

## Теорема на Клайнер

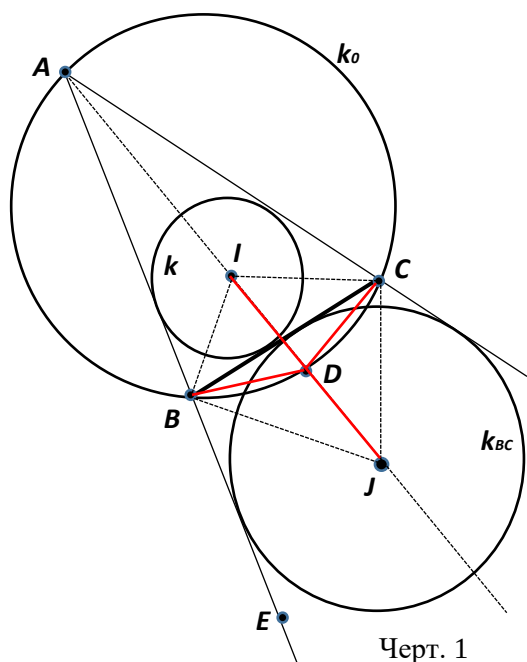
Румяна Несторова, Враца

Посвещавам на светлата памет на Слави Харалампиев

В темата е разгледана в теоретичен и приложен план теоремата на Клайнер, известна по-скоро като теорема за триъбеца. Част от разгледаните задачи са популярни, а други - по-малко известни, предложени са и задачи за самостоятелна работа с указания и насоки за решаване. Темата разширява и задълбочава знанията и уменията на учениците по темата «Вписани и описани многоъгълници».

### Формулировка на теоремата:

Ако  $D$  е пресечната точка на ъглополовящата на  $\angle A$  с описаната около  $\triangle ABC$  окръжност  $k_0$ , а  $I$  и  $J$  са съответно центровете на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $k$  и външно вписаната окръжност  $k_{BC}$ , допираща се до страната  $BC$ , то  $DI = DB = DC = DJ$  (черт. 1).

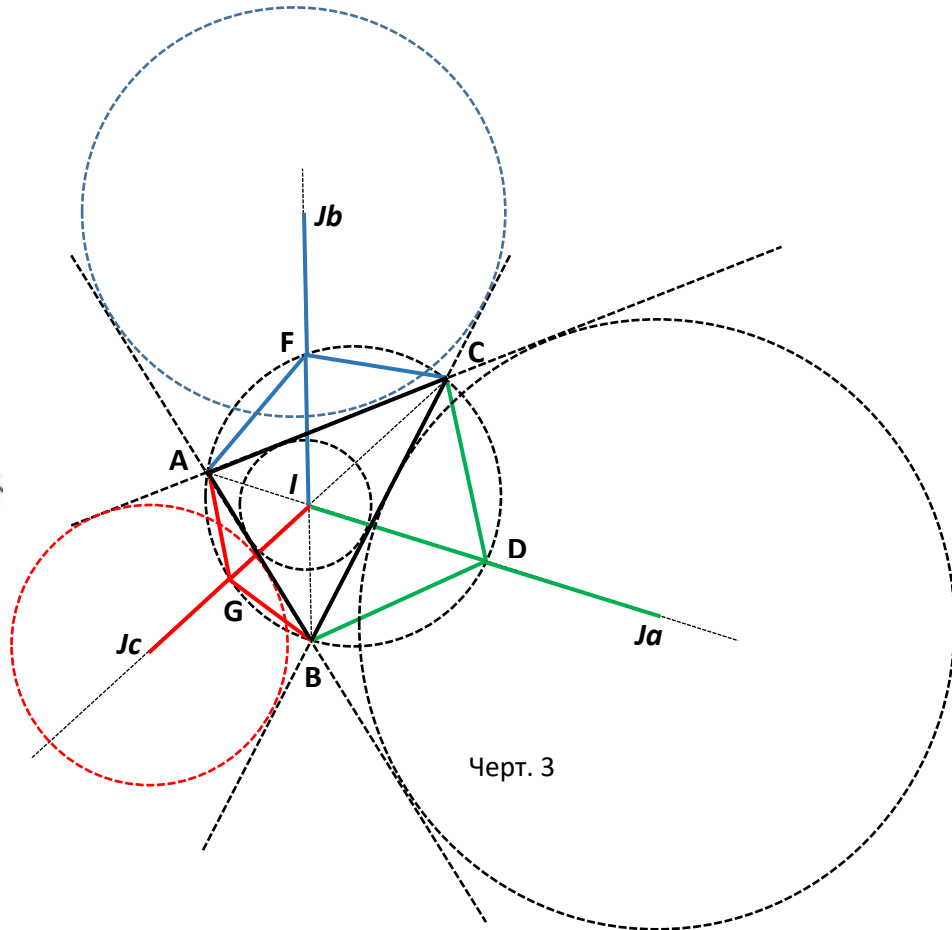
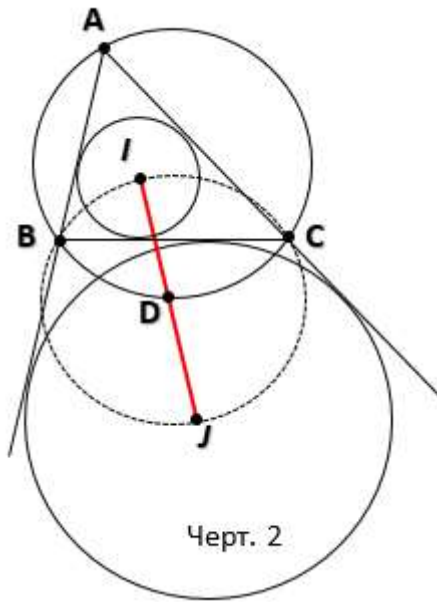


Теоремата е известна като теорема за триъбеца/трилистника, тъй като трите отсечки  $DI$ ,  $DB$  и  $DC$  наподобяват триъбец (с дръжка отсечката  $DJ$ ) или трилистник (отсечката  $DJ$  се явява негово стебло).

**Доказателство:** Нека  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$  и  $\angle C = \gamma$ . Точка  $I$  – център на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $\Rightarrow I = l_{\angle A} \cap l_{\angle B} \cap l_{\angle C}$ . От  $\angle BAD = \angle DAC = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow DB = DC$  (1). За  $\triangle ABI$  външният ъгъл  $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ ,  $\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD$ , но  $\angle IBC = \frac{\beta}{2}$ , а  $\angle CBD = \frac{\alpha}{2}$ , (вписан ъгъл)  $\Rightarrow \angle IBD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle BID = \angle IBD \Rightarrow DB = DI$  (2). Точка  $J$  – център на външно вписаната окръжност, допираща се до  $BC \Rightarrow J = l_{\angle A} \cap l_{\angle CBE}$  (точка  $E$  лежи на продължението на  $AB$ ). Означаваме  $\angle JBE = \angle CBJ = \delta \Rightarrow \angle DBJ = \angle CBJ - \angle CBD = \delta - \frac{\alpha}{2}$ . Но  $\angle JBE = \angle AJB + \angle JAB$  (външен ъгъл за  $\triangle ABJ$ )  $\Rightarrow \delta = \angle DJB + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \angle DJB = \delta - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle DBJ = \angle DJB \Rightarrow DB = DJ$  (3). От (1), (2) и (3) получаваме  $DI = DB = DC = DJ$ .

### Изводи и обобщения:

1. Отсечката, съединяваща центровете на вписаната и външно вписаната за триъгълник окръжност, се дели от описаната около него окръжност на две равни части (черт.2), т. е.  $DI = DJ$  (равенството е известно като **лема на Мансион**).
2. Точките  $I, B, C, J$  лежат на окръжност с център средата  $D$  на  $IJ$  (черт.2).
3. Тройното приложение на теоремата за точките  $D = l_{<A} \cap k_0$ ,  $F = l_{<B} \cap k_0$  и  $G = l_{<C} \cap k_0$  е онагледено на черт. 3.



**Задача 1:** Разстоянието  $d$  между центровете на вписаната и описаната окръжност за даден триъгълник се определя по формулата  $d^2 = R^2 - 2Rr$ , където  $R$  е радиусът на описаната, а  $r$  - радиусът на вписаната окръжност (твърдението е известно като **теорема на Ойлер**).

### Доказателство:

Нека  $O_1D \perp AB (D \in AB)$  в  $\triangle ABC$ ,  $L = l_A \cap k_{\text{опис.}}$ ,

$M = LO \cap k_{\text{опис.}}$ ,  $\{Q, P\} = O_1O \cap k_{\text{опис.}}$ , където

$O$ - център на  $k_{\text{опис.}}$ ,  $O_1$ - център на  $k_{\text{впис.}}$  (черт.4).

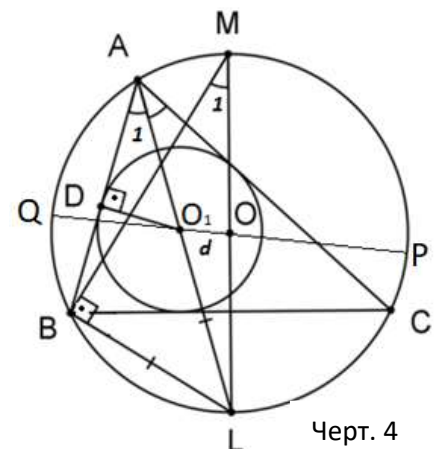
От  $\triangle ADO_1 \sim \triangle MBL$  (I признак)

$$\Rightarrow \frac{AO_1}{ML} = \frac{DO_1}{BL} \Rightarrow AO_1 \cdot BL = ML \cdot DO_1 \quad (1).$$

Но съгласно теоремата за триъбеца  $BL = LO_1$  (2).

Освен това  $AO_1 \cdot LO_1 = QO_1 \cdot PO_1 = (R - d)(R + d)$  (3).

От (1), (2) и (3) следва  $(R - d)(R + d) = 2Rr \Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$ .



### Изводи:

1. Равенството  $d^2 = R^2 - 2Rr \Leftrightarrow \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$ .
2. Равенството  $d^2 = R^2 - 2Rr \Leftrightarrow (R-r)^2 = d^2 + r^2$ .
3. От теоремата следва  $R \geq 2r$  (**неравенство на Ойлер**), тъй като  $d^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r) \geq 0$ .

**Задача 2:** Ако  $R$  е радиусът на описаната окръжност на  $\triangle ABC$ , а  $r$  - радиусът на една от външно вписаните окръжности на този триъгълник, то разстоянието  $d$  между центровете на описаната и външно вписаната окръжност се определя по формулата  $d^2 = R^2 + 2Rr$ .

### Доказателство:

Ако  $I$  - център на  $k_{\text{опис.}}$ ,  $D = l_C \cap k_{\text{опис.}} \Rightarrow ID \perp AB$  (черт.5).

Нека  $J$  - център на външно вписаната окръжност  $k_{AB}$ , допираща се до страната  $AB$ ,  $F = ID \cap AB$ ,  $K = ID \cap k_{\text{опис.}}$ .

Ако  $JP \perp ID$  ( $P \in ID$ ), то от теоремата на Питагор за правоъгълния  $\triangle JPI \Rightarrow IJ^2 = JP^2 + IP^2$  (1).

От правоъгълния  $\triangle JPD$  и теоремата на Питагор  $\Rightarrow JP^2 = JD^2 - DP^2$  (2).

Но съгласно теоремата за триъбеца  $JD = DB$  (3).

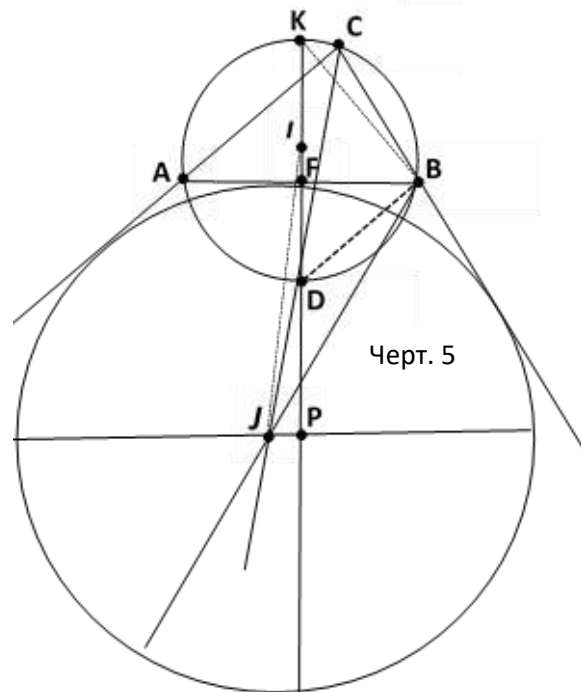
Освен това  $IP = ID + DP$  (4).

От метрични зависимости в правоъгълния  $\triangle DBK \Rightarrow DB^2 = KD \cdot FD = 2R \cdot FD$  (5).

От (1), (2), (3), (4) и (5) следва

$$\begin{aligned} IJ^2 &= JP^2 + IP^2 = JD^2 - DP^2 + (ID + DP)^2 = \\ &= DB^2 + ID^2 + 2 \cdot ID \cdot DP \Leftrightarrow d^2 = DB^2 + R^2 + 2 \cdot R \cdot DP \\ &\Leftrightarrow d^2 = KD \cdot FD + R^2 + 2 \cdot R \cdot DP = 2R \cdot FD + R^2 + 2 \cdot R \cdot DP = \\ &= 2R \cdot (FD + DP) + R^2 \Leftrightarrow d^2 = 2 \cdot R \cdot r + R^2 = R \cdot (R + 2r), \end{aligned}$$

тъй като  $FP = r$  ( $r$  - радиус на  $k_{AB}$ ).



Ще разгледаме няколко пострителни задачи, решими с теоремата, без да описваме подробно етапите на този вид задачи, с изключение на построението.

**Задача 3:** Нека  $O$  е център на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност  $k$ ,  $O_1$  - център на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $k_1$ ,  $O_c$  - център на външно вписаната окръжност  $k_c$ , допираща се до страната  $AB$  на  $\triangle ABC$ ,  $l_c$  - ъглополовяща на  $\angle ABC$  и  $L = l_c \cap k$ . При така въведените означения да се построи триъгълник по дадени точки:

- а)  $O, L, O_1$ ;   б)  $O, L, O_c$ ;   в)  $O, O_1, O_c$ .

### Упътване:

а) Описваме окръжност  $k(O; OL)$ . Върхът  $C$  на  $\triangle ABC$  е пресечна точка на правата  $LO_1$  и окръжността  $k$ . Върховете  $A$  и  $B$  лежат на окръжностите  $k(O; OL)$  и  $k_0(L; LO_1)$ .

б) Свеждаме до условие а) като намираме точка  $O_1$ , симетрична на  $O_c$  относно  $L$ .

в) Свеждаме до условие а) като намираме точка  $L$ , среда на  $O_1O_c$ .

**Задача 4:** Да се построи триъгълник по дадени страна  $c$ , срещулежащ на нея ъгъл  $\gamma$  и радиус  $r$  на вписаната окръжност.

За получаването на търсения  $\triangle ABC$  последователно **построяваме**:

1. Отсечка  $AB = c$ , с което са построени върховете  $A$  и  $B$  на  $\triangle ABC$ ;
2. Ъгъл  $\angle MAB = \gamma$ ;
3. Права  $p \perp A$ ,  $p \perp MA$ ;
4. Симетралата  $S_{AB}$ ;
5. Точка  $O = p \cap S_{AB}$ ;
6. Окръжността  $k(O; R = OA = OB)$ , описана около  $\triangle ABC$ ;
7. Точка  $L = S_{AB} \cap k$  - среда на дъгата  $\widehat{AB}$ , от която отсечката  $AB$  се вижда под ъгъл  $180^\circ - \gamma$ ;
8. Права  $l$  на разстояние  $r$  от страната  $AB$  в полуравнината на  $AB$ , несъдържаща точката  $L$ ;
9. Окръжност  $k_1(L; r_1 = LA = LB)$ ;
10. Центърът на вписаната окръжност  $O_1 = l \cap k_1$ ;
11. Върхът  $C = LO_1 \cap k$ , страните  $BC$  и  $AC$ , с което  $\triangle ABC$  е построен.

**Задача 5:** Да се построи **правоъгълен триъгълник** по дадени  $R$  и  $r$  – радиуси, съответно на описаната и вписаната окръжност.

Тази формулировка е **еквивалентна** на условието за построяване на **правоъгълен триъгълник** по дадени **хипотенуза  $c$**  и радиус  $r$  на вписаната окръжност.

**Задача 5** можем да сведем до **задача 4** ( $c = 2R$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ) или до **задача 3 а**), тъй като точка  $O$  е средата на  $AB = 2R$ ;  $L = S_{AB} \cap k(O; R = OA = OB)$ ;  $O_1 = l \cap k_1$ , където правата  $l$  е на разстояние  $r$  от  $AB$  в полуравнината на  $AB$ , несъдържаща точката  $L$  и окръжността  $k_1(L; r_1 = LA = LB)$ .

Извод за средата на дъгата  $\widehat{BC}$  на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност, съдържаща върха  $A$ , ни дава следващата **задача 6**: Средата на дъгата  $\widehat{BC}$  на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност, съдържаща върха  $A$ , е равноотдалечена от върховете  $B$ ,  $C$  и центровете  $J_1$ ,  $J_2$  на външно вписаните окръжности, допиращи се съответно до страните  $AB$  и  $AC$  (**външна теорема за триъгбеца/теорема на Мансион**).

**Доказателство:**  $AJ_1$  и  $AJ_2$  са външни ъглополовящи на  $\angle BAC \Rightarrow \angle J_1AJ_2 = 180^\circ$  (черт. 6). Нека точка  $M$  е средата на  $J_1J_2$ . Тъй като  $BJ_1$  и  $CJ_2$  са съответно външна и вътрешна ъглополовяща на  $\angle ABC$

$\Rightarrow \angle J_1BJ_2 = 90^\circ$ , но  $BM$  – медиана към хипотенузата в правоъгълния  $\triangle J_1BJ_2 \Rightarrow BM = J_1M = MJ_2$  (1).

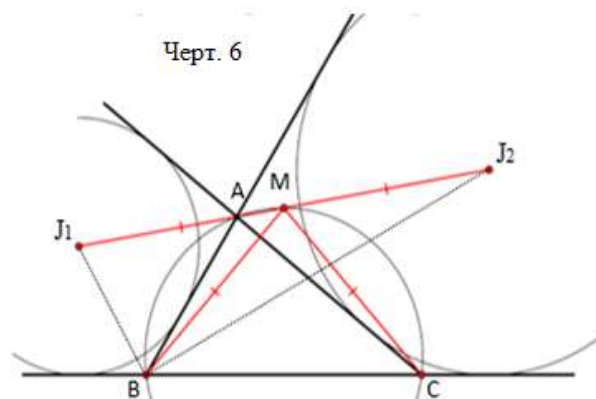
Аналогично се доказва, че  $CM = J_1M = MJ_2$  (2).

От (1) и (2) следва  $BM = CM = J_1M = MJ_2$ .

$\angle MJ_1B = \angle MBJ_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \angle J_1MB = \gamma$  и

$\angle MJ_2C = \angle MCJ_2 = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle J_2MC = \beta$

$\Rightarrow \angle BMC = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha = \angle BAC \Rightarrow M \in k$ , но  $BM = CM \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{MC}$ , т.е.  $M$  е средата на дъгата  $\widehat{BAC}$ .



**Задача 7 (за самостоятелна работа):** Ако височините в  $\triangle ABC$  са  $AN_1 \perp BC$  ( $N_1 \in BC$ ),  $BN_2 \perp AC$  ( $N_2 \in AC$ ),  $CH_3 \perp AB$  ( $N_3 \in AB$ ) и точка  $H = AN_1 \cap BN_2 \cap CH_3$  е ортоцентър, то докажете, че:

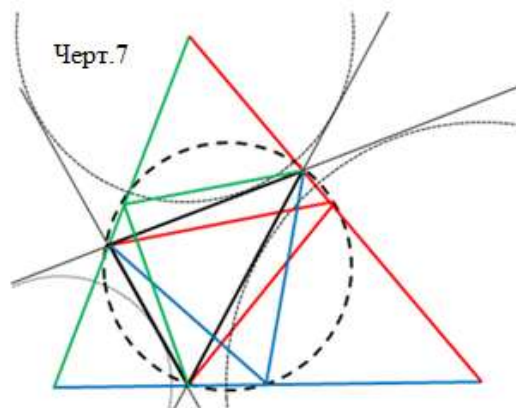
- Отсечките  $NN_1, NN_2, NN_3$  и страните  $AB, BC, AC$  са съответно вътрешни и външни ъглополовящи на ортотриъгълника  $\triangle H_1H_2H_3$ .
- Средите на страните  $AB, BC, AC$ , петите на височините  $H_1, H_2, H_3$  и средите на отсечките  $HA, HB, HC$  с краища ортоцентърът и всеки от върховете на триъгълника, лежат на една окръжност (описаната около  $\triangle H_1H_2H_3$  окръжност).

**Упътване:**

- Използвайте знанията си за вписани ъгли и факта, че вътрешната и външната ъглополовяща на даден ъгъл са перпендикулярни.
- Приложете теоремата за триъбеца и теоремата на Мансион.

**Обобщения:**

- Тройното приложение на външната теорема за триъбеца е показано на черт. 7. (сравнете с чертежа в източник [3] и открийте допуснатата неточност в рис. 5).
- Описаната около ортотриъгълника окръжност е известна като окръжността на деветте точки, окръжност на Ойлер или окръжност на Фойербах за триъгълника.



**Задача 8:** Нека  $I$  е центърът на вписаната окръжност в неравнобедрения  $\triangle ABC$ . Докажете, че правите  $AB$  и  $AC$  отсичат равни хорди в описаната около  $\triangle BCI$  окръжност.

**Доказателство:**  $AL$  ( $L \in BC$ ),  $CF$  ( $F \in AB$ ),  $BK$  ( $K \in AC$ ) – ъглополовящи в  $\triangle ABC$  (черт.8). Центърът на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $I = AL \cap CF \cap BK$ . Нека  $k_1$  е окръжността, описана около  $\triangle ABC$  и  $O = AL \cap k_1$ .

Съгласно теоремата за триъбеца  $OI = OC = OB$

$\Rightarrow O$  е център на описаната около  $\triangle BCI$  окръжност  $k_2$ .

Ако  $AC \cap k_2 = D$  и  $AB \cap k_2 = E$ , то

$OI = OC = OB = OE = OD = r_2$  ( $r_2$  – радиус на  $k_2$ ).

$BK$  –  $\angle$  ъглополовяща на  $\angle ABC \Rightarrow$

$\angle EBI = \angle CBI = \frac{\beta}{2}$  (вписани ъгли)  $\Rightarrow \widehat{IE} = \widehat{IC} = \beta$

$\Rightarrow \angle IOE = \angle IOC = \beta$  (централни ъгли)

$\Rightarrow \angle BEO = \angle DCO = \frac{\angle BAC}{2} + \beta = \frac{\alpha}{2} + \beta$  (външни ъгли).

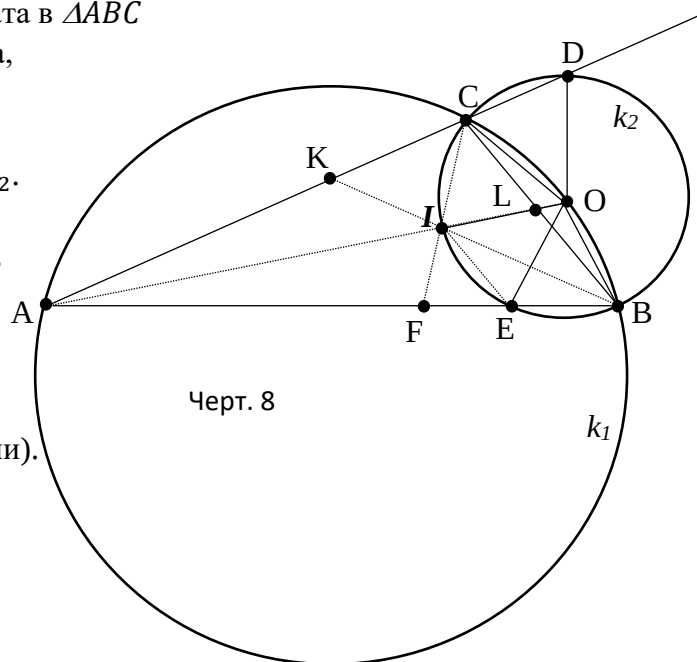
$\triangle COD \cong \triangle EOB$  (II признак), защото

1)  $OC = OE = r_2$ ;

2)  $\angle BEO = \angle DCO = \frac{\alpha}{2} + \beta$ ;

3)  $\angle EBO = \angle CDO = \frac{\alpha}{2} + \beta$  ( $OB = OE, OC = OD$ ).

Следователно  $CD = BE$  (съответни страни).



**Задача 9:** Две окръжности  $k_1$  и  $k_2$  с радиуси 1 cm се пресичат в точките  $X$  и  $Y$ , разстоянието между които е също 1 cm. От точка  $C$  на едната окръжност са построени допирателните  $CA$  и  $CB$  към другата. Нека  $A_1$  е втората пресечна точка на правата  $CB$  с първата окръжност. Намерете  $AA_1$ .

**Решение:** От  $XO_1 = YO_1 = XO_2 = YO_2 = 1$  следва, че  $XO_2YO_1$  е успоредник

$$(a=b=1), \text{ откъдето } 2a^2 + 2b^2 = XY^2 + O_1O_2^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 1^2 + O_1O_2^2$$

$$\Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{3} \text{ (черт.9). Нека точката } K = CO_2 \cap k_1, \angle BCO_2 = \angle ACO_2 = \delta.$$

Ако  $t$  е дължината на допирателната от  $O_2$  към  $k_1$ , то

$$KO_2 \cdot CO_2 = t^2 = O_1O_2^2 - r_1^2 \Leftrightarrow KO_2 \cdot CO_2 = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 2. \quad (1)$$

$$\text{От правоъгълния } \triangle BCO_2 \text{ получаваме } \sin \delta = \frac{BO_2}{CO_2} = \frac{1}{CO_2}.$$

$$\text{От } \triangle KCA_1 \text{ получаваме } \frac{KA_1}{\sin \delta} = 2 \cdot r_1 = 2 \Leftrightarrow KA_1 = 2 \cdot \sin \delta = \frac{2}{CO_2} \quad (2)$$

(Синусова теорема). От (1) и (2) следва, че  $KO_2 = KA_1$ .

От теоремата за триъбеца следва, че  $A_1B_1$  се допира до  $k_2$  и нека да означим допирната точка с  $E$ .

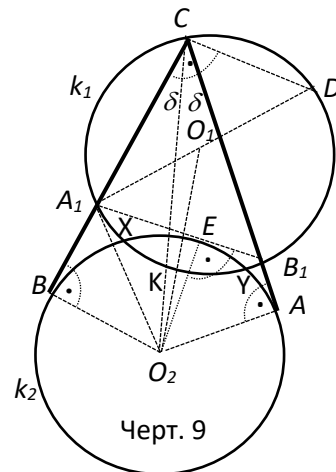
Със знанията за изучаваните видове ъгли последователно получаваме

$$\begin{aligned} \angle O_1A_1O_2 &= \angle O_1A_1B_1 + \angle B_1A_1O_2 = \angle DCB_1 + (90^\circ - \angle A_1O_2E) = \\ &= (90^\circ - 2\delta) + (90^\circ - \angle BO_2A_1) = 90^\circ - 2\delta + 90^\circ - \angle BO_2A_1 = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle BO_2A) - \angle BO_2A_1 = \angle BO_2A - \angle BO_2A_1 = \angle AO_2A_1. \end{aligned}$$

$\triangle O_1A_1O_2 \cong \triangle AO_2A_1$  (I признак), защото 1)  $A_1O_2 = A_1O_2$  (обща);

2)  $A_1O_1 = AO_2 = 1$  ( $r_1 = r_2 = 1$ ); 3)  $\angle O_1A_1O_2 = \angle AO_2A_1$  (по доказателство).

Следователно  $AA_1 = O_1O_2 = \sqrt{3}$  (съответни страни).



Черт. 9

**Задача 10:** Лицето на  $\triangle ABC$  е 1. Вътрешните ъглополовящи на  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCA$  пресичат страните  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  и описаната около  $\triangle ABC$  окръжност съответно в точките  $L$  и  $G$ ,  $N$  и  $F$ ,  $Q$  и  $E$ . Правите  $EF$ ,  $FG$  и  $GE$  пресичат ъглополовящите  $AL$ ,  $CQ$ ,  $BN$  съответно в точките  $P$ ,  $M$  и  $R$ . Намерете площта на шестоъгълника  $LMNPQR$ .

**Решение:** Нека  $AL$  ( $L \in BC$ ),  $CQ$  ( $Q \in AB$ ),  $BN$  ( $N \in AC$ ) – ъглополовящи в  $\triangle ABC$ , следователно центърът на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $I = AL \cap CQ \cap BN$  (черт.10).

Нека  $k$  е окръжността, описана около  $\triangle ABC$ .

Съгласно теоремата за триъбеца  $AF = FI$  и  $AE = EI \Rightarrow$  точка  $P$  е среда на  $AI$  ( $FE = S_{AI}$ ),

$$\text{откъдето } S_{\triangle PQI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle AQI} \text{ и } S_{\triangle PNI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ANI}.$$

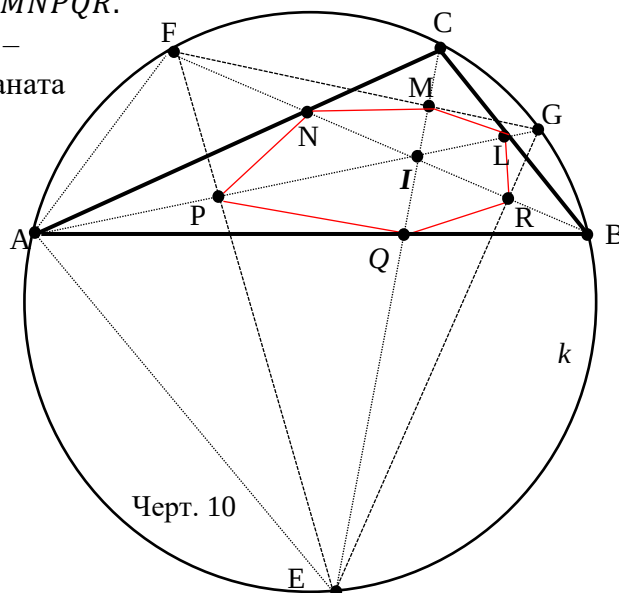
Аналогично се доказва, че точка  $R$  е среда на  $BI$ ,

$$\text{откъдето } S_{\triangle RQI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle BQI} \text{ и } S_{\triangle RLI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle BLI}, \text{ а}$$

точка  $M$  е среда на  $CI$ , откъдето

$$S_{\triangle MLI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle CLI} \text{ и } S_{\triangle MNI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle CNI}.$$

$$\text{Следователно } S_{LMNPQR} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.$$

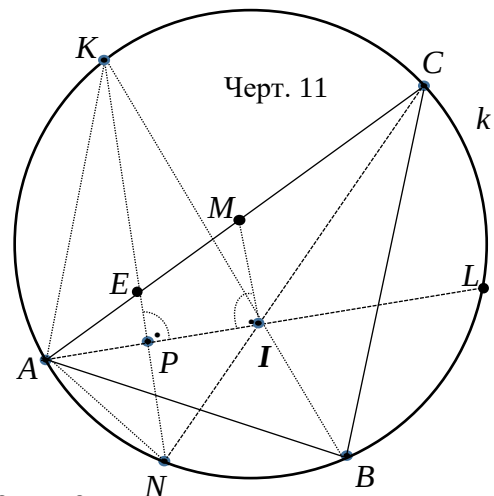


Черт. 10

**Задача 11:** Точка  $I$  е център на вписаната окръжност в  $\triangle ABC$ , точка  $M$  – средата на страната  $AC$ , а точка  $N$  – средата на дъгата  $\widehat{AB}$  на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност, несъдържаща върха  $C$ . В какво отношение  $I$  дели  $CN$ , ако  $\angle AIM = 90^\circ$ ?



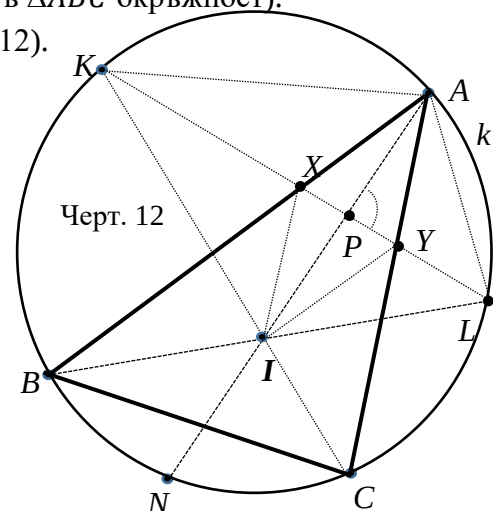
**Решение:** Нека  $k$  е окръжността, описана около  $\triangle ABC$ . Ако  $AL$  ( $L \in k$ ),  $CN$  ( $N \in k$ ),  $BK$  ( $K \in k$ ) са ъглополовящите в  $\triangle ABC$ , то центърът на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $I = AL \cap BK \cap CN$  (черт.11). Съгласно теоремата за триъгбеца  $AN = NI$  и  $AK = KI \Rightarrow$  точката  $P = AI \cap KN$  е среда на  $AI$  и  $KN \perp AI$ , т.е.  $KN = S_{AI}$ . По условие  $\angle AIM = 90^\circ \Rightarrow KN \parallel MI \Rightarrow AE = EM$  ( $PE$  – средна отсечка за  $\triangle AIM$ ). От теорема на Талес и  $AM = CM$  (по условие) следва  $\frac{CI}{IN} = \frac{CM}{ME} \Leftrightarrow \frac{CI}{IN} = \frac{CM}{0,5AM} \Rightarrow CI : IN = 2 : 1$ .



**Задача 12:** Правата, съединяваща средите на дъгите  $\widehat{AB}$  и  $\widehat{AC}$  на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност (несъдържащи съответно точките  $C$  и  $B$ ), пресича страните  $AB$  и  $AC$  съответно в точките  $X$  и  $Y$ . Докажете, че  $AXIY$  е ромб ( $I$  е център на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност).

**Доказателство:** Нека  $k$  е окръжността, описана около  $\triangle ABC$  (черт.12).

Ако  $AN$  ( $N \in k$ ),  $BL$  ( $L \in k$ ),  $CK$  ( $K \in k$ ) са ъглополовящите в  $\triangle ABC$ , то центърът на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $I = AN \cap BL \cap CK$ . Съгласно теоремата за триъгбеца  $AL = LI$  и  $AK = KI \Rightarrow$  точката  $P = AI \cap KL$  е среда на  $AI$  ( $AP = PI$  (1)) и  $KL \perp AI$ , т.е.  $KL = S_{AI}$ . Тъй като  $AP$  е височина и ъглополовяща в  $\triangle AXY$ , следователно  $\triangle AXY$  е равнобедрен ( $AX = AY$  (2)) и  $AP$  – медиана ( $XP = PY$  (3)). От (1), (2) и (3) следва, че  $AXIY$  е успоредник с равни съседни страни, т.е. ромб.



**Задача 13 (за самостоятелна работа):**

Ако  $\triangle ABC$  е вписан в окръжността  $k$ , точките  $J_c$  и  $J_b$  са центрове на външно вписаните окръжности, допиращи се съответно до страните  $AB$  и  $AC$ , точката  $I$  – център на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност, точките  $A''$ ,  $B'$  и  $C'$  – съответно среди на дъгата  $\widehat{BAC}$  и дъгите  $\widehat{AC}$  и  $\widehat{AB}$  от окръжността  $k$ , несъдържащи другите върхове на  $\triangle ABC$ , то докажете, че:  
 $\triangle J_b B' A'' \cong \triangle C B' A'' \cong \triangle A'' C' B \cong \triangle A'' C' J_c \cong \triangle B' I C' \cong \triangle B' A C' \cong \triangle C' A'' B'.$

Накрая искам да изкажа благодарност на Борислав Мирчев за покрепата и сътрудничеството при реализирането на разработката.

### Литература:

- [1] Петров, К. (1984). Ръководство за решаване на задачи по математика, част първа (с.121-122, с.192-193). София: ДИ „Народна просвета”
- [2] <https://bg.wikipedia.org/wiki/Триъгбец>
- [3] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Лемма\\_о\\_трезубце](https://ru.wikipedia.org/wiki/Лемма_о_трезубце)
- [4] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема\\_Эйлера\\_о\\_треугольнике](https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Эйлера_о_треугольнике)
- [5] <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2182192p16332082>
- [6] [http://math.mosolymp.ru/upload/files/2020/other/1568/10/9\\_Lemma\\_o\\_trezubtse.pdf](http://math.mosolymp.ru/upload/files/2020/other/1568/10/9_Lemma_o_trezubtse.pdf)
- [7] [http://www.problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=103934](http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=103934)
- [8] [https://ru.wikipedia.org/wiki/Центр\\_вписанной\\_окружности](https://ru.wikipedia.org/wiki/Центр_вписанной_окружности)
- [9] [taskprob \(7\).pdf](#)