x-1|}{3x-1} = -x^2 + x + 2$, защото $3x-1 < 0$, за $x \in [-3; -1]$ **(1 точка)**

Намерено $x_V = \frac{1}{2}$ и извод, че $f(x)$ е растяща в интервала $[-3; -1]$ **(1 точка)**.

$f_{\min} = f(-3) = -10$ **(1 точка)**

б) $f(x) = \frac{(x^2-x-2)|3x-1|}{3x-1} = \begin{cases} x^2 - x - 2, x > \frac{1}{3} \\ -x^2 + x + 2, x < \frac{1}{3} \end{cases}$ **(1 точка)**

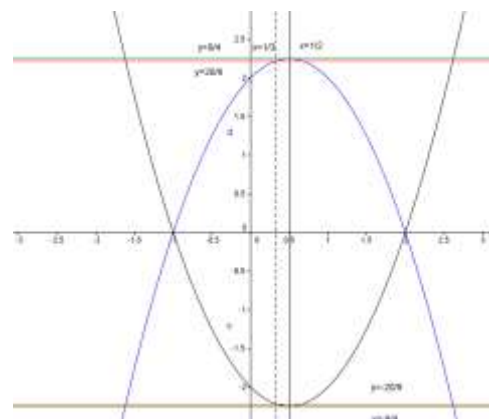
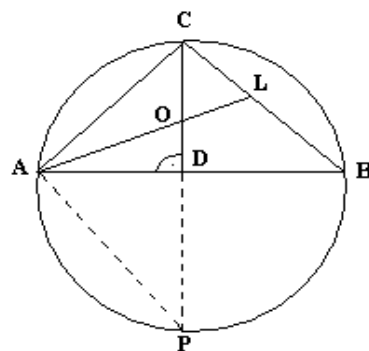
При $x > \frac{1}{3}$ намерени $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{20}{9}$ и начертана графиката на $f(x) = x^2 - x - 2$ **(1 точка)**

При $x < \frac{1}{3}$ намерени $V\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{20}{9}$ и начертана

графиката на $f(x) = -x^2 + x + 2$ **(1 точка)**

Отговор: $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{20}{9}; +\infty\right)$ **(1 точка)**

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.



ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

IX клас

Зад.1 . а) Да се опрости изразът $A = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \cdot (x - 3)$.

б) Решете уравнението $\frac{x+9}{x^2-3x-10} + \frac{x+15}{25-x^2} = \frac{1}{x+2}$.

(7 точки)

Зад.2 Четириъгълникът $ABCD$ ($AC \perp BD$, $AC \cap BD = O$) е трапец, вписан в окръжност. Средната отсечка в трапеца $ABCD$ е с дължина 12 cm, а дължините на основите AB и CD се отнасят така, както 2:1. Намерете:

а) лицето на трапеца $ABCD$;

б) лицата на $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$.

(7 точки)

Зад.3 Дадено е квадратното уравнение $(a^2 + 1)x^2 + (2a^2 + a + 2)x + a^2 + a - 1 = 0$, където a е параметър.

а) Да се докаже, че за всяка стойност на параметъра a , уравнението има два различни корена, които не могат да бъдат противоположни числа.

б) Ако x_1 и x_2 са корените на даденото уравнение, да се намерят всички цели стойности, които може да приема изразът $|x_1 - x_2|$.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
IX клас

Зад.1 а) Общо 3 точки

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2 + x + 1) \quad (1 \text{ точка}), \quad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3) \quad (1 \text{ точка}).$$

Определяне на ДС: $x \neq 1, x \neq 3$ (0,5 точки).

$$A = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \cdot (x-3) = \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2(x-3)} \cdot (x-3) = x^2 + x + 1 \text{ при } x \neq 1, x \neq 3 \quad (0,5 \text{ точки}).$$

б) Общо 4 точки

ДС: $x \neq -2; x \neq \pm 5$ (0,5 точки).

$$\frac{x+9}{x^2-3x-10} + \frac{x+15}{25-x^2} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+9}{(x-5)(x+2)} - \frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+2} \quad (1,5 \text{ точки})$$

$$\Rightarrow (x+9)(x+5) - (x+15)(x+2) = x^2 - 25 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \quad (1 \text{ точка})$$

$$\Rightarrow x_1 = 5; x_2 = -8, \quad x_1 = 5 \notin \text{ДС}; x_2 = -8 \in \text{ДС} \quad (1 \text{ точка}).$$

Зад.2) а) От ABCD-вписан трапец, следва че ABCD е равнобедрен трапец (1 точка).

От $AB:CD = 2:1$ и $\frac{AB+CD}{2} = 12 \text{ cm} \Rightarrow AB = 16 \text{ cm}, CD = 8 \text{ cm} \quad (1 \text{ точка}).$

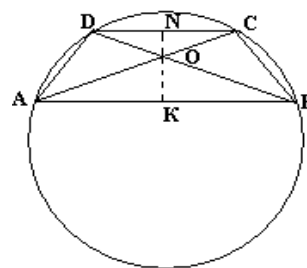
Нека OK и ON - височини в равнобедрените правоъгълни триъгълници ABO и CDO $\Rightarrow OK, ON$ -медиани към хипотенуза $\Rightarrow OK = 8 \text{ cm}$ и $ON = 4 \text{ cm}$

$$\Rightarrow h_{ABCD} = KN = 12 \text{ cm} \quad (1 \text{ точка})$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{16+8}{2} \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ точка}).$$

б) $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (1 точка) $\Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$ (1 точка).

Ако $S = S_{AOD} = S_{BOC}$, то $S = \frac{S_{ABCD} - S_{ABO} - S_{CDO}}{2} = \left(144 - \frac{16 \cdot 8}{2} - \frac{8 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = 32 \text{ cm}^2$ (1 точка).



Зад.3 а) $D = 9a^2 + 8 > 0, \forall a \Rightarrow x_1 \neq x_2$ (1 точка).

Корените са противоположни числа при $x_1 + x_2 = 0$ (1 точка).

Доказано, че $x_1 + x_2 = -\frac{2a^2 + a + 2}{a^2 + 1} \neq 0, \forall a$ (1 точка).

б) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \frac{\sqrt{9a^2 + 8}}{a^2 + 1}$ (1 точка).

$$\frac{\sqrt{9a^2 + 8}}{a^2 + 1} < \frac{\sqrt{9a^2 + 9}}{a^2 + 1} \leq \frac{3\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 1} \leq 3, \quad a^2 + 1 \geq 1, \forall a \quad (1 \text{ точка})$$

$$\Rightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 3 \quad (1 \text{ точка}) \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2, \quad |x_1 - x_2| = 1 \quad (1 \text{ точка}).$$

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

VIII клас

Зад.1 Подредете по големина решенията на уравненията

$9.(x-3)(x+3) + (3x-1)^2 - 4(x+2)^2 = -96$ и $(2\sqrt{3} + y)(y - 2\sqrt{3}) + 5.y + \sqrt{30}.\sqrt{10,8} = 0$,
като започнете от най- малкия корен.

(7 точки)

Зад.2 Даден е правоъгълник със страни $AB=60$ cm и $BC=40$ cm. Върху страните AB , BC , CD и DA са взети съответно точките P , Q , R и S така, че $AP=AS=CQ=CR$.

- а) Да се изрази лицето S на $PQRS$ чрез дължината на AP .
- б) Да се пресметне дължината на AP , ако $S_{PQRS} = 368$ cm².
- в) Да се пресметне дължината на AP , ако S_{PQRS} е възможно най-голямо.

(7 точки)

Зад.3 Ако a , b и c са дължини на страни на триъгълник, да се докаже, че уравнението $c^2.(x+1) + b^2.x.(x+1) = a^2.x$ няма корени.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
VIII клас

Зад.1 $9.(x-3)(x+3) + (3x-1)^2 - 4(x+2)^2 = -96 \Leftrightarrow 7x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{7}$

(3 точки).

$(2\sqrt{3} + y)(y - 2\sqrt{3}) + 5y + \sqrt{30} \cdot \sqrt{10,8} = 0 \Leftrightarrow y^2 + 5y + 6 = 0 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = -2$ **(3 точки).**

Следователно $y_1 < y_2 < x_1 < x_2$ **(1 точка).**

Зад.2) а) Означаване на $AP = AS = x$ см и определяне $BP = RD = (60 - x)$ см и $BQ = DS = (40 - x)$ см, където $0 \leq x \leq 40$ **(1 точка).**

Изразяване на търсеното лице в cm^2 :

$$S_{PQRS} = S_{ABCD} - [S_{APS} + S_{PBQ} + S_{QCR} + S_{RDC}] =$$
$$= 40 \cdot 60 - \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{(60-x)(40-x)}{2} \right] = 100x - 2x^2$$

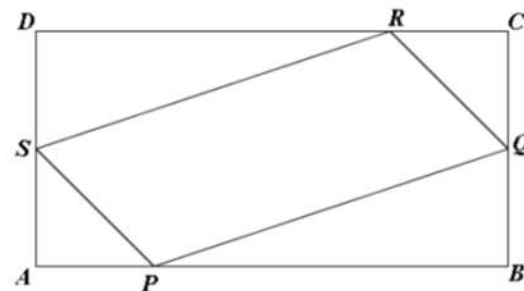
(1 точка).

б) Решаване на уравнението $S_{PQRS} = 100x - 2x^2 = 368 \Leftrightarrow x^2 - 50x + 184 = 0$, намиране $x_1 = 4 < 40$, $x_2 = 46 > 40$ и определяне, че $AP = 4$ см **(2 точки).**

в) Изразяване (чрез отделяне на точен квадрат) на

$$S_{PQRS} = 100x - x^2 = 2(2.25x - x^2) = 2.625 - 2(625 - 2.25x + x^2) = 1250 - 2(25 - x)^2 \leq 1250$$

(2 точки) и определяне, че $AP = 25$ см, ако лицето S_{PQRS} е възможно най-голямо **(1 точка).**



Зад.3 $c^2 \cdot (x+1) + b^2 \cdot x \cdot (x+1) = a^2 \cdot x \Leftrightarrow b^2 \cdot x^2 + (c^2 + b^2 - a^2)x + c^2 = 0$ **(1 точка).**

Определяне на коефициентите на квадратното уравнение и

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b+c+a)(b+c-a)(b+a-c)(b-(a+c))$$
 (3 точки).

От a, b, c – дължини на страни на триъгълник, следва $a > 0, b > 0, c > 0$ и $a+b+c > 0$ **(1 точка).**

Съгласно неравенството на триъгълника $a+b > c, a+c > b$ и $b+c > a$ **(1 точка)**

$\Rightarrow D < 0$ **(0,5 точка)** и уравнението няма корени **(0,5 точки).**

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

VII клас

Зад.1 а) Пресметнете стойността на израза $A = (x + y)^2 - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - 3y\left(\frac{y}{4} - 1\right)$ при

$x = -2^4 \cdot 8^2 \cdot 4^{-5}$ и $y = 2014$.

б) Опростете израза $B = \frac{b^2c^2 - 4bc - 25b^2 - 20b}{(bc - 5b - 4)(c + 5)} + c$ и пресметнете стойността му при $b = 0,73$ и $c = 0,27$.

(7 точки)

Зад.2 Ъглополовящата на $\angle ACB$ на $\triangle ABC$ образува със страната АВ ъгъл 73° , а с ъглополовящата на $\angle CAB$ – ъгъл 58° . Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

Упътване: Разгледайте възможните случаи.

(7 точки)

Зад.3 Намерете стойността на x , за която многочленът $M = \frac{19}{4} - x^2 + x$ приема най-голяма стойност. За така намерената стойност на x пресметнете стойността на M .

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
VII клас

Зад.1 а) $x = -1$ (1точка), $A = 3yx + 3y = 3y(x+1)$ (2 точка) $\Rightarrow A = 0$ (0,5 точки) .

$$\begin{aligned} \text{б) } B &= \frac{b^2c^2 - 4bc - 25b^2 - 20b}{(bc - 5b - 4)(c + 5)} + c = \frac{b^2(c^2 - 25) - 4b(c + 5)}{(bc - 5b - 4)(c + 5)} + c = \frac{b^2(c + 5)(c - 5) - 4b(c + 5)}{(bc - 5b - 4)(c + 5)} + c = \\ &= \frac{b(c + 5)(bc - 5b - 4)}{(bc - 5b - 4)(c + 5)} + c = b + c \text{ (3точки)} \Rightarrow B = 1 \text{ (0,5 точки)}. \end{aligned}$$

Зад.2) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 64^\circ$, $\angle C = 86^\circ$ (3,5 точки) или $\angle A = 98^\circ$, $\angle B = 64^\circ$, $\angle C = 18^\circ$ (3,5 точки)

Зад.3

$$\begin{aligned} M &= \frac{19}{4} - x^2 + x = \frac{19}{4} - (x^2 - x) = \frac{19}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 5 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ (4точки)} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &\geq 0 \text{ за всяко } x \text{ (1 точка)} \Rightarrow M_{\max} = 5 \text{ при } x = \frac{1}{2} \text{ (2 точки)}. \end{aligned}$$

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

VI клас

Зад.1 Пресметнете числената стойност на израза $A = \frac{|x-y|}{3} - \frac{3-|2y-x|}{4} + \frac{|x|+|y|}{|y-x|}$ при

$$x = -3^2 + 0,2^3 : \frac{1}{1000} - (-1)^{2013} - 3 \text{ и } y = \frac{|-5| \cdot (-1)^{2014} - |2-6| \cdot (-1)^{2015}}{-3^4 : (-3)^3}.$$

(7 точки)

Зад.2 Двама велосипедисти тръгнали едновременно един срещу друг от два града. Първият велосипедист се движил със скорост 15 km/h и неговата скорост била $\frac{10}{11}$ от скоростта на втория велосипедист. Когато се срещнали, се оказало, че единият от тях е изминал със 7 km повече от другия. Намерете:

- а) разстоянието между двата града;
- б) колко време се е движил всеки от тях до срещата.

(7 точки)

Зад.3 Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC=BC=24$ cm). Дължината на височината на триъгълника през върха C е с 20% по-голяма от дължината на височината на триъгълника през върха A .
Да се намери обиколката на триъгълника.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
VI клас

Зад.1 $x = -3$ (2 точки), $y = 3$ (2 точки), $A = 4,5$ (3 точки).

Зад.2) Намиране на $v_2 = 16,5 \text{ km/h}$ (1,5 точки). Нека x h е времето, през което се е движил всеки от тях до срещата, т.е $t = x$ h, $x > 0$ (1 точка). Съгласно условието $16,5x - 15x = 7$ (1,5 точки)

$$\Rightarrow x = 4\frac{2}{3} \text{ h} = 4 \text{ h } 40 \text{ min (1,5 точки)} \Rightarrow S = 147 \text{ km (1,5 точки)}.$$

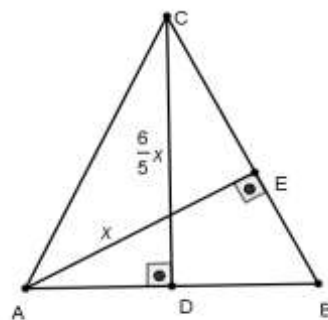
Зад.3 Нека $h_a = x$, $x > 0$ (1 точка).

Съгласно условието на задачата $h_c = x + \frac{20}{100}x = \frac{6}{5}x$ (1,5 точки).

$$\text{От } S_{ABC} = \frac{AB \cdot h_c}{2} = \frac{BC \cdot h_a}{2} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot \frac{6}{5}x}{2} = \frac{24 \cdot x}{2} \text{ (2,5 точки)}$$

$$\Rightarrow AB \cdot \frac{6}{5} = 24 \Rightarrow AB = 24 : \frac{6}{5} = 20 \text{ cm (1 точка)}$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot 24 + 20 = 68 \text{ cm (1 точка)}.$$



Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

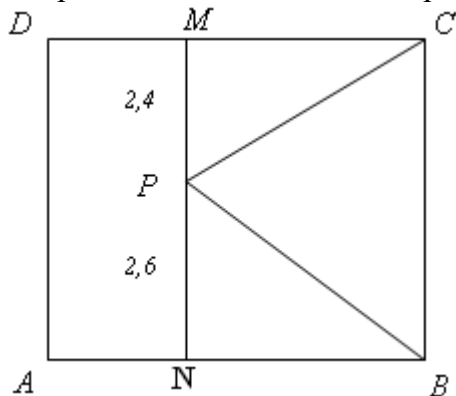
V клас

Зад.1 а) Намерете стойностите на x и y , ако $y = (5,7 : 19 + 3,7) \cdot (0,68 : 0,2 - 2,3)$, а x е неизвестното число от равенството $25,42 - x = 11,76 : 0,5$.

б) Пресметнете стойността на израза $A = 3 \cdot x - y : 4 + 1,2$, където x и y са числата, намерени в подточка а). Запишете поне една десетична дроб a , за която е вярно неравенството $5,2 < a < A$.

(7 точки)

Зад.2 Отсечката MN разделя квадрата $ABCD$ на два правоъгълника. Върху MN е взета точка P така, че $PM = 2,4$ см и $PN = 2,6$ см. Ако лицето на триъгълник BPC е 8 кв. см, намерете лицето на правоъгълника $ANMD$ и сбора от лицата на триъгълниците BNP и PMC .



(7 точки)

Зад.3 В кварталния магазин цената за 1 килограм грозде е 2,30 лева, а тази за 1 килограм тиквички е 0,45 лева. Леля Вася погледнала в портфейла си и установила, че разполага с 6 лева и 50 стотинки. Влязла в магазина и си купила 1 килограм и 600 грама грозде, 2 килограма и 200 грама тиквички и 600 грама чушки, като похарчила общо 5,48 лева.

а) Намерете цената за 1 килограм чушки.

б) С останалите пари леля Вася иска да си купи от любимите ментови бонбони, които се продават в пакетчета по 50 грама, а цената им за 1 килограм е 6 лева. Колко най-много пакетчета ментови бонбони може да си купи леля Вася?

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

V клас

Зад.1 а) Намиране на $x = 1,9$ (2 точки), $y = 4,4$ (2 точки).

б) Намиране на стойността на израза $A = 5,8$ (2 точки).

Записване на десетична дроб a , за която е вярно неравенството $5,2 < a < 5,8$ (1 точка).

Зад.2 $MN = 5$ см (1 точка).

Намиране на височината на триъгълник BPC - 3,2 см (1 точка).

Извод, че $NB = MC = 3,2$ см (1 точка).

Намиране на $AN = DM = 5 - 3,2 = 1,8$ см (1 точка).

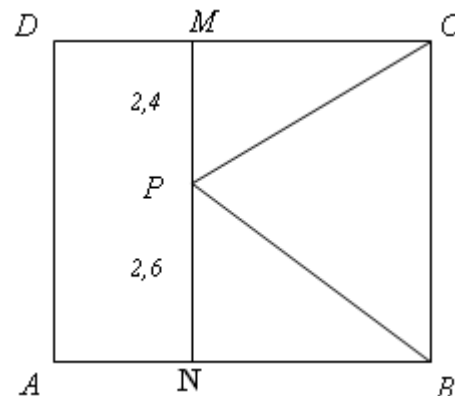
Намиране на лицето правоъгълника $ANMD$ - 9 кв. см (1 точка).

Намиране на лицето на квадрата $ABCD$ - 25 кв. см

или лицето на правоъгълника $NBCM$ - 16 кв. см (1 точка).

Намиране на сбора от лицата на триъгълниците BNP и PMC :

$25 - 8 - 9 = 8$ кв. см или $16 - 8 = 8$ кв. см (1 точка).



Зад.3 а) $2,30.1,6=3,68$ лв.- грозде (1 точка).

$2,2.0,45=0,99$ лв.- тиквички (1 точка).

$5,48-(3,68+0,99)=0,81$ лв.- чушки (1 точка).

$0,81:0,6=1,35$ лв.- цена за 1 кг чушки (1 точка).

б) $6,50-5,48=1,02$ лв.-остатък пари (0,5 точки).

За 1кг бонбони $\rightarrow 6$ лв. $\Rightarrow$ за 100 г $\rightarrow 60$ ст. $\Rightarrow$ за 50 г $\rightarrow 30$ ст. (1,5 точки)

$\Rightarrow$ с останалите пари могат да се купят 3 пакетчета бонбони (1 точка).

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

14.12.2014 г.

IV клас

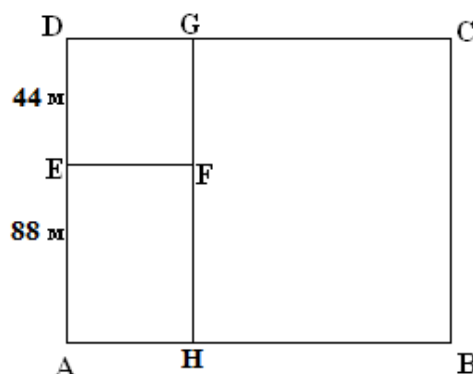
Зад.1 Намерете числата A , B , C и D и ги сравнете, ако числото $B = (2014 - 214) : 2 : 10 - 2 \cdot (2 + 2 \cdot 12)$, числото C е два пъти по-голямо от сбора на най-голямото трицифрено число и 341, числото D е четвъртинката на десетинката на C , а числото A е неизвестната цифра в сбора

$$\begin{array}{r} 7A \\ + \quad A \\ \hline A6. \end{array}$$

(7 точки)

Зад.2 По данните от чертежа намерете обиколките на цялата овощна градина $ABCD$ и на всеки от участъците в нея, ако е известно, че участъкът $EFGD$ е с форма на квадрат, градината $ABCD$ и участъците $AHFE$ и $HBCG$ са с форма на правоъгълник, а страната AD е с 66 м по-къса от страната DC .

Колко метра тел е необходима за ограждането на овощната градина и на участъците в нея, ако за всеки участък е предвиден отделен вход с ширина 1 метър?



(7 точки)

Зад.3 Обиколката на правоъгълник е 3 дециметра, а дължината му a е 4 пъти по-голяма от широчината b . Намерете:

а) дължината и широчината на правоъгълника в сантиметри;

б) страните на разностранен триъгълник, ако те са четни числа и най-малката страна е половината от дължината на правоъгълника, а обиколката му е с 6 сантиметра по-малка от обиколката на правоъгълника.

(7 точки)

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците с минимум 16 точки.

Време за работа - 4 астрономически часа.

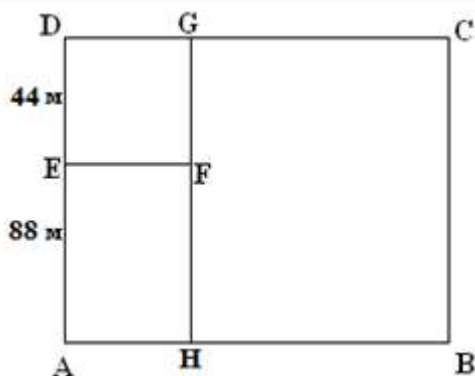
Желаем Ви успех!

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 64. НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
14.12.2014 г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване
IV клас

Зад.1 $A=8$ (1 точка), $B=38$ (2 точки), $C=2680$ (2 точки), $D=67$ (1 точка) и $A < B < D < C$ (1 точка).

Зад.2 $P_{EFGD} = 4.44 = 176\text{м}$ (0,5 точки), $P_{AHFE} = 2.(88 + 44) = 264\text{м}$ (1 точка),
 $BC=AD=88+44=132\text{м}$ (0,5 точки), $DC=AB=AD+66=132+66=198\text{м}$ (1 точка)
 $\Rightarrow P_{ABCD} = 2.(132+198) = 660\text{м}$ (1 точка), $HB=GC=DC-DG=198-44=154\text{м}$ (1 точка),
 $P_{HBCG} = 2.(132+154) = 572\text{м}$ (1 точка). Необходимата тел е $AB + BC + DC + AD + EF + GH - 1.3 =$
 $= 2.(132+198) + 44 + 132 - 3 = 833\text{м}$ (1 точка).



Зад.3 а) $3\text{дм} = 30\text{см}$ (0,5 точки). От $P_{\text{правоъг.}} = 2.(a + b) = 30\text{ см} \Rightarrow a + b = 30 : 2 = 15\text{см}$, но по условие $a = 4.b \Rightarrow 4.b + b = 15 \Rightarrow 5.b = 15 \Rightarrow b = 15 : 5 = 3\text{ см}$ (2 точки) и $a = 4.3 = 12\text{см}$ (1 точка).
б) $P_{\text{тр.}} = 30 - 6 = 24\text{ см}$ (0,5 точки), $a = 12 : 2 = 6\text{см}$ (1 точка).

$P_{\text{тр.}} = a + b + c = 6 + b + c \Rightarrow b + c = 18$, където b и c са различни четни числа, по-големи от 6
 $\Rightarrow$ другите две страни са 8см и 10см (2 точки).

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки.